“Profesora Cipariņa klubs” 1995.-1996.mācību gads

Uzdevumu atrisinājumi

1. Tā kā $5\times7=35$, tad visās naturālo skaitļu grupās [1;35], [36;70], [71;105] utt. apskatāmā tipa skaitļi izvietoti “vienās un tajās pašās vietās”. No 1 līdz 35 tādu ir 24.

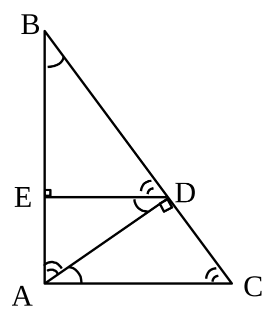
Tā kā $100=24\times4+4$, tad

a) gadījumā tas ir piektās grupas ceturtais skaitlis, t.i., 144.

Tā kā $1995=24\times83+3$, tad

b) gadījumā tas ir 84. grupas 3. skaitlis, t.i., $83\times35+3=2908$.

2.



35. zīm.

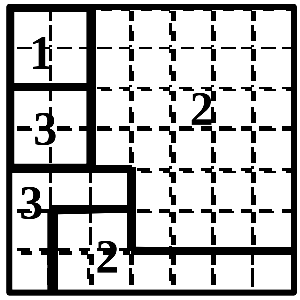
No uzdevuma nosacījumiem seko, ka visiem trijiem iegūtajiem trijstūriem jābūt līdzīgiem gan savā starpā, gan arī dotajam trijstūrim. Par tādu trijstūri der jebkurš taisnleņķa trijstūris. Tiešām, ja tam no taisnā leņķa virsotnes novelk augstumu, bet pēc tam tāpat sadala vienu no iegūtajiem trijstūrīšiem (35. zīm.), ΔDAC, ΔEDA, ΔEDB un ΔABC ir līdzīgi, jo visi to leņķu lielumi ir vienādi: katram trijstūrim viens leņķis ir 90^0, $\angle B$ ir kopīgs ΔABC un ΔEBD, $\angle C$ ir kopīgs ΔABC un ΔDAC, $\angle EDB=90^0-\angle B=\angle C$, $\angle DAC=90^0-\angle C=\angle B$, $\angle ADE=90^0-\angle EDB=90^0-\angle C=\angle B$, $\angle EAD=90^0-\angle DAC=90^0-\angle B=\angle C$.

3. Apzīmēsim dalāmo, dalītāju, dalījumu un atlikumu ar a, b, c un d. Tātad $a = b\cdot c+d$. Ja visi šie skaitļi beidzas ar ciparu 1, 3, 7, 9 (katrs ar citu), tad visi skaitļi ir nepāra. Tātad $b\cdot c$ arī ir nepāra skaitlis. Bet d arī ir nepāra skaitlis un divu nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis ($b\cdot c+d$). Tad skaitlim a jābūt pāra skaitlim un tas nevar beigties ar 1, 3, 7 vai 9. Tātad dalāmajam, dalītājam, dalījumam un atlikumam pēdējie cipari nevar būt 1, 3, 7 un 9.

4. Šādi skaitļi var būt, piemēram, 18, 36 un 45.

5. Tā kā ir doti kvadrāti 2×2, 3×3 un 6×6 rūtiņas un ir jāiegūst kvadrāts ar izmēriem 7×7 rūtiņas, pie tam sagriezt divās daļās var tikai divus kvadrātus, tad noteikti jāsagriež kvadrāts 6×6 rūtiņas. Ja to atstātu nesagrieztu, tad atlikušie jāsagriež strēmelītēs ar izmēriem $1\times x$ ($x=1,\ldots,7$) Bet kvadrātu 3×3 rūtiņas nevar sagriezt divās daļās tā, lai veidotos tādas sloksnītes.

Tātad nesagrieztu atstāj vai nu kvadrātu 2×2 rūtiņas, vai kvadrātu 3×3 rūtiņas. Viens veids, kā var iegūt kvadrātu 7×7 rūtiņas, ir parādīts 36. zīmējumā. Viena kvadrāta daļas apzīmētas ar vienādiem cipariem.



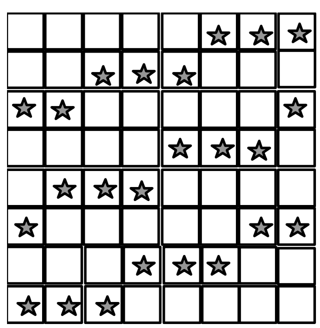
36. zīm.

6. Pieņemsim, ka pirmās skaistules sarakstā palika 15, otrās skaistules sarakstā – 22, bet trešās skaistules sarakstā – 24. kleitas. Tātad no pirmā saraksta ir izsvītrotas 15, no otrā – 8, bet no trešā saraksta 6 kleitas. Bet, tā kā tika izsvītrotas tikai tās kleitas, kas ir vismaz divos sarakstos, tad nevienā sarakstā nevar būt izsvītrots vairāk kleitu nekā abos pārējos sarakstos kopā. Bet šajā gadījumā 15 > 8+6=14. Tātad uzdevumā aprakstītā situācija nav iespējama.

7. Jā, var.

Lai neaizkrāsotas paliktu vismaz 6 zvaigznītes, tad aizkrāsot drīkst ne vairāk par 24–6= 18 zvaigznītēm. Tā kā aizkrāso jebkuras 3 rindiņas un jebkuras 3 kolonnas (kopā rindiņas un kolonnas ir 6), tad vienā rindiņā vai vienā kolonnā drīkst atrasties ne vairāk kā 3 zvaigznītes, jo 18 : 6 = 3.

Viens šāds zvaigznīšu izvietojuma variants, ka katrā rindiņā un kolonnā ir 3 zvaigznītes, ir parādīts 37. zīmējumā. Iespējami arī daudzi citi varianti.



37. zīm

8. a) izveidojam vispirms 498 grupas pa 4 skaitļiem katrā un saliekam zīmes sekojoši:

(+1+2–3–4), (+5+6–7–8), …, (+1989+1990–1991–1992).

Katras grupas skaitļu summa ir (–4), tātad visas summas vērtība patlaban ir –4×498= –1992.

Pievienojot tai +1993+1994, iegūstam vērtību “+1995”.

b) tādās pašās 498 grupās izvietojot zīmes secībā –++–, katras grupas skaitļu summa ir 0. Pēdējiem 3 skaitļiem pievienojam zīmes –1993+1994+1995; iegūstam vērtību 1996.

9. Ja p – uzdevumu skaits Pētera krājumos un m – uzdevumu skaits uzdāvinātajā grāmatā, tad iegūstam vienādojumu $11p-m=7(p+m)$, no kurienes $p=2m$. Tātad Jānim bija $11\times 2m=22m$ uzdevumu, bet pēc uzdāvināšanas palika 21m uzdevumu. Tā kā katrā grāmatā ir savā starpā **vismaz** m uzdevumu, tad Jānim nav vairāk par 21 grāmatu.

10. Sprīdītis pārbauda vienādības

“1kg”+”2kg”=”3kg”

“1kg”+”4kg”=”5kg”

“1kg”+”6kg”=”7kg”

“1kg”+”8kg”=”9kg”

“1kg”+”10kg”=”11kg”

Ja zelta gabals ar uzrakstu “1kg” tiešām sver 1kg, tad vismaz trīs (vairākums!) no tām izpildās; pretējā gadījumā vismaz 3 (vairākums!) neizpildās.

11. Ar $\overline{xy}$ sapratīsim divciparu skaitli, kura desmitu cipars ir x un vienu cipars ir y.

Naturāls skaitlis, dalot to ar 9, dod tādu pašu atlikumu, kādu, dalot ar 9, dod tā ciparu summa. Tāpēc $\overline{xy}$ un $\overline{yx}$ dod vienādus atlikumu, dalot šos skaitļus ar 9.

Apzīmējot uzdevumā minētos skaitļus ar $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ un $\overline{ef}$, iegūstam, ka $\overline{ab}+\overline{cd}+\overline{ef}=\overline{fe}+\overline{ef}$ dod tādu pašu atlikumu, dalot ar 9, kādu dod skaitlis $2\cdot\overline{ef}$. Līdzīgi pierāda, ka tādu pašu atlikumu dod arī skaitļi $2\cdot\overline{ab}$ un $2\cdot\overline{cd}$.

Sekojošā tabulā redzams, kādu atlikumu, dalot ar 9, dod skaitlis 2n atkarībā no tā, kādu atlikumu, dalot ar 9, dod skaitlis n:

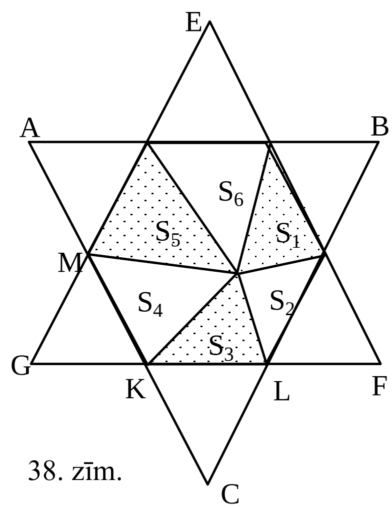
n atlikums	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2n atlikums	0	2	4	6	8	1	3	5	7

Redzam, ka atšķirīgiem skaitļa n atlikumiem atbilst atšķirīgi skaitļa 2n atlikumi. Tāpēc no tā, ka $2\cdot\overline{ab}$, $2\cdot\overline{cd}$ un $2\cdot\overline{ef}$ dod vienādus atlikumus, dalot ar 9, seko, ka arī $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ un $\overline{ef}$ dod vienādus atlikumus, dalot ar 9. Šādus pašus atlikumus dod arī $\overline{ba}$, $\overline{dc}$ un $\overline{fe}$; apzīmēsim visu minēto atlikumu kopējo vērtību ar r.

Tā kā $\overline{ab}+\overline{cd}=\overline{fe}$ un katrs no skaitļiem $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{fe}$ dod atlikumu r, dalot ar 9, tad 2r, dalot to ar 9, dod atlikumu r. No iepriekš aplūkotās tabulas seko, ka r=0. Tātad $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{ef}$ dalās ar 9; to ciparu summas arī dalās ar 9, tātad ir 0, 9 vai 18. Pirmā iespēja atkrīt, jo divciparu skaitļa ciparu summa nav 0; trešā iespēja atkrīt, jo 99 summa ar divciparu skaitli nav divciparu skaitlis. Tāpēc visiem šiem skaitļiem ciparu summas ir 9.

Tāpēc $\overline{ab}+\overline{cd}+\overline{ef}=\overline{fe}+\overline{ef}$ =(10f+e)+(10e+f)=11(e+f)=11·9=99.

12. Sešstūra leņķu lielumu summa ir $180^0\cdot(6-2)=720^0$. Tā kā tā visi leņķi ir vienādi, tad to lielumi ir $720^0:6=120^0$. Doto sešstūri papildināsim līdz diviem trijstūriem (skat. 38. zīm.).



38. zīm.

Tā kā dotais sešstūris ir regulārs, tad abi izveidotie trijstūri ABC un EGF ir vienādi, turklāt tie ir vienādmalu trijstūri.

Pierādījums.

$$\Delta KLC \sim \Delta ABC$$

$$\angle KLC=180^0-\angle KLB=180^0-120^0=60^0$$

$$\angle LKC=180^0-120^0=60^0$$

$$\angle C=180^0-2\cdot 60^0=60^0$$

ΔKLC – vienādmalu, tātad arī ΔABC ir vienādmalu trijstūris. Līdzīgi var pierādīt, ka ΔEGF ir vienādmalu.

Ja sešstūra malas garums ir a, tad trijstūra malas garums ir AC=AM+MK+KC=a+a+a=3a (ΔKLC vienādmalu, bet KL=a, tātad arī KC=a; tāpat arī AM=a). Tieši tāpat iegūstam, ka otra trijstūra malas garums ir 3a.

Ja trijstūri ir vienādi, tad to atbilstošie elementi ir vienādi, tātad arī to augstumi ir vienādi.

Lai pierādītu, ka iekrāsoto un neiekrāsoto trijstūru laukumu summas 38. zīmējumā ir vienādas, jāpierāda, ka to augstumu summas ir vienādas, jo malas visiem trijstūriem ir vienādas.

Tiešām jāpierāda, ka

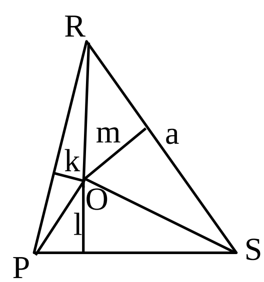
$$S_1+S_3+S_5=S_2+S_4+S_6$$

$$\frac{1}{2}ah1+\frac{1}{2}ah3+\frac{1}{2}ah5=\frac{1}{2}ah2+\frac{1}{2}ah4+\frac{1}{2}ah6$$

$$\frac{1}{2}a(h1+h3+h5)=\frac{1}{2}a(h2+h4+h6)$$

$$h_1+h_3+h_5=h_2+h_4+h_6$$

No 38. zīmējuma redzams, ka h_1, h_3, h_5 ir punkta O attālumu summa līdz ΔEFG malām, bet h_2, h_4, h_6 ir punkta O attālumi līdz ΔABC malām. Bet vienādmalu trijstūra iekšējā punkta attālumu līdz tā malām summa ir vienāda ar šī trijstūra augstumu. Pierādīsim to.



39. zīm.

Trijstūra PRS (skat. 39. zīmējumu) laukumu var izteikt kā trijstūru ΔROS, ΔSOP un ΔPOR laukumu summu: $\frac{1}{2}am+\frac{1}{2}al+\frac{1}{2}ak=\frac{1}{2}a(m+l+k)$. Taču tas ir tas pats, kas $\frac{1}{2}a\cdot h$, h – ΔPRS augstums. Tātad m+l+k=h.

Tātad arī ΔABC izpildās sakarība $h_2+h_4+h_6=h$ (h – ΔABC augstums) un ΔEGF izpildās sakarība $h_1+h_3+h_5=h$ (jo ΔABC un ΔEGF augstumi ir vienādi). Tātad sešstūra iekrāsoto un neiekrāsoto daļu laukumu summas ir vienādas.

13. Ar 3 dalās tie skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 3. Tātad mūsu uzdevums ir pierādīt, ka, starp 10 cipariem uz labu laimi izvēloties trīs ciparus, starp izvēlētajiem varēs atrast tādus, kuru summa dalās ar 3.

Ja ir izvilkta kartīte, uz kuras ir cipars 0, 3 vai 9, tad var izveidot viencipara skaitli, kas dalās ar 3.

Ja tāda cipara nav, tad starp izvilktajiem cipariem ir cipari, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1 vai 2.

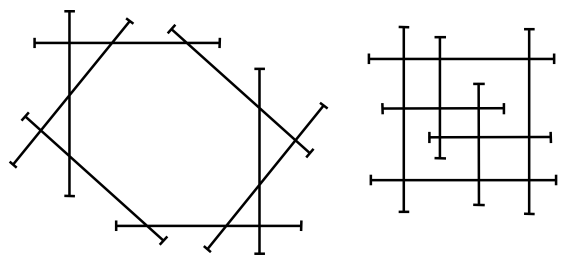
Ja ir divi cipari, no kuriem viens, dalot ar 3, dod atlikumu 1 (tādi ir 1; 4; 7) un otrs, dalot ar 3, dod atlikumu 2 (tādi ir 2;5;8), tad no tiem izveidotais skaitlis dalās ar 3, jo tādu divu ciparu summa dalās ar 3.

Ja nav arī tādu divu ciparu, tad visi trīs izvilktie cipari, dalot ar 3, dod vienādus atlikumus (t.i., 1 vai 2). tad no visiem trim cipariem izveidotais skaitlis dalās ar 3 (jo 1+4+7=12 dalās ar 3, tātad skaitlis, kas sastāv no cipariem 1, 4, 7 dalās ar3; tāpat 2+5+8=15 arī dalās ar3).

Tātad no trīs kartītēm var sastādīt skaitli, kas dalās ar 3.

14. Prasītos nogriežņus var uzzīmēt, piemēram, šādi (skat. 40. zīm.):

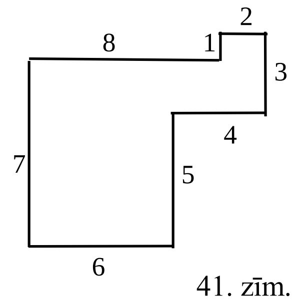
Iespējami arī citi varianti.



40. zīm.

15. Dalot skaitli 1111… ar 7, konstatējam, ka pilnīga izdalīšanās notiek tad un tikai tad, kad vieninieku skaits dalāmajā ir 6 daudzkārtnis. Tad dalāmais dalās ar 111 111, bet 111 111 dalās arī ar 37 un tas ir 111 111=111$\times$1001=3$\times$37$\times$1001.

16. Tā kā lauztās līnijas posmi pamīšus novietoti horizontāli un vertikāli, tad visi posmi ar garumu pāra skaitlis ies vienā virzienā (horizontāli vai vertikāli), tāpat posmi ar garumu nepāra skaitlis ies vienā virzienā (attiecīgi: vertikāli vai horizontāli). Tā kā jāizveido lauzta slēgta līnija, tas to posmu garumu summa, pa kuriem, apstaigājot slēgto lauzto līniju, ejam uz augšu, ir vienāda ar to posmu garumu summu, pa kuriem ejam uz leju. Līdzīgi posmi, pa kuriem ejam pa labi, summā dod tikpat, cik tie posmi, pa kuriem ejam pa kreisi. Un tas, savukārt, nozīmē, ka skaitļi 1, 3, 5, 7 un 2, 4, 6, 8 jāsadala tā, lai veidotos divas un divas vienādas summas. Un šīs summas sadalās vienā veidā: 1+7; 3+5 un 2+8; 4+6. Staigājot pa slēgto lauzto līniju, ja 1 un 7 ies uz augšu, tad 3 un 5 ies uz leju un ja 2 un 8 ies pa labi, tad 4 un 6 ies pa kreisi (skat. 41. zīm.). Tā kā skaitļiem bija jābūt augošā secībā, virzoties pa slēgto līniju, tad šāda līnija ir uzzīmējama tikai vienā veidā, protams, var mainīties līnijas novietojums par 90°, 180° un 270°.



41. zīm.

17. Svēršanas izdarīsim sekojoši:

I uz katra svaru kausa ņemam pa 2 monētām. Rezultātā var būt divas iespējas, no kurām ir atkarīgas tālākās svēršanas.

1) Svari ir līdzsvarā. Tas nozīmē, ka uz viena kausa ir monētas ar masu 1g un 4g, uz otra 3g un 2g, jo vienādība var realizēties tikai kā 1+4=3+2.

Ar **II** un **III** svēršanām nosakām smagāko monētu vienā un otrā kausā. Tās ir 4g un 3g.

Ar **IV** svēršanu salīdzinām abas smagākās monētas un nosakām katras masu – smagākā 4g, vieglākā 3g. Tā kā zināmas šo divu monētu masas, atceroties I svēršanas rezultātu, nosakām abu pārējo monētu masu. Tā, kas bija uz viena svaru kausa ar 4g monētu, sver 1g, bet otra monēta – 2g.

2) Viens no svaru kausiem I svēršanā ir smagāks. Tas ir iespējams tikai gadījumā, kad kopā ir 4g un 2g > 3g un 1g vai 4g un 3g > 2g un 1g. Redzams, ka "smagākajā" kausā noteikti ir 4g monēta, bet "vieglākajā" kausā noteikti ir 1g monēta. Tātad ar **II** svēršanu, sverot abas monētas no "smagākā" kausa, atrodam 4g monētu (tā ir smagākā).

III svēršanā, sverot abas monētas no "vieglākā" kausa, vieglākā monēta būs 1g smaga. Ar IV svēršanu salīdzinām abas vēl nezināmās monētas. Tad smagākā ir 3g, vieglākā – 2g.

18. Pieņemsim, ka nav tādu 2 klašu, kurās sakrīt zilacaino, brūnacaino vai pelēkacaino skolēnu skaits. Tas nozīmē, ka katrā klasē ir dažāds zilacaino skolēnu skaits. Tad pavisam zilacaino skolēnu ir vismaz 0+1+2+…+19=190 skolēni. (Ja pavisam ir 20 klases un katrā ir dažāds zilacaino skolēnu skaits, tad vismazākais zilacaino skaits būs, ja kādā klasē nebūs neviena zilacainā, kādā citā būs 1 skolēns ar zilām acīm utt. 20-ajā klasē būs 19 zilacainie.) Tā kā arī brūnacaino un pelēkacaino skolēnu skaits nekādās divās klasēs nav vienāds, tad brūnacaini arī ir vismaz 190 skolēni un vismaz 190 skolēni ir ar pelēkām acīm. Tas nozīmē, ka pavisam kopā jābūt vismaz 190·3=570 skolēniem, bet ir tikai 20·20=400 skolēni. Ir iegūta pretruna, tātad pieņēmums, ka katrā klasē ir atšķirīgs zilacaino, brūnacaino un pelēkacaino skolēnu skaits, ir aplams. No tā var secināt, ka ir vismaz 2 klases, kurās sakrīt zilacaino, brūnacaino vai pelēkacaino skolēnu skaits.

19. No cipariem 1; 3; 4; 7 nevar izvēlēties tādus, kuru summa dalītos ar 9, tātad ar 4 kartīšu izvilkšanu var nepietikt. Pieņemsim, ka izvelkam piecas kartītes.

Ja starp tām ir cipars 0 vai 9, varam veidot viencipara skaitli, kas dalās ar 9.

Ja starp izvilktajiem cipariem 0 un 9 nav, tad visi 5 izvilktie cipari sadalās starp 4 grupām (1;8), (2;7), (3;6), (4;5); divi no tiem noteikti ir no vienas grupas. To veidotais divciparu skaitlis dalās ar 9. Tātad uzdevuma atbilde ir 5.

20. Nē. Ja taisne t krusto tieši trīs citas, tad tā nekrusto pārējas 4. Bet taisne nekrusto citu taisni, ja tā paralēla tai un tātad šī taisne t ir paralēla 4 citām taisnēm. Attiecīgi tad katra taisne, kas krusto taisni t, krusto arī taisnes t 4 paralēlās taisnes un kopā sanāk, ka krusto piecas nevis trīs taisnes.

21. Piemēram, $3162277660^2=9999999998935075600$.

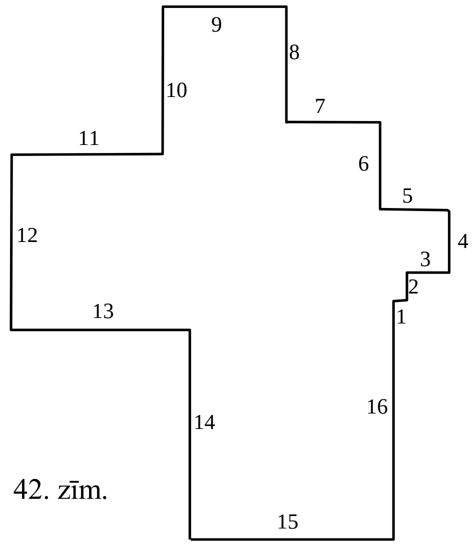
22. Tā kā ir jāuzzīmē slēgta lauzta līnija, tad horizontālo posmu skaitam ir jābūt vienādam ar vertikālo posmu skaitu. Tātad n nevar būt nepāra skaitlis. Tātad, ja n ir 9, šādu līniju uzzīmēt nevar.

Ja n ir 10, tad horizontāli (vertikāli) ir novietoti posmi ar garumiem 1; 3; 5; 7; 9. Bet to summai jābūt pāra skaitlim, jo ir jāuzzīmē slēgta lauzta līnija: veicot pa to slēgtu maršrutu, pa kreisi (uz augšu) pabīdāmies tikpat, cik pabīdāmies pa labi (uz leju). Bet $1+3+5+7+9=25$ – nepāra skaitlis. Tātad, ja n ir 10, šādu līniju uzzīmēt nevar.

Līdzīgi spriežot, iegūstam, ka nevar uzzīmēt līniju ar 12 posmiem. Vienā virzienā ejošie posmi ar garumiem 2, 4, 6, 8, 10, 12 summā dod $2+4+6+8+10+12=42$. Tātad uz leju (pa labi) un uz augšu (pa kreisi) ejošo posmu garumu summai jābūt $42:2=21$. Bet tā kā šo posmu garumi ir pāra skaitļi, tad tie summā nedos nepāra skaitli. Tātad, ja n=12, prasīto lauzto līniju uzzīmēt nevar.

Ja n ir 16, tad nepāra skaitļu summa ir $1+3+5+7+9+11+13+15=64$, tātad uz augšu ejošo posmu garumu summa varētu būt vienāda ar uz leju ejošo posmu garumu summu un būt $64:2=32$ vienības. Tas ir realizējams, piemēram, $1+3+13+15=5+7+9+11$. Pāra skaitļu summa ir $2+4+6+8+10+12+14+16=72$, tātad pa labi un pa kreisi ejošo posmu garumu summai jābūt $72:2=36$. Tas ir realizējams, piemēram, $2+4+14+16=6+8+10+12$.

Šī lauztā līnija ir viens no iespējamiem atrisinājumiem gadījumam, kad n=16 (skat. 42. zīm.).



42. zīm.

23. Uz katru seansu aizgāja tieši 3 draugi, tātad katram draugam bija 2 partneri, pie tam uz katru seansu tie bija citi. Tā kā katram draugam vispār iespējami tikai 7 dažādi partneri, tad katrs draugs ir bijis ne vairāk kā 3 seansos. (Ja viņš būtu bijis 4 seansos, tad tam līdzi būtu bijuši kopā 2·4=8 partneri, bet 8>7, tātad tā būt nevar.)

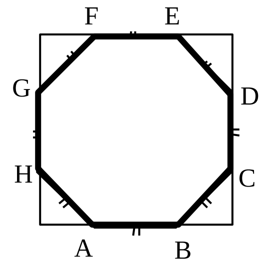
Pavisam kopā ir 8 draugi un katrs no tiem ir bijis ne vairāk kā 3 seansos, tātad kopējais kino apmeklējumu skaits nepārsniedz 8·3=24. Bet, tā kā uz katru seansu ieradās tieši 3 draugi, tad katram seansam atbilst tieši 3 kino apmeklējumi, tātad kopējais seansu skaits nepārsniedz 24:3=8 seansus.

Ka 8 seansi ir iespējami, var redzēt no piemēra, kur ar burtiem apzīmēti draugi un buru trijnieks norāda, kādi 3 draugi bijuši vienā seansā: ABC, ADE, AFG, HCD, HBF, HEG, CEF, BDG.

24. Tā kā kvadrāts bija sagriezts 6 daļās, kas visas bija izliektas figūras, tad divām figūrām griezumā var būt ne vairāk kā viena kopīga mala. Tā kā astoņstūrim ir 8 malas un viena no iegūtajām 6 figūrām ir pats astoņstūris, tad tam var būt kopīga mala vai malas nogrieznis ar ne vairāk kā 5 citām figūrām. Bet tas nozīmē, ka vismaz 3 astoņstūra malas atrodas uz kvadrāta malām. Bet tas var būt tikai vienā vienīgā veidā (skat. 43. zīmējumu), jo astoņstūris ir regulārs, tas nozīmē, ka attālums no malas AB līdz malai FG ir vienāds ar attālumu no GH līdz CD un ir vienāds ar sagrieztā kvadrāta malas garumu.

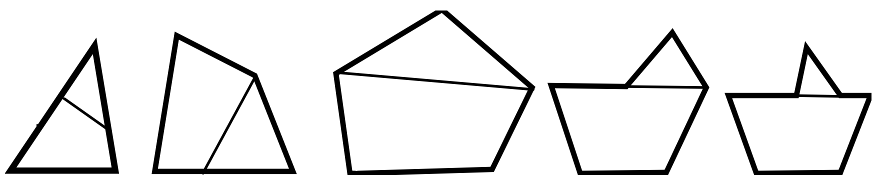
Tātad sagriezto kvadrātu var restaurēt, ja rīcībā ir šis astoņstūris.

Tā kā teikts, ka kvadrātu sagrieza 6 daļās, bet zīmējumā ir parādītas tikai 5 daļas, tad kāds no mazajiem trijstūriem ir ticis sagriezts sīkāk. Kā tieši tas ir izdarīts, šajā uzdevumā nav svarīgi.



43. zīm.

25. Sākotnējā daudzstūra katra virsotne kļūst par vismaz vienas iegūstamās daļas (trijstūra vai četrstūra) virsotni. Tātad sākotnējam daudzstūrim nav vairāk nekā 3+4=7 virsotnes. Tātad sākotnējam daudzstūrim varēja būt 3, 4, 5, 6 vai 7 malas. (skat. attiecīgos piemērus 44. zīm.)


44.zīm.

26. Vispirms apskatīsim, cik naturālu skaitļu ar tieši 3 vienādiem cipariem ir intervālā no 1995 līdz 9999.

No 1995 līdz 1999 ir tikai viens tāds skaitlis ir 1999.

No 2000 līdz 2999 ir 9 tādi skaitļi, kuriem ir vienādi 3 pēdējie cipari (piemēram, 2000, 2111, 2333, …, 2999) un vēl tādi skaitļi, kuros ir trīs "2" un ceturtais cipars ir kāds no atlikušajiem 9 cipariem (tas nav 2); tas var atrasties jebkurā no 3 trīs atlikušajām vietām (jo pirmajā vietā jau ir 2). Tātad kopā šajā intervālā ir 9+3·9=4·9 meklējamie skaitļi.

Līdzīgi var izsecināt, ka starp skaitļiem no 3000 līdz 3999 arī ir 4·9 meklējamie skaitļi, no 4000 līdz 4999 līdzīgi spriežot arī ir 4·9 "vajadzīgie" skaitļi utt. Tātad pavisam starp skaitļiem no 2000 līdz 9999 ir 4·9·8 meklējamie skaitļi (jāreizina ar 8, jo pirmais cipars ir viens no cipariem 2, 3, …, 9 un katram no šiem 8 cipariem var atrast 9·4 meklējamos skaitļus).

Tālāk aplūkosim visus piecciparu skaitļus no 10000 līdz 99999. Tagad šķirosim gadījumus 1) kad pirmais cipars nav no trīs vienādajiem, un 2) kad pirmais cipars ir viens no trijiem vienādajiem.

1) Pirmais cipars var būt jebkurš no 9 cipariem (nevar būt 0); jebkurš no 9 cipariem var būt "vienādais" cipars (tas nevar būt tāds kā pirmais cipars, jo tad jau būs 4 vienādi cipari, bet tādi skaitļi neder); tāpat jebkurš no 9 cipariem var būt otrais nevienādais" cipars (tas nevar būt vienāds ar "vienādajiem" cipariem). Bet vienai ciparu izvēlei atbilst četri dažādi skaitļi, piemēram, 12223, 12232, 12322, 13222. (Par ciparu izvēli sauksim ciparu trijnieku, kur 1. cipars ir skaitļa pirmais cipars, 2. cipars ir "vienādais" cipars, 3. cipars ir atlikušais "nevienādais" cipars. "Vienādais cipars ir tas, kurš veido vienādo ciparu trijnieku.)

Tātad 1) gadījumā ir $9\cdot9\cdot9\cdot4$ meklētie skaitļi.

2) gadījumā skaitļa pirmais cipars ir arī "vienādais" cipars. Tas var būt jebkurš no 9 cipariem (nevar būt 0). "Nevienādie" cipari katrs var būt jebkurš no 9 cipariem (nav "vienādais" cipars). Par ciparu izvēli sauksim skaitļu trijnieku, kurā 1. cipars ir "vienādais", 2. cipars ir "nevienādais" cipars, kas atrodas tuvāk skaitļa sākumam, 3. cipars izvēlē ir skaitļa atlikušais "nevienādais" cipars. Tā, piemēram, ciparu izvēlei (1, 2, 3) atbilst skaitļi 12311, 12131, 12113, 11231, 11123, 11213 – kopā 6 dažādi skaitļi (arī ja "nevienādie" cipari ir vienādi, piemēram (1, 2, 2): 12211, 12121, 12112, 11221, 11122, 11212). Tad 2) gadījumā pavisam ir $9\cdot9\cdot9\cdot6$ meklējamie skaitļi, un pavisam no 1995 līdz 100000 skaitļu ar tieši 3 vienādiem cipariem ir $1+8+4\cdot9+9\cdot9\cdot9\cdot4+9\cdot9\cdot9\cdot6=1+288+7290=7579$.

27. Šim piemēram atrisinājuma nav, jo nav iespējams izvēlēties S un I vērtības. Pārbaudām visus iespējamos variantus.

Ja S=0, tad S+S=0+0=0=I, bet S nevar būt vienāds ar I, tātad S≠0.

Jebkurā gadījumā jāizpildās $\begin{cases} S+S=I \\ I+I=10+S \end{cases}$ vai $\begin{cases} S+S=I+10 \\ I+I+1=S \end{cases}$.

Ja S=1, tad S+S=1+1=2=I, bet I+I=4≠S, tātad S≠1.

Ja S=2, tad S+S=4=I, bet I+I=8≠S, tātad S≠2.

Ja S=3, tad S+S=6=I, bet I+I=12≠10+S, tātad S≠3.

Ja S=4, tad S+S=8=I, bet I+I=16≠10+S, tātad S≠4.

Ja S=5, tad S+S=10=10+I, I=0, 1+I+I=1≠S, tātad S≠5.

Ja S=6, tad S+S=12=10+2, I=2, 1+I+I=5≠S, tātad S≠6.

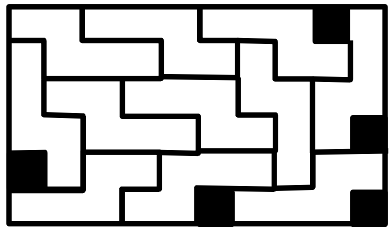
Ja S=7, tad S+S=14=10+4, I=4, 1+I+I=9≠S, tātad S≠7.

Ja S=8, tad S+S=16=10+6, I=6, 1+I+I=10+3≠10+S, tātad S≠8.

Ja S=9, tad S+S=18=10+I, I=8, 1+I+I=10+7≠10+S, tātad S≠9.

Ir redzams, ka S vietā nevar ievietot nekādu ciparu, tā, lai izpildītos prasītā nevienādība TRĪS+TRĪS=SEŠI.

28. Dotā taisnstūra laukums ir $6\cdot10=60$ rūtiņas, bet figūras laukums ir 5 rūtiņas, tātad var ievietot ne vairāk kā 60:5=12 figūras. Mēģinot to izdarīt un sākot no taisnstūra stūra, redzams, ka dažas rūtiņas paliek tukšas. Tātad nevar ievietot vairāk par 11 figūrām. Kā ievietot 11 figūras redzams 45. zīm.



45. zīm.

29. a) Var ņemt, piemēram, skaitļus 1; 2; 3; 6; 12; 24.

b) Pieņemsim, ka jau atrasta dažādu skaitļu sistēma $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ar īpašību: katru $n-1$ skaitļu summa nedalās ar atlikušo, n-to skaitli.

Pievienosim šai sistēmai visu tās skaitļu summu $S=x_1+x_2+\ldots+x_n$ un pierādīsim, ka jaunā sistēma, apmierina nosacījumu: katru n skaitļu summa dalās ar atlikušo, (n+1)-o skaitli.

b1) Skaidrs, ka $x_1+x_2+\ldots+x_n$ dalās ar S, jo $x_1+x_2+\ldots+x_n=S$.

b2) Izvēlēsimies vienu no skaitļiem $x_1, x_2, \ldots, x_n$; sauksim to par zilu, bet pārējos skaitļus, izņemot S, par sarkaniem.

Sarkano skaitļu summa dalās ar zilo skaitli (saskaņā ar to, kas zināms par n skaitļu sistēmu $x_1, x_2, \ldots, x_n$); tā kā S vienāds ar sarkano skaitļu summas un zilā skaitļa summu, tad arī S dalās ar zilo skaitli. Tāpēc visu jauniegūtās skaitļu sistēmas summa (izņemot zilo skaitli), kas vienāda ar visu sarkano skaitļu un S summu, dalās ar zilo skaitli.

Tātad mēs varam sākotnēji 6 skaitļu sistēmai pievienot cik patīk daudz jaunu skaitļu tā, lai vajadzīgā īpašība saglabātos. Tātad mēs varam iegūt arī sistēmu, kas sastāv no 1995 skaitļiem.

30. Ja ar $b_1, b_2, \ldots, b_n$ apzīmēsim attiecīgi 1., 2., …, n-tā spēlētāja uzvaru skaitu ar baltajām figūrām, ar $m_1, m_2, \ldots, m_n$ – attiecīgi 1., 2., …, n-tā šahista uzvaru skaitu ar melnajām figūrām, bet ar M – uzvaru skaitu, kas turnīrā vispār tika gūts, spēlējot ar melnajām figūrām (visiem dalībniekiem kopā), tad pēc uzdevuma nosacījumiem var uzrakstīt sakarības $b_i=M-m_i$, kur i ir jebkurš skaitlis no 1 līdz n. No tām seko, ka

$$b_i+m_i=M \quad (*)$$

Tā kā b_i+m_i ir tā i-tā šahista kopējais uzvaru skaits, bet M ir kopējais uzvaru skaits ar melnajām figūrām (tas šajā turnīrā ir fiksēts skaitlis) un sakarība (*) ir spēkā visiem šahistiem (pirmajam, otrajam, …, n-tajam), tad katra spēlētāja uzvaru skaits ir M, tātad visi ir izcīnījuši vienādu uzvaru skaitu.

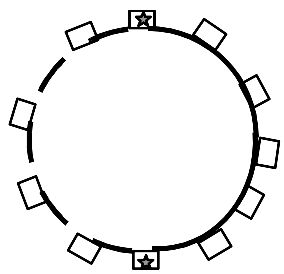
31. Skaitlis $47\cdot53\cdot59\cdot65+49\cdot55\cdot61\cdot67$ nedalās ar 3. Apskatām atlikumus, ko dod katrs no saskaitāmajiem, dalot ar 3, un ievērojam, ka, naturālu skaitļu reizinājumu dalot ar n, iegūst tādu pašu atlikumu, kādu dalot ar n, dod šo skaitļu atlikumu reizinājums. Tātad $47\cdot53\cdot59\cdot65$, dalot ar 3 dod tādu pašu atlikumu kā skaitlis $2\cdot2\cdot2\cdot2=16$, jo $47=15\cdot3+2$, $53=17\cdot3+2$, $59=19\cdot3+2$, $65=21\cdot3+2$, tātad atlikumu 1. Skaitļa $49\cdot55\cdot61\cdot67$ atlikums, dalot ar 3, ir $1\cdot1\cdot1\cdot1=1$

(jo 49=16.3+1, 55=18·3+1, 61=20·3+1, 67=22·3+1). Tad summas atlikums, dalot ar 3, ir 1+1=2, tātad skaitlis 47·53·59·65+49·55·61·67 ar 3 nedalās.

32. Pieņemsim, ka Karlsons pirmajos piecos mēnešos iztērēja A naudas, pēdējos septiņos mēnešos – B, bet maijā – M. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka A<5M un B>7M (*).

Mums jāpierāda, ka $\frac{A}{5} < \frac{A+B}{12}$ jeb, pēc pārveidojumiem, ka 7A<5B. Bet tas seko no (*).

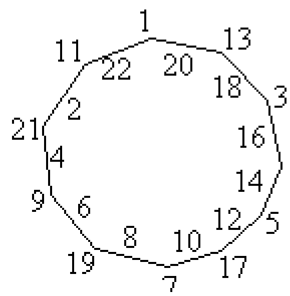
33. Tā kā pavisam ir ieradušies 11 rūķīši, bet 11<4·3, tad no kādas cilts ir ieradušies ne vairāk kā divi rūķīši. Tātad, nosēdinot šos divus rūķīšus pie galda, atliek vēl vismaz 9 rūķīši no citām ciltīm un pie galda vēl paliek 9 vietas citiem rūķīšiem. Ja uz vienu pusi starp aplūkojamās cilts rūķīšiem būtu k vietas citiem rūķīšiem, (lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, tad k≤4), tad uz otru pusi paliek 9–k vietas. Bet , ja k≤4, tad 9–k≥5, tad var izvēlēties šos piecus pēc kārtas sēdošos rūķīšus, kas nav no minētās cilts. Tādējādi minētajā veidā rūķīšiem neizdosies pierādīt savas draudzīgās attiecības.



46. zīm.

34. Tā kā ir 11 nogriežņi, tad visu nogriežņu numuru summas saskaitot, iegūstam, ka 11s=(1+2+…+22)+S jeb 11s=23·11+S (s – nogriežņa virsotņu un viduspunkta numuru summa, S – visu virsotnēs ierakstīto skaitļu summa, jo saskaitot katra nogriežņa galapunktu un viduspunktu numuru summu, katrs galapunkts tiek skaitīts divas reizes). Tā kā 11s un 23·11 dalās ar 11, tad arī S ir jādalās ar 11. Ja virsotnes sanumurēsim ar nepāra skaitļiem, tad katra nogriežņa virsotņu un viduspunktu numuru summai jābūt $s=23+\frac{S}{11}=23+\frac{22\cdot 11}{2\cdot 11}=34$.

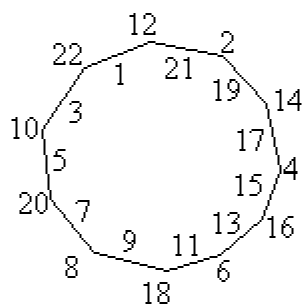
Numerāciju veiksim sekojoši: malu viduspunktus numurē pēc kārtas ar pāra skaitļiem to pieaugšanas secībā pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam, bet virsotnes numurē ar nepāra skaitļiem to pieaugšanas secībā pulksteņa rādītāja kustības virzienā, tikai nevis pēc kārtas, bet gan katru otro līdz visas virsotnes ir sanumurētas. Līdz ar to iegūst, ka katra nākošā nogriežņa galapunktu summa ir par 2 mazāka nekā iepriekšējam, bet viduspunkta numurs ir par 2 lielāks nekā iepriekšējam, līdz ar to summas ir vienādas. Numuru 1 dod virsotnei, kas ir kopīga nogriežņiem, kuru viduspunkti ir sanumurēti ar 20 un 22 (skat. 47. zīm.).



47. zīm.

Līdzīgi var sanumurēt, ja virsotnēm izvēlas pāra skaitļus, bet nepāra skaitļus raksta viduspunktos. (Atrisinājums šim gadījumam parādīts 48. zīm.)

Bez norādītajiem atrisinājumiem eksistē vēl arī citi.



48. zīm.

35. Meklējamos skaitļus apzīmēsim ar burtiem a, b, c un d, pie tam pieņemsim, ka $a<b<c<d$. Tā kā $a<d$, $b<d$ un $c<d$, tad $a+b+c<3d$. Bet, tā kā $a+b+c$ dalās ar d, tad vai nu $a+b+c=d$ (I gadījums) vai $a+b+c=2d$ (II gadījums).

Vispirms analizēsim I gadījumu.

$0<a+b<2c$, $c<d<3c$ (jo $d=a+b+c$, bet $a+b<2c$), tad $c<a+b+d<5c$. Tā kā $a+b+d$ dalās ar c, tad 1) $a+b+d=2c$; 2) $a+b+d=3c$; 3) $a+b+s=4c$.

1) $a+b+d=2c$, tad $a+b+(a+b+c)=2(a+b)+c=2c$. No tā seko, ka $2(a+b)=c$, $d=\frac{c}{2}+c=\frac{3}{2}c$. $c+d=c+\frac{3}{2}c=\frac{5}{2}c=\frac{5}{2}2(a+b)=5(a+b)$, $5b<c+d<10b$ (jo $b<a+b<2b$) un $0<a<b$ un $5b<a+c+d<11b$. Tā kā $a+c+d$ dalās ar b, tad iespējami vēl 5 varianti, kad 1.1) $a+c+d=6b$; 1.2) $a+c+d=7b$; 1.3.) $a+c+d=8b$; 1.4) $a+c+d=9b$; 1.5) $a+c+d=10b$.

$$1.1)\ \begin{cases} a+b+c=d \\ a+b+d=2c \\ a+c+d=6b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=a+b+c=3(a+b) \\ c=2(a+b) \\ 6b=a+2(a+b)+3(a+b)=6a+5b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=6a \\ c=14a \\ d=21a \end{cases}$$

Esam ieguvuši vienu skaitļu sistēmu, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Skaitļu attiecības šajā gadījumā ir 1:6:14:21.

$$1.2)\ \begin{cases} a+b+c=d \\ a+b+d=2c \\ a+c+d=7b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=3(a+b) \\ c=2(a+b) \\ 7b=6a+5b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=3a \\ c=8a \\ d=12a \end{cases}$$

Otra meklējamo skaitļu attiecība ir 1:3:8:12.

$$1.3)\ \begin{cases} a+b+c=d \\ a+b+d=2c \\ a+c+d=8b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=3(a+b) \\ c=2(a+b) \\ 8b=6a+5b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2a \\ c=6a \\ d=9a \end{cases}$$

a:b:c:d=1:2:6:9

$$1.4)\ \begin{cases} a+b+c=d \\ a+b+d=2c \\ a+c+d=9b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=3(a+b) \\ c=2(a+b) \\ 9b=6a+5b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{3}{2}a \\ c=5a \\ d=\frac{15}{2}a \end{cases}$$

a:b:c:d=2:3:10:15

$$1.5)\ \begin{cases} a+b+c=d \\ a+b+d=2c \\ a+c+d=10b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=3(a+b) \\ c=2(a+b) \\ 10b=6a+5b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{6}{5}a \\ c=\frac{22}{5}a \\ d=\frac{33}{5}a \end{cases}$$

bet b+c+d=$\frac{6}{5}a+\frac{22}{5}a+\frac{33}{5}a=\frac{61}{5}a$, t.i., b+c+d nedalās bez atlikuma ar a, tātad šī skaitļu attiecība nav uzdevuma atrisinājums.

2) $\begin{cases} a+b+c=d \\ a+b+d=3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a+b)=2c \\ 2c=d \end{cases}$. Tā kā 0<a<b un c+d=3c un 3b<3c=3(a+b)<6a, un 3b<a+c+d<7b, pie tam a+c+d dalās ar b, tad 2.1) a+c+d=4b; 2.2) a+c+d=5b; 2.3) a+c+d=6b.

$$2.1)\ \begin{cases} a+b+c=d \\ a+b+d=3c \\ a+c+d=4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=2(a+b) \\ c=a+b \\ 4b=4a+3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=4a \\ c=5a \\ d=10a \end{cases}$$

a:b:c:d=1:4:5:10

2.2) $\begin{cases} a+b+c=d \\ a+b+d=3c \\ a+c+d=5b \end{cases}$ => $\begin{cases} d=2(a+b) \\ c=a+b \\ 5b=4a+3b \end{cases}$ => $\begin{cases} b=2a \\ c=3a \\ d=6a \end{cases}$

a:b:c:d=1:2:3:6

2.3) $\begin{cases} a+b+c=d \\ a+b+d=3c \\ a+c+d=6b \end{cases}$ => $\begin{cases} d=2(a+b) \\ c=a+b \\ 6b=4a+3b \end{cases}$ => $\begin{cases} b=\frac{4}{3}a \\ c=\frac{7}{3}a \\ d=\frac{14}{3}a \end{cases}$ => b+c+d=$\frac{25}{3}$a (tātad b+c+d nedalās ar a bez atlikuma, un šie skaitļi neder par uzdevuma atrisinājumu).

3) $\begin{cases} a+b+c=d \\ a+b+d=4c \end{cases}$ => $\begin{cases} 2(a+b)=3c \\ d=\frac{5}{3}(a+b) \end{cases}$ => 3(c+d)=7(a+b), 7b<3(c+d)<14b, 3b≤c+d≤4b, 3b<a+c+d<5b. No tā seko, ka a+c+d=4b a+$\frac{7}{3}$(a+b)=4b; $\frac{10}{3}$a=$\frac{5}{3}$b; b=2a, c=2a, bet tā nevar būt, jo b<c.

II gadījums.

a+b+c=2d. 0<a+b<2c, c<d<$\frac{3}{2}$c (jo d=$\frac{a+b+c}{2}$<$\frac{3}{2}$c) c<a+b+d≤3c. Arī šajā piemērā iespējami divi gadījumi 1)a+b+d=2c vai 2) a+b+d=3c.

1) Ja a+b+d=2c, tad a+d+c=a+b+$\frac{1}{2}$(a+b+c)=2c jeb $\frac{3}{2}$(a+b)= $\frac{3}{2}$c => a+b=c un d=2(a+b–(a+b)=a+b, bet c<d, tātad a+b+d≠2c.

2) $\begin{cases} a+b+c=2d \\ a+b+d=3c \end{cases}$ => a+b+$\frac{1}{2}$(a+b+c)=3c; $\frac{3}{2}$(a+b)=$\frac{5}{2}$c jeb 3(a+b)=5c. a+b+c=a+b+$\frac{3}{5}$(a+b)= $\frac{8}{5}$(a+b)=2d. Tad d=$\frac{4}{5}$(a+b), c+d=$\frac{3}{5}$(a+b)+$\frac{4}{5}$(a+b)=$\frac{7}{5}$(a+b), 7b<5(c+d)=7(a+b)<14b, $\frac{7}{5}$b<c+d<$\frac{14}{5}$b, 2b≤a+c+d≤3b. Līdzīgi kā iepriekš spriežot, iegūst 2.1) a+c+d=2b vai 2.2) a+c+d=3b.

2.1) $\begin{cases} a+b+c=2d \\ a+b+d=3c \\ a+c+d=2b \end{cases}$ => $\begin{cases} a+b+c=2d \\ a+b+d=3c \\ b-d=2d-2b \end{cases}$ => b=d, bet tā nevar būt, jo b<d.

2.2) $\begin{cases} a+b+c=2d \\ a+b+d=3c \\ a+c+d=3b \end{cases}$ => $\begin{cases} a+b+c=2d \\ a+b+d=3c \\ b-c=3c-3b \end{cases}$ => b=c, bet tā nevar būt, jo b<c.

Ir aplūkoti visi iespējamie varianti un atrastas visas iespējamās to četru skaitļu attiecības, kuriem ir izpildās uzdevumā prasītā īpašība. Tās ir 1:6:14:21; 1:3:8:12; 2:3:10:15; 1:2:3:6.

Bez atrastajām citu iespēju nav, jo tika aizanalizēti visi iespējamie gadījumi.

36. Jā, to izdarīt var. Sākumā lielo kubu sagriezīsim 27 vienādos kubos. (Tas ir izdarāms, ja kuba šķautnes sadala 3 vienādās daļās un griezumi iet caur dalījuma punktiem.)

Tālāk ir jāievēro, ka, kādu kubu sagriežot n mazākos kubos, kubu kopējais skaits palielinās par n–1, jo viens kubs (tas, kuru sagrieza) tiek aizstāts ar n jauniem kubiem.

No iegūtajiem 27 kubiem trīs kubus sagriežam 8 vienādos kubiņos katru, tātad tagad iegūti jau 27+3·(8–1)=27+21=48 kubi. Lai iegūtu 100 kubus vēl ir "jāiegūst" 100–48=52 kubi. Bet 52=2·26 jeb 52 = 2·(27–1) Tātad divus no iegūtajiem kubiem varam sagriezt 27 kubiņos katru. Tā mēs esam ieguvuši 27+3·7+2·26=100 kubus, kas arī bija prasīts.

37. Sistemātisks skaitļu iegūšanas veids balstās uz atkārtotu kvadrātsaknes lietošanu un tai sekojošu veselās daļas izmantošanu.

Veselā daļa no divkāršas kvadrātsaknes no 9 un 6 ir 1, t.i., $\left[\sqrt{\sqrt{9}}\right]=1$ un $\left[\sqrt{\sqrt{6}}\right]=1$.

Izmantojot ciparus 1, 9, 9, 6 tieši šādā secībā izsakām naturālos skaitļus sākot ar 1:

$$1\cdot\left[\sqrt{\sqrt{9}}\right]\cdot\left[\sqrt{\sqrt{9}}\right]\cdot\left[\sqrt{\sqrt{6}}\right]=1$$

$$1+\left[\sqrt{\sqrt{9}}\right]\cdot\left[\sqrt{\sqrt{9}}\right]\cdot\left[\sqrt{\sqrt{6}}\right]=2$$

$$1+\left[\sqrt{\sqrt{9}}\right]+\left[\sqrt{\sqrt{9}}\right]\cdot\left[\sqrt{\sqrt{6}}\right]=3$$

$$1+\left[\sqrt{\sqrt{9}}\right]+\left[\sqrt{\sqrt{9}}\right]+\left[\sqrt{\sqrt{6}}\right]=4$$

$$1+\sqrt{9}+\left[\sqrt{\sqrt{9}}\right]\cdot\left[\sqrt{\sqrt{6}}\right]=5$$

$$1\cdot\sqrt{9}+\sqrt{9}\cdot\left[\sqrt{\sqrt{6}}\right]=6$$

$$1+\sqrt{9}+\sqrt{9}\cdot\left[\sqrt{\sqrt{6}}\right]=7$$

$$1+\sqrt{9}+\sqrt{9}+\left[\sqrt{\sqrt{6}}\right]=8$$

$$1\cdot 9\cdot\left[\sqrt{\sqrt{9}}\right]\cdot\left[\sqrt{\sqrt{6}}\right]=9$$

$$1+9\cdot\left[\sqrt{\sqrt{9}}\right]\cdot\left[\sqrt{\sqrt{6}}\right]=10$$

...

Profesors Cipariņš ir pārliecināts, ka varēs iegūt **visus** naturālos skaitļus, bet pierādīt to neprot. Varbūt jūs varat viņam palīdzēt?

Protams, iespējams lietot arī citas skaitļu izsacīšanas metodes.

38. Sauksim grupu, kur ievietots skaitlis 1, par pirmo, bet grupu, kur ievietots skaitlis 2, par otro. (Tās noteikti ir dažādas, jo neviena grupa nevar saturēt skaitļus, kas viens no otra atšķiras par 1.) Vēl ir trešā grupa, kas pagaidām ir tukša. Tālāk sākas izvēle: skaitli 3 var ievietot vai nu pirmajā grupā, vai trešajā grupā. Lai kur būtu ievietots skaitlis 3, skaitļa 4 ievietošanai atkal ir divas iespējas – citā grupā nekā skaitlis 3 (ja skaitlis 3 ir ievietots pirmajā grupā, tad skaitli 4 var ievietot vai nu otrajā, vai trešajā grupā, bet, ja skaitlis 3 ir ievietots otrajā grupā, tad skaitli 4 var ievietot vai nu pirmajā, vai trešajā grupā). Līdzīgā veidā divas izvēles ir skaitļa 5 un skaitļa 6 ievietošanai.

Tātad pavisam iespējami 2·2·2·2 = 16 sadalījumi tā, lai blakus skaitļi neatrastos vienā grupā (pa divām izvēlēm katram no skaitļiem 3, 4, 5 un 6, skaitļiem 1 un 2 nebija izvēles). Tie redzami sekojošā tabulā:

Nr.	***1.grupa***	***2.grupa***	***3.grupa***
1.	1	2: 4: 6	3: 5
2.	1: 3	2: 4: 6	5
3.	1: 3	2: 5	4: 6
4.	1: 4	2: 5	3: 6
5.	1: 4	2: 6	3: 5
6.	1: 5	2: 4	3: 6
7.	1: 5	2: 4: 6	3
8.	1: 6	2: 4	3: 5
9.	1: 3: 5	2: 4	6
10.	1: 3: 5	2: 6	4
11.	1: 3: 5	2	4: 6
12.	1: 3: 6	2: 4	5
13.	1: 3: 6	2: 5	4
14.	1: 4: 6	2	3: 5
15.	1: 4: 6	2: 5	3
16.	1: 3: 5	2: 4: 6	-

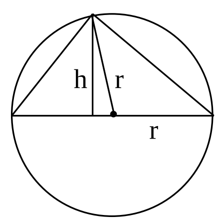
No visiem šiem sadalījumiem neder viens – sadalījums, kurā skaitļi 1, 3, 5 ir vienā grupā un skaitļi 2, 4, 6 – otrā grupā, bet trešā grupa paliek tukša, jo uzdevuma nosacījumos ir teikts, ka katrā grupā ir vismaz viens skaitlis. Tātad kopā iespējami 15 sadalījumi, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem.

39. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka A ciparu summa dalās ar n, (n=2; 3; …; 9). Tiešām, ja $S_n(A)$ ir to A ciparu summa , kas dalās ar n, $S^-_n(A)$ - to ciparu summa, kas nedalās ar n, bet S(A) ir skaitļa A visu ciparu summa, tad $S(A)= S_n(A)+ S^-_n(A)$. Tā kā $S^-_n(A)$ dalās ar n pēc dotā, bet $S_n(A)$ dalās ar n pēc $S_n(A)$ definīcijas (summa dalās ar n, ja katrs summas saskaitāmais dalās ar n), tad S(A) dalās ar n, jo vienādības labajā pusē abi saskaitāmie dalās ar n.

Tā kā n=2, 3, …, 9, tad S(A) dalās gan ar 2, gan ar 3, …, gan ar 9. Skaitļu 2, 3, …, 9 mazākais kopīgais dalītājs ir $9\cdot8\cdot7\cdot5=2520$. Tātad S(A) dalās ar 2520, t.i., skaitļa A ciparu summai jādalās ar 2520.

Viegli pārbaudīt, ka skaitlis A var būt , piemēram, $\underbrace{11...1}_{2520}$, $\underbrace{22...2}_{1260}$, $\underbrace{99...9}_{280}$ utt.

40. Mēģināsim iezīmēt doto trijstūri riņķa līnijā. Kā zināms, taisnleņķa trijstūra hipotenūza ir riņķa līnijas diametrs un riņķa līnijas centrs atrodas hipotenūzas viduspunktā. Tā kā hipotenūza ir 10 cm, tad riņķa līnijas rādiuss ir 5 cm. Zinām arī to, ka visas trijstūra virsotnes atrodas uz apvilktās riņķa līnijas.



49. zīm.

Bet pēc 49. zīm. ir skaidri redzams, ka rādiuss nav īsāks par augstumu (r≥h), jo no viena punkta pret kādu taisni vilktas slīpnes garums nav mazāks par no tā paša punkta pret to pašu taisni vilkta perpendikula garumu (perpendikuls ir īsākais attālums no punkta līdz taisnei).Tātad augstums nevar pārsniegt rādiusa garumu. Bet dotajā uzdevumā augstums ir lielāks par rādiusu (6>5), tāpēc šādu trijstūri uzzīmēt nevar.

41. Doto skaitli 952560000 sadala pirmreizinātājos (skaitli pieraksta kā pirmskaitļu reizinājumu) un iegūst $952560000=2^7\cdot3^5\cdot5^4\cdot7^2$.

Uzdevumā ir prasīts atrast mazāko naturālo skaitli, kura ciparu reizinājums ir dotais skaitlis, bet mazāko skaitli iegūst tad, ja tajā ir vismazāk ciparu, kuri ir iespējami mazi un kuri ir sakārtoti augošā secībā.

Mazākais iespējamais piecinieka vai septītnieka reizinājums ar citu ciparu ir $5\cdot2>9$ un $7\cdot2>9$, tātad nav cipars, tāpēc pieciniekus un septītniekus nevar sareizināt ar kādu citu pirmreizinātāju, iegūstot ciparu, un meklējamā skaitlī noteikti būs četri cipari 5 un divi cipari 7.

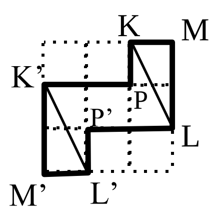
Tātad jāizveido pēc iespējas mazāk ciparu, kuru reizinājums ir $2^7\cdot3^5$

$2^7 \cdot 3^5 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$. Lai izveidotu pēc iespējas mazāk ciparu, jāsareizina kopā pēc iespējas vairāk pirmreizinātāju. Pēc kārtas varam sareizināt $2\cdot2\cdot2$ divas reizes, iegūstot divus ciparus 8. Pie 8 vairs nevar piereizināt nevienu pirmreizinātāju, jo tad reizinājums vairs nebūs cipars. Tālāk 2 sareizinot ar 3 iegūst ciparu 6, kuram arī nevar piereizināt nevienu pirmreizinātāju tā paša iemesla dēļ. Atlikuši četri pirmreizinātāji , kurus sadalām pāros $3\cdot3$, iegūstot divus ciparus 9. Kopā iegūti 5 cipari: 8, 8, 6, 9, 9. Tātad $2^7 \cdot 3^5 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2\cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3 = 8\cdot8\cdot6\cdot9\cdot9$.

Pārbaudām, vai nevar iegūt mazāk nekā 5 ciparus. Tad būtu jābūt 4 cipariem un tiem būtu jābūt pēc iespējas lieliem, lai to reizinājums būtu tik pat liels kā 5 cipariem. Bet pat lielāko 4 ciparu reizinājums $9\cdot9\cdot9\cdot9=(3^2)^4=3^8=3^5\cdot3^3<3^5\cdot2^7$, jo $3^3<2^7$ (27<128), tāpēc nevarēs izveidot mazāk nekā piecus ciparus.

Tātad meklējamie pieci cipari varētu būt 8; 8; 9; 9; 6; tad, sakārtojot iegūtos ciparus augošā secībā, meklējamais skaitlis būtu 55556778899.

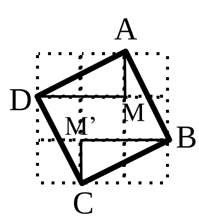
42. Dotā figūra sastāv no 5 rūtiņām. Ja vienas rūtiņas malas garumu pieņemam par vienu vienību, tad dotās figūras laukums ir 5 kvadrātvienības. Tātad arī iegūstamā kvadrāta laukums ir 5 kvadrātvienības. Bet kvadrāta laukums ir a^2 (a – kvadrāta mala), tātad kvadrāta mala ir $\sqrt{5}$ vienības. Doto figūru griezīsim 2 vietās tā, lai griezuma līniju garumi būtu $\sqrt{5}$ vienības. Kā to izdarīt parādīts 50. zīm.



50. zīm.

Griezuma līnijas KL un K'L' attiecīgi būs kvadrāta malas, jo to garums ir $\sqrt{5}$ vienības. Tātad dotās figūras virsotnes M un M' novietosies uz virsotnēm P un P'.

Pierādīsim, ka iegūtā figūra patiešām ir kvadrāts. Ja vienas rūtiņas malas garums ir 1 (dotajā figūrā), tad figūras ABCD (skat. 51. zīm.) katra mala ir $\sqrt{5}$.



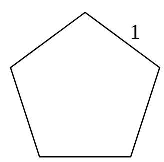
51. zīm.

Tas izriet no griezuma līnijām KL un K'L'. KL garumu var izteikt no taisnleņķa △KLM pēc Pitagora teorēmas $KL^2=KM^2+ML^2=1+2^2=5$, no kurienes seko, ka $KL=\sqrt{5}$. Līdzīgi no △K'L'M' iegūst $K'L'=\sqrt{5}$. Tā kā katra griezuma līnija jaunizveidotajā figūrā dod divas malas (ja △KLM ievieto tā, ka virsotne K atbilst A, bet L - D, un △K'L'M' tā, lai L' sakrīt ar C, bet K' - B, tad malas AD un CB būs attiecīgi KL un K'L', bet AB un DC arī būs vienādas ar KL un K'L', jo tās ir tās pašas griezuma līnijas) un abas griezuma līnijas ir vienādas, tad figūrai ABCD visas malas ir vienādas un ir $\sqrt{5}$. Tātad atliek pierādīt, ka arī visi leņķi četrstūrī ABCD ir 90^0.

$\angle DAM+\angle BAM=90^0$, jo $\angle DAM=\angle LKM$ un $\angle BAM=\angle PKL$, tāpēc, ka AB ir tā pati griezuma līnija, tātad leņķi, kas radās griešanas rezultātā, nemainās. Bet $\angle LKM+\angle PKL=\angle PKM=90^0$, jo rūtiņu leņķi ir taisni. Tā kā četrstūris, kura visas malas ir vienādas, var būt tikai rombs vai kvadrāts, bet vismaz viens leņķis četrstūrī ABCD ir 90^0, tad arī visi pārējie leņķi ir 90^0 un iegūtā figūra ABCD patiešām ir kvadrāts.

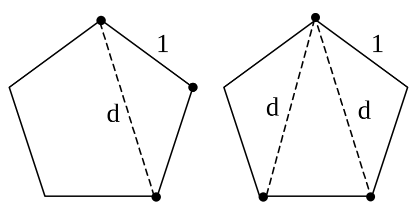
43. Jā, plaknē var atzīmēt 5 punktus ar šādām īpašībām.

Apskatām regulāru piecstūri ar malas garumu 1 cm. Tā virsotnes būs uzdevumā apskatāmie 5 punkti.



52. zīm.

Apskatīsim 3 piecstūra virsotnes. Ir tikai divi veidi, kā var izvēlēties šīs virsotnes un tie ir parādīti zīmējumā. (Gadījumi, kad izvēlās citas virsotnes nekā parādīts 53. zīm., reducējami uz vienu no parādītajiem veidiem.)



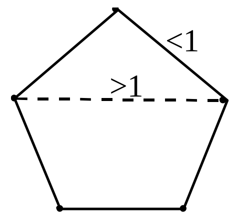
53. zīm.

Jebkurā no gadījumiem var atrast divas virsotnes, kas atrodas vienas piecstūra malas galapunktos un to savstarpējais attālums nav lielāks par viens, bet var arī atrast divas virsotnes, kas atrodas vienas piecstūra diagonāles galapunktos. (Tiešām, starp katrām 3 piecstūra virsotnēm atrodas gan tādas, kas uz kontūra novietotas blakus viena otrai, gan tādas, kas uz kontūra nav blakus viena otrai.)

Apskatām trijstūri, ko veido piecstūra divas blakusmalas un diagonāle d, kas savieno šo malu galapunktus. Šis trijstūris ir vienādsānu platleņķa trijstūris, jo piecstūris ir regulārs un visi piecstūra leņķi ir plati. Pārējie divi trijstūra leņķi ir šauri. Pēc īpašības, ka trijstūrī pret platāko leņķi atrodas garākā mala, secinām, ka piecstūra diagonāle d ir garākā mala šajā trijstūrī un, tā kā pārējas divas trijstūra malas ir arī piecstūra malas, tad diagonāle d ir garāka par piecstūra malu. Tātad diagonāle d ir garāka par piecstūra malu un, ja malas garums bija 1 cm, tad diagonāles d garums ir >1 cm. Līdz ar to esam atraduši divus punktus, kuru attālums ir lielāks par 1 cm.

Tātad piecstūra, kura malas garums ir 1, diagonāle d ir lielāka par 1.

Apskatot piecstūri , kura diagonāle ir d_1, kuras garums ir $1<d_1<d$, secinām, ka piecstūra malas garums ir mazāks kā 1. Līdz ar to šāda piecstūra 5 virsotnes var kalpot par meklējamās punktu kopas piemēru (skat. 54. zīm.), jo starp katrām trim piecstūra virsotnēm var atrast gan divas tādas, kas atrodas vienas malas galapunktos, gan divas tādas, kas atrodas vienas diagonāles galapunktos.



54. zīm.

44. Spriežam līdzīgi, kā A grupas 2. uzdevumā.

Sauksim grupu, kur ievietots skaitlis 1, par pirmo, bet grupu, kur ievietots skaitlis 2, par otro. Vēl ir trešā grupa, kas pagaidām ir tukša. Tālāk sākas izvēle: skaitli 3 var ievietot vai nu pirmajā grupā, vai trešajā grupā. Lai kur būtu ievietots skaitlis 3, skaitļa 4 ievietošanai atkal ir divas iespējas – citā grupā nekā skaitlis 3 (ja skaitlis 3 ir ievietots pirmajā grupā, tad skaitli 4 var ievietot vai nu otrajā, vai trešajā grupā, bet, ja skaitlis 3 ir ievietots otrajā grupā, tad skaitli 4 var ievietot vai nu pirmajā, vai trešajā grupā). Līdzīgā veidā divas izvēles ir skaitļa 5, skaitļa 6, ..., skaitļa 10 ievietošanai.

Tātad pavisam iespējami $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^8$ sadalījumi tā, lai blakus skaitļi neatrastos vienā grupā (pa divām izvēlēm katram no skaitļiem 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 un 10, skaitļiem 1 un 2 nebija izvēles).

No visiem sadalījumiem neder viens – sadalījums, kurā skaitļi 1, 3, 5, 7, 9 ir vienā grupā un skaitļi 2, 4, 6, 8, 10 – otrā grupā, bet trešā grupa paliek tukša, jo uzdevuma nosacījumos ir teikts, ka katrā grupā ir vismaz viens skaitlis. Tātad kopā iespējami $2^8 - 1 = 255$ sadalījumi, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem.

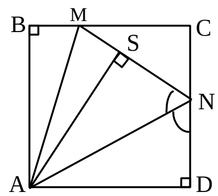
45. No uzdevuma nosacījumiem seko: 1) gan sarkano, gan zaļo skaitļu summa satur ne vairāk kā vienu saskaitāmo 1, ne vairāk kā vienu saskaitāmo 2, ..., ne vairāk kā vienu saskaitāmo 128, 2) viena no šīm summām satur saskaitāmo 16, otra nesatur.

Tātad sarkanā un zaļā krāsā nokrāsoto kartiņu komplekti **nesastāv no vieniem un tiem pašiem skaitļiem**. Pierādīsim, ka arī to summas nevar būt vienādas.

Atzīmēsim, ka skaitļu virknē 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128 katrs skaitlis ir lielāks par visu iepriekšējo summu (tiešām, 1<2, 1+2=3<4; 1+2+4=7<8; 1+2+4+8=15<16; 1+2+4+8+16=31<32; 1+2+4+8+16+32=63<64; 1+2+4+8+16+32+64=127<128).

Tā kā sarkanā un zaļā krāsā nokrāsoto kartiņu komplekti nav vienādi, tad eksistē skaitļi, kas pieder vienam komplektam, bet nepieder otram. Izvēlamies lielāko no šādiem skaitļiem; pēc iepriekš apskatītā, tā komplekta skaitļu summa, kas satur šo skaitli, noteikti lielāka par otra komplekta skaitļu summu.

46. Novelkam AS perpendikulāru MN (skat. 55. zīm.).



55. zīm.

Tad trijstūri AND un ANS ir vienādi, jo tie ir taisnleņķa trijstūri ar kopīgu hipotenūzu un leņķi SNA un DNA ir vienādi pēc uzdevumā dotā. No tā seko, ka AS=AD=AB un $\angle$SAN=$\angle$DAN.

Trijstūri ASM un ABM ir vienādi, jo tie ir taisnleņķa trijstūri ar kopīgu hipotenūzu un vienādām katetēm AS un AB. Tātad $\angle$BAM=$\angle$SAM. Tāpēc $\angle$A=$\angle$SAN+$\angle$DAN+$\angle$BAM+$\angle$SAM=2$\angle$SAN+2$\angle$SAM=2($\angle$SAN+$\angle$SAM)=2$\angle$MAN. Tā kā $\angle$A=90°, tad $\angle$MAN=90°:2=45°.

47. Lai saīsinātu daļu, jāatrod saucēja un skaitītāja lielākais kopīgais dalītājs (LKD). Tad, izdalot dotās daļas saucēju un skaitītāju ar atrasto LKD, iegūsim nesaīsināmu daļu (jo LKD ir lielākais skaitlis, ar kuru dalās gan saucējs, gan skaitītājs).

LKD(11141807;14267021) meklēsim ar Eiklīda algoritmu.

14267021=1·11141807+3125214

11141807=3·3125214+1766165

3125214=1·1766165+1359049

1766165=1·1359049+407116

1359049=3·407116+137701

407116=2·137701+131714

137701=1·131714+5987

131714=22·**5987**+0

LKD(11141807;14267021)=5987.

Tā kā LKD ir atrasts, atliek dotās daļas saucēju un skaitītāju izdalīt ar to: 11141807:5987=1861; 14267021:5987=2383.

Iegūstam $\frac{1114807}{1426702}=\frac{1861}{2383}$; iegūtā daļa $\frac{1861}{2383}$ ir nesaīsināma.

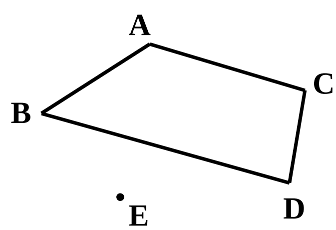
48. Sauksim pilsētas par tuvām, ja attālums starp tām nepārsniedz 100km, par tālām pretējā gadījumā. Šķirojam vairākus gadījumus.

1. Ir trīs pilsētas A, B, C, kas visas pa pāriem ir tuvas.

*) D un E arī ir tuvas. Vismaz viena no A, B un C ir tuva E. Varam pieņemt, ka tā ir C. Meklējamā rinda ir DECAB.

*) D un E ir tālas. Katrai no D un E starp A, B, C ir vismaz divas tuvas, tāpēc varam atrast tādas dažādas pilsētas X un Y starp A, B, C, ka X ir tuva ar D, bet Y ar E. Ja Z - atlikusī pilsēta no A, B, C, tad der rinda DXZYE.

2. Starp katrām trim pilsētām var atrast divas tālas. Apzīmēsim A tuvās pilsētas ar B un C. Tad C vēl tuva ar kādu citu pilsētu, apzīmēsim to ar D. Ja D tuva ar E, der rinda BACDE. Ja D nav tuva ar E, tad otra D tuvā pilsēta ir B. Tagad, lai ar kuru pilsētu būtu tuva E, meklējamo rindu viegli izveidot (skat. 56. zīm., kur tuvās pilsētas savienotas ar līnijām).



56. zīm.

Iespējami arī daudzi citi risinājumi.

49. Apzīmēsim Samtcepuri ar S un Kaupiņu ar K.

Pārvērtīsim uzdevuma tekstu aritmētiskā sakarībā.

Ja S tagad ir x gadus vecs, tad K tagad ir x+666 gadi, jo abu Velēnu vecīša gariņu gadu starpība ir 666 gadi. Kad S būs tikpat vecs, cik tagad K, tad S būs x+666 gadi. Savukārt tagad S ir 2 reizes vecāks nekā K, kad K bija $\frac{1}{3}(x+666)$ gadi. No tā mēs iegūstam sakarību

$$x = 2 \cdot \frac{1}{3}(x+666)$$

$$x = \frac{2}{3}x + 444$$

$$\frac{1}{3}x = 444$$

$$x = 1332$$

un

x+666=1998.

Tātad Samtcepure tagad ir 1332 gadus vecs, bet Kaupiņš 1998 gadus vecs.

50. Lai uz tāfeles iegūtu skaitli 1, uz tāfeles būtu jābūt skaitlim 2, jo skaitlis 1 ir skaitļa 0 un skaitļa 2 vidējais aritmētiskais. Skaitlis 1 ir mazs skaitlis, tāpēc uz tāfeles jācenšas iegūt pēc iespējas mazākus skaitļus. Mazāki skaitļi veidojas, ja ņem vidējo aritmētisko no iespējami mazākiem jau uzrakstītiem skaitļiem. Tā kā divu skaitļu vidējais aritmētiskais ir šo divu skaitļu summa dalīta ar 2 un dalījumā vesels skaitlis rodas (jāiegūst skaitļi 1, 17, 1000 un tie ir veseli skaitļi), ja summa ir pāra skaitlis, tad ņem vidējo aritmētisko no diviem pāra un diviem nepāra skaitļiem.

Pieraksts ..., 1996^0, 988^0, 499, ... nozīmē, ka skaitļu 1996 un 0 vidējais aritmētiskais ir skaitlis 988 un skaitļu 988 un 0 vidējais aritmētiskais ir skaitlis 499.

Tad izmantojot parādīto pierakstu, viens veids kā iegūt prasītos skaitļus ir šāds:

*) 0, 99, 1996^0, 998^0, 499^{99}, 299^{99}, 149^{99}, 124^0, 62^0, 31^{99}, 65^{31}, 48^0, 24^0, 12^0, 6^0, 3^{31}, $\mathbf{17}^3$, 10^0, 5^3, 4^0, 2^0, **1**.

*) 1996^4, **1000**.

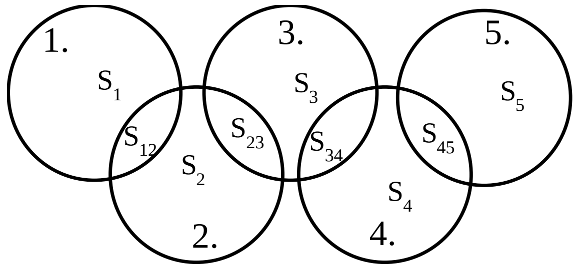
Uzdevumā prasīts, kādus skaitļus vispār var iegūt. Tā kā skaitlis 1996 bija lielākais , kas uzrakstīts uz tāfeles, un saskaitot šo skaitli ar jebkuru citu mazāku skaitli un summu izdalot ar 2, rezultātā iegūst mazāku skaitli par 1996 (ja a≤1996 un b≤1996, $\frac{a+b}{2} \le 1996$), tad uz tāfeles nekad neiegūs lielāku skaitli par 1996.

Parādīsim, ka visus naturālos skaitļus, kas mazāki par 1996, var iegūt.

Mēs jau redzējām, ka var iegūt skaitļus 1; 2; 3; 4; 5; 6. Pieņemsim, ka var iegūt skaitļus 1; 2; …; n, pēc tam kaut kādus pēc kārtas ņemtus skaitļus n+1; n+2; …; n+x nevar iegūt, bet nākošo skaitli n+x+1 atkal var izmantot jaunu skaitļu iegūšanā (tāds skaitlis pēc neiegūstamajiem skaitļiem noteikti eksistē, jo vismaz 1996 jau ir uz tāfeles).

Atkarībā no tā, vai n+x+1 paritāte sakrīt ar n paritāti vai n-1 paritāti (var saskaitīt tikai pāra un pāra vai nepāra un nepāra skaitļus, lai summa būtu vesels skaitlis), varam iegūt vai nu skaitli $\frac{1}{2}(n+n+x+1) = n + \frac{1}{2}(\ x+1)$, vai skaitli $\frac{1}{2}(n-1+n+x+1) = n + \frac{1}{2}x$. Tā kā $\frac{1}{2}(x+1) \le x$ un $\frac{1}{2}x \le x$, tad gan vienā, gan otrā gadījumā esam ieguvuši kādu no neiegūstamajiem skaitļiem n+1, n+2, ..., n+x. Tā ir pretruna, tātad mūsu sākotnējais pieņēmums nepareizs un neiegūstamu skaitļu nav.

51. Sanumurēsim riņķus kā 57. zīm.



57. zīm.

Ar S_1 apzīmēsim to skaitli, kas pieder tikai 1. riņķim, ar S_2 – 2. riņķim, ..., S_5 – 5. riņķim, S_{12} – 1. un 2. riņķim, ..., S_{45} – 4. un 5. riņķim.

Kā zināms, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{45} ir dažādi skaitļi no 1 līdz 9.

Pēc uzdevuma nosacījumiem, visos riņķos ir vienāda skaitļu summa. Šo summu apzīmēsim ar S. Tā kā riņķi ir 5, tad varam uzrakstīt sakarību:

$$5\cdot S = (S_1+S_{12})+(S_2+S_{12}+S_{23})+(S_3+S_{23}+S_{34})+(S_4+S_{34}+S_{45})+(S_5+S_{45})$$

$$5S = S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+2(S_{12}+S_{23}+S_{34}+S_{45})$$

Bet $S_1+S_2+S_3+S_4,+S_5+S_{12}+S_{23}+S_{34}+S_{45}=1+2+\ldots+9=45$ (jo S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{45} ir dažādi nenulles cipari no 1 līdz 9).

Tātad $5S = 45 + (S_{12}+S_{23}+S_{34}+S_{45})$ *(*)*.

Tā kā S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{45} ir naturāli skaitļi, tad 5S arī ir naturāls skaitlis. Un 5S, acīmredzami, dalās ar 5. Tad arī vienādības *(*)* labajai pusei jādalās ar 5. Tā kā saskaitāmais 45 jau dalās ar 5, tad bez atlikuma ar 5 jādalās arī $(S_{12}+S_{23}+S_{34}+S_{45})$. No tā seko, ka

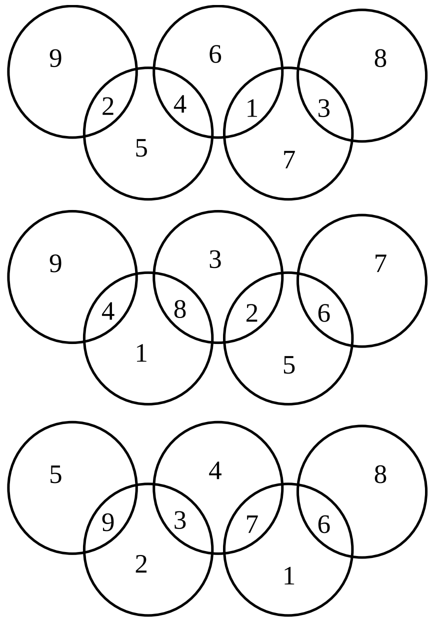
$(S_{12}+S_{23}+S_{34}+S_{45}) = 5k$, kur k – naturāls skaitlis.

Ja 4 ciparu summu $(S_{12}+S_{23}+S_{34}+S_{45})$ aizstājam ar 5k, tad vienādība *(*)* uzrakstāma kā

$5S = 45 + 5k \rightarrow S = 9 + k$ *(**)*.

Aplūkosim, kādās robežās var atrasties skaitlis $S_{12}+S_{23}+S_{34}+S_{45}$ jeb 5k. Tā ir 4 dažādu ciparu summa. Maksimālā 4 ciparu summa ir 6+7+8+9 = 30, bet minimālā summa – 1+2+3+4 = 10. Tad $10 \le 5k \le 30 \rightarrow 2 \le k \le 6$. Tātad k = 2, 3, 4, 5 vai 6. Tad no vienādības *(**)* S var būt 11, 12, 13, 14 vai 15.

Pārbaudām vai šādas vērtības ir iespējamas. Mēģinot izvietot ciparus, secinām, ka vērtības 11, 13 un 14 ir iespējamas (skat. 58. zīm.).



58. zīm.

Vērtības 12 un 15 nav iespējamas; par to pārliecināmies, cenšoties ierakstīt skaitļus apgabalos - visos variantos notiek ciparu atkārtošanās.

52. Nē.

Pieņemsim pretējo, ka izliektā 1996-stūrī visu leņķu lielumi tomēr var izsacīties ar veselu skaitu grādu. Apskatīsim 1996-stūra ārējos leņķus. Ja 1996-stūra leņķi izsakās ar veselu naturālu skaitu grādu, tad ar veselu naturālu skaitu grādu izsakās arī to ārējie leņķi. Tātad ārējiem leņķiem jābūt vismaz 1° lieliem. Tāpēc , pat gadījumā, ja 1996-stūra visi leņķi ir vienādi un, līdz ar to, vienādi ir arī ārējie leņķi, ārējo leņķu summa ir vismaz $1°\cdot1996=1996°$. Bet zināms, ka katram izliektam daudzstūrim ārējo leņķu summa ir 360°. Iegūta pretruna. Tātad pieņēmums ir nepareizs. Izliektā 1996-stūrī visu leņķu lielumi nevar izsacīties ar veselu skaitu grādu.

53. Ja klasē visi skolēni draudzējas cits ar citu, tad varam ņemt jebkuru klases skolnieku.

Pieņemsim, ka divi skolnieki A un B nedraudzējas savā starpā. Izvēlēsimies patvaļīgu trešo skolnieku C. Ja tas nedraudzējas ne ar A, ne ar B, tad starp 3 skolniekiem A, B, C nevarētu atrast divus tādus, kas savā starpā draudzējas, un tā būtu pretruna ar uzdevuma nosacījumiem. Tāpēc C draudzējas vai nu ar A, vai B.

Tātad katrs no 23 pārējiem skolniekiem (izņemot A un B) draudzējas vai nu ar A, vai B. Tā kā $11+11=22<23$, tad vai nu ar A, vai ar B draudzējas vismaz 12 skolnieki.

54. Iedomāsimies, ka dotā kuba vietā mums ir daudzstāvu ēka ar 10 stāviem un katrā stāvā ir 100 istabu. Tātad visā ēkā kopā ir 1000 istabu (uzdevumā – mazie kubiņi). Pēc uzdevuma noteikumiem seko, ja vienu rūķīti izmitinām vienā istabā, tad, lai citi rūķīši netraucētu šo izmitināto rūķīti, tos nevar izmitināt neviena stāva istabā tieši virs, vai tieši zem (apzīmēsim to ar "stāvu vertikāli") šī izmitinātā rūķīša. Tāpēc vienā "stāvu vertikālē" var atrasties tikai viens rūķītis, tāpēc par 100 rūķīšiem vairāk izmitināt nevarēs. Kā izmitināt 100 rūķīšus, parādīts 59. zīm. Tur parādīts skats no augšas; katrā "stāvu vertikālē" dzīvo viens rūķītis, un rūtiņā ierakstītais numurs norāda viņa stāvu.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	10	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	10	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	10	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	10	1	2
2	3	4	5	6	7	8	9	10	1

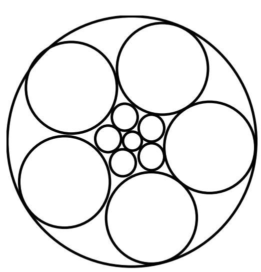
59. zīm.

Iespējami daudzi citi risinājumi.

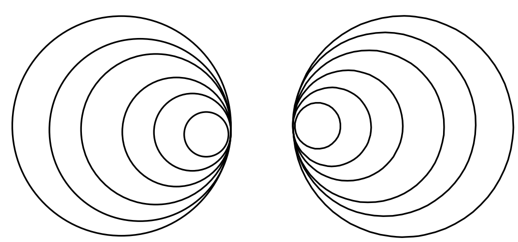
55. Skaitlis 7 un skaitlis 13 ir pirmskaitļi, tāpēc LKD(7; 13) = 1, bet MKD(7; 13) = 7·13 = 91. Lai skaitlis dalītos gan ar 7, gan ar 13, tam jādalās arī ar MKD(7; 13), tātad jādalās ar skaitli 91. Tātad mums jāatrod skaitlis, kurš pats dalās ar 91 un kura ciparu summa arī dalās ar 91. Viens no tādiem skaitļiem varētu būt $\underbrace{9191\ldots91}_{91\ \textit{reizi}\ 91}$ (91 reizi uzraksta 91). Šāds skaitlis dalās ar 91, jo $\underbrace{9191\ldots91}_{91\ \textit{reizi}\ 91}:91=\underbrace{1010\ldots01}_{91\ \textit{reizi}\ \text{"1"}}$ (cipars 1 šajā skaitlī ir 91 reizi). Skaitļa $\underbrace{9191\ldots91}_{91\ \textit{reizi}\ 91}$ ciparu summa ir (9+1)·91=910, kas arī dalās ar 91. Tātad skaitlis $\underbrace{9191\ldots91}_{91\ \textit{reizi}\ 91}$ apmierina uzdevuma nosacījumus.

56. Skat. 60. zīm.

1)



2)



60. zīm.

57. Nokrāsosim kuba vienu skaldni vienā no krāsām, piemēram, violetā krāsā. Pagaidām nav atšķirības, kuru skaldni mēs nokrāsojam. Novietosim kubu tā, lai apakšējā skaldne būtu violeta. Augšējo skaldni var nokrāsot jebkurā no 5 atlikušajām krāsām. Vispirms pieņemsim, ka tā ir melna. Nenokrāsotas ir palikušas 4 skaldnes. Vienu no nenokrāsotajām skaldnēm varam nokrāsot jebkurā no atlikušajām 4 krāsām, un šoreiz atkal nav atšķirības, kuru skaldni mēs nokrāsojam, jo, attiecībā pret jau nokrāsotām skaldnēm (augšējo un apakšējo), pārējās 4 skaldnes novietojas vienādi.

Tātad vienu skaldni nokrāsosim sarkanu. Pagriezīsim kubu ap savu asi tā, lai priekšā nonāktu sarkanā skaldne. Tad pārējās trīs skaldnes jānokrāso zilā, zaļā un dzeltenā krāsā. Tas iespējams sešos veidos:

kreisā skaldne	labā skaldne	aizmugurējā skaldne
zi	za	dz
zi	dz	za
za	zi	dz
za	dz	zi
dz	zi	za
dz	za	zi

Tātad ir 6 dažādi krāsojumi, kuros augšējā skaldne ir melna. Līdzīgi 6 dažādi krāsojumi ir, ja augšējā skaldne ir sarkana, zila, zaļa vai dzeltena. Tātad pavisam ir $6\cdot5=30$ dažādi krāsojumi.

58. Ja a, b, c, d ir tie paši skaitļi, kas $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+d}{2}, \frac{d+a}{2}$, tad

$$a^2+b^2+c^2+d^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{c+d}{2}\right)^2+\left(\frac{d+a}{2}\right)^2.$$

Pakāpeniski pārveidojot iegūstam

$$\mathrm{a2+b2+c2+d2=\frac{1}{4}(a2+2ab+b2+b2+2bc+c2+c2+2cd+d2+d2+2ad+a2)}$$

$$\mathrm{a2+b2+c2+d2=\frac{1}{2}(\,a2+b2+c2+d2+ab+bc+cd+da)}$$

$$2(a^2+b^2+c^2+d^2)= a^2+b^2+c^2+d^2+ab+bc+cd+da$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2=ab+bc+cd+da$$

$$2a^2+2b^2+2c^2+2d^2=2ab+2bc+2cd+2da$$

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2cd+d^2)+(d^2-2da+a^2)=0$$

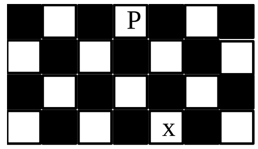
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2=0$$

Tā kā kvadrāti nav negatīvi, tad no šīs vienādības seko

$$(a-b)^2=(b-c)^2=(c-d)^2=(d-a)^2=0,$$

tātad $a=b=c=d$, k.b.j..

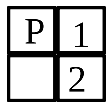
59. Pieņemsim, ka pūķis pārvietojas pa rūtiņu lapu, kas nokrāsota kā šaha galdiņš. Ja n ir nepāra skaitlis, tad pārvietojoties pūķis nokļūs tikai uz tādas pašas krāsas lauciņa, uz kāda viņš atradās sākumā. Piemēram, ja pūķis atrodas lauciņā P (tas ir balts), tad izdarot vienu soli pa labi, viņš nokļūs uz melnas rūtiņas, bet izdarot nepāra skaitu soļu (piem. 3), viņš atkal nokļūs baltā lauciņā (skat. 61. zīm.). (Par soli sauksim pūķa pārvietojumu par 1 rūtiņu.)



61. zīm.

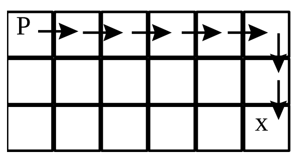
Izdarot nākošo gājienu, pūķis atkal nokļūs uz baltā lauciņa, tātad viņš nekad nenokļūs uz melna lauciņa. Tātad n nevar būt nepāra skaitlis, jo tad pūķis nevar nokļūt uz pretējās krāsas lauciņiem.

Ja n ir pāra skaitlis, tad pūķis varēs no katras rūtiņas nokļūt uz jebkuru citu. To var izdarīt piem., sekojošā veidā: vispirms nokļūst uz lauciņa 1, kas atrodas blakus sākotnējam P, tad uz to, kas blakus lauciņam 1, utt. (skat. 62. zīm.). (Divus lauciņus sauksim par blakus lauciņiem, ja tiem ir kopēja mala.)



62. zīm.

Atkarībā no tā, uz kuru lauciņu ir jānokļūst pūķim, viņš izvēlēsies, uz kuru lauciņu viņš katru reizi grib nokļūt (pa labi, pa kreisi, uz augšu vai uzleju no sākotnējā lauciņa). Saprotams, ka pārvietojoties tādā veidā pa 1 rūtiņai, pūķis varēs nokļūt uz izvēlētās rūtiņas (piem. skat. 63. zīm.).



63. zīm.

Tagad apskatīsim, kā pūķis var nokļūt uz blakus rūtiņu pa labi (vai pa kreisi). Pūķis to dara sekojoši:

<u>1. gājiens.</u> 1 rūtiņa uz leju, n pa labi;

<u>2.gājiens.</u> 1 rūtiņa uz leju, n pa kreisi (pēc otrā gājiena pūķis ir 2 rūtiņas zem sākotnējās rūtiņas);

<u>3. gājiens.</u> 1 rūtiņa uz leju, n pa labi;

...

<u>n-tais gājiens.</u> 1 rūtiņa uz leju, n pa kreisi.

Pēc n gājieniem pūķis atrodas tieši n rūtiņas zem sākotnējā lauciņa (tas ir tikai gadījumā, kad n ir pāra skaitlis, bet mūsu aplūkotajā gadījumā n ir pāra skaitlis). Tad, izpildot (n+1)-o gājienu n rūtiņas uz augšu un 1 pa labi vai pa kreisi, pūķis var nokļūt uz blakus rūtiņu sākotnējai.

Ja pūķis grib nokļūt uz blakus rūtiņu uz augšu vai uz leju, tad 1., 3., (n-1)-ais gājiens ir 1 rūtiņa pa labi, n uz leju; 2., 4., n-tais gājiens ir 1 rūtiņa pa labi, n uz augšu. Tad pēc n gājieniem pūķis atrodas n rūtiņas pa labi no sākotnējās. Ar (n+1)-o gājienu - n rūtiņas pa kreisi, 1 uz augšu vai uz leju - var nokļūt uz blakus rūtiņu uz augšu vai uz leju no sākotnējās.

Tātad pūķis varēs nokļūt, kur viņš gribēs.

60. Parādīts skats no augšas; rūtiņā ierakstītais numurs norāda rūķīša stāvu.

					5	4	3	2	1
					1	5	4	3	2
					2	1	5	4	3
					3	2	1	5	4
					4	3	2	1	5
10	9	8	7	6					
6	10	9	8	7					
7	6	10	9	8					
8	7	6	10	9					
9	8	7	6	10					

64. zīm.

61. Mums ir jāatrod visi trīsciparu skaitļi $\overline{abc}$ =100a+10b+c, kas dalās ar savu ciparu reizinājumu, t.i., dalās ar a·b·c.

Redzams, ka neviens no cipariem a, b, c nav nulle, jo pretējā gadījumā a·b·c=0, bet ar nulli neviens skaitlis nedalās.

(1) Ja 100a+10b+c=abc·k (k - vesels skaitlis), tad 100a+c=abc·k-10b= =b(ac·k-10), tātad skaitlis 100a+c dalās ar b, t.i., $\overline{a0c}$ **dalās ar b**. Līdzīgi iegūst, ka $\overline{bc}$ **dalās ar a** un $\overline{ab0}$ **dalās ar c**.

(2) Viegli secināt, ka, ja **c ir nepāra skaitlis,** tad arī **a un b ir nepāra skaitļi.** Ja kāds no skaitļiem a vai b būtu pāra skaitlis, tad ciparu reizinājums būtu a·b·c arī būtu pāra skaitlis, bet pats skaitlis $\overline{abc}$ ir nepāra skaitlis (c - nepāra), tātad tāds skaitlis nedalās ar savu ciparu reizinājumu.

(3) Ja kāds no cipariem a, b, c ir 5, tad pēdējam ciparam, (t.i. c) jābūt 5 vai 0. Tā kā c≠0, tad c=5. Pie tam, apskatot visus variantus, redzams, ka meklējamā skaitlī var būt ne vairāk kā viens cipars 5.

Gadījumā, ja visi trīs cipari ir 5, tad 555 nedalās ar 125. Ja skaitlī $\overline{abc}$ ir divi cipari 5, tad c=5 un b≠5 (jo ar 5·5=25 dalās skaitļi, kuru pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 25, bet 55 nedalās ar 25), tātad a=5, c=5, bet b - nepāra skaitlis (no (2) secinājuma). Tad vienīgā iespēja ir b=7 (pretējā gadījumā ciparu b un c veidotais skaitlis $\overline{bc}$ nedalīsies ar 25), bet 575 nedalās ar 175.

(4) Tāpat aplūkojot visus iespējamos variantus un izmantojot iepriekš iegūtos secinājumus, redzam, ka neviens no cipariem nevar būt 9.

Ja kāds no cipariem ir 9, tad pārējo divu ciparu summai jādalās ar 9. Tā var būt 9 vai 18. Ja pārējo divu ciparu summa ir 18, tad tie abi ir 9, bet skaitlis 999 nedalās ar 729. Tad "derīgs" varētu būt kāds no sekojošiem skaitļiem, taču 918 nedalās ar 72, 198 nedalās ar 72, 972 nedalās ar 126, 792 nedalās ar 126, 936 nedalās ar 162, 396 nedalās ar 162. Redzam, ka neviens trīsciparu skaitlis, kura viens cipars ir 9, nedalās ar savu ciparu reizinājumu.

(5) Tāpat der atcerēties, ka, ja kāds cipars "derīgajā" skaitlī ir 3 vai 6, tad pārējo ciparu summai jādalās ar 3 (tas seko no skaitļu dalīšanās pazīmēm).

Tagad, izmantojot iegūtos secinājumus, aplūkosim visus trīsciparu skaitļus un atradīsim visus "derīgos" - tos, kuri dalās ar savu ciparu reizinājumu (netiks aplūkoti tie skaitļi, kas nebūs "derīgi", spriežot pēc iepriekš iegūtajiem secinājumiem).

Skaitļus meklēsim šādi: izvēlēsimies ciparu c un izejot no secinājumiem (1), (2), (3, (4), (5) piemeklēsim ciparus a un b. Pēc tam vēl pārbaudīsim, vai iegūtais skaitlis dalās ar $a \cdot b \cdot c$.

c=1: **111** $\vdots$ 1; 171 $\not\vdots$ 7; 711 $\not\vdots$ 7; 771 $\not\vdots$ 49

c=2: **112** $\vdots$ 2; 122 $\not\vdots$ 4; **132** $\vdots$ 6; 162 $\not\vdots$ 12; **212** $\vdots$ 4; 222 $\not\vdots$ 8; **312** $\vdots$ 6; 412 $\not\vdots$ 8; 422 $\not\vdots$ 16; **432** $\vdots$ 24; 462 $\not\vdots$ 48; **612** $\vdots$ 12; **672** $\vdots$ 84; 712 $\not\vdots$ 14; 722 $\not\vdots$ 28; 732 $\not\vdots$ 42; 762 $\not\vdots$ 84; 812 $\not\vdots$ 16; 822 $\not\vdots$ 32

c=3: 333 $\not\vdots$ 27

c=4: 114 $\not\vdots$ 4; 124 $\not\vdots$ 8; **144** $\vdots$ 16; 184 $\not\vdots$ 32; 214 $\not\vdots$ 8; **224** $\vdots$ 16; 234 $\not\vdots$ 24; 244 $\not\vdots$ 32; 264 $\not\vdots$ 48; 324 $\not\vdots$ 24; **384** $\vdots$ 96; 414 $\not\vdots$ 16; 424 $\not\vdots$ 32; 444 $\not\vdots$ 16; **624** $\vdots$ 48; 714 $\not\vdots$ 28; 724 $\not\vdots$ 56; 744 $\not\vdots$ 112; 784 $\not\vdots$ 224; 814 $\not\vdots$ 32; 824 $\not\vdots$ 64; 834 $\not\vdots$ 96; 844 $\not\vdots$ 128; 864 $\not\vdots$ 192

c=5: **115** $\vdots$ 5; **135** $\vdots$ 15; **175** $\vdots$ 35; **315** $\vdots$ 15; 715 $\not\vdots$ 35; **735** $\vdots$ 105

c=6: 126 $\not\vdots$ 12; **216** $\vdots$ 12; 336 $\not\vdots$ 54; 366 $\not\vdots$ 108; 426 $\not\vdots$ 48; 636 $\not\vdots$ 108; 666 $\not\vdots$ 216; 726 $\not\vdots$ 84; **816** $\vdots$ 48

c=7: 117 $\not\vdots$ 7; 717 $\not\vdots$ 49; 777 $\not\vdots$ 343

c=8: **128** $\vdots$ 16; 168 $\not\vdots$ 48; 248 $\not\vdots$ 64; 288 $\not\vdots$ 128; 318 $\not\vdots$ 24; 348 $\not\vdots$ 96; 378 $\not\vdots$ 168; 448 $\not\vdots$ 128; 488 $\not\vdots$ 256; 418 $\not\vdots$ 32; 438 $\not\vdots$ 96; 468 $\not\vdots$ 192; 428 $\not\vdots$ 64; 618 $\not\vdots$ 48; 648 $\not\vdots$ 192; 712 $\not\vdots$ 56; 728 $\not\vdots$ 112; 738 $\not\vdots$ 168; 748 $\not\vdots$ 224; 768 $\not\vdots$ 336; 818 $\not\vdots$ 64; 828 $\not\vdots$ 128; 848 $\not\vdots$ 256; 888 $\not\vdots$ 512

Tātad "derīgie" skaitļi ir: 111; 112; 132; 212; 312; 432; 612; 672; 144; 224; 384; 624; 115; 135; 175; 315; 735; 216; 816; 128.

Tā kā tika aplūkoti visi iespējamie varianti, tad vairāk trīsciparu skaitļu, kuri dalās ar savu ciparu reizinājumu, nav.

62. Acīmredzot, der atrisinājums $x=0$. Ja $x>0$, tad $x \geq [x]$ un $1996>\{x\}$, tāpēc arī $1996x>[x] \cdot \{x\}$, un vienādojumam nav atrisinājuma.

Ja x=-n, n - naturāls, tad {x}=0, un x nav vienādojuma atrisinājums.

Ja -n<x<-(n-1), n - naturāls skaitlis, tad [x]=-n, x=-n+{x}. Iegūstam vienādojumu -n·{x}=1996(-n+{x}), kas pārveidojas par $\{x\} = \frac{1996n}{n+1996}$.

Viegli parādīt, ka n>1 pastāv nevienādība 1996n>n+1996; tā nevar būt, jo tad iznāktu {x}>1. Tāpēc atliek pārbaudīt n=1. Tad [x]=-1, $\{x\} = \frac{1996}{1997}$ un $x = [x] + \{x\} = -\frac{1}{1997}$.

Pārbaude parāda, ka šis atrisinājums der:

$$(-1) \cdot \frac{1996}{1997} = 1996 \cdot \left(-\frac{1}{1997}\right).$$

Tātad vienādojumam ir divi atrisinājumi: x=0 un $x = -\frac{1}{1997}$.

63. Apzīmēsim skaitļus uzrakstīšanas kārtībā ar a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, bet to visu summu ar S.

No uzdevuma nosacījumiem seko, ka

a + b + c + d = 20

e + f + g + h = 20

i + j + k + a = 20.

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam, ka S + a = 60 un a = 60 - S.

Sākot summēšanu pa četriem skaitļiem no b, iegūstam:

b + c + d + e = 20

f + g + h + i = 20

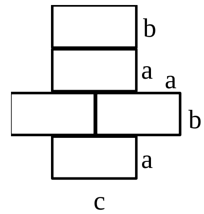
j + k + a + b = 20.

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam, ka S + b = 60 un b = 60 - S.

Tā turpinot, līdzīgi, sākot "četrinieku" summēšanu no citiem skaitļiem, iegūstam, c=60 - S, d=60 - S utt. Tātad a = b = c = d = e = f = g = h = i = j = k.

No šejienes izriet, ka visi skaitļi vienādi ar 5.

64. Jā, tādu taisnstūra paralēlskaldni izgatavot var. 65. zīm. parādīts taisnstūra paralēlskaldņa izklājums.



65. zīm.

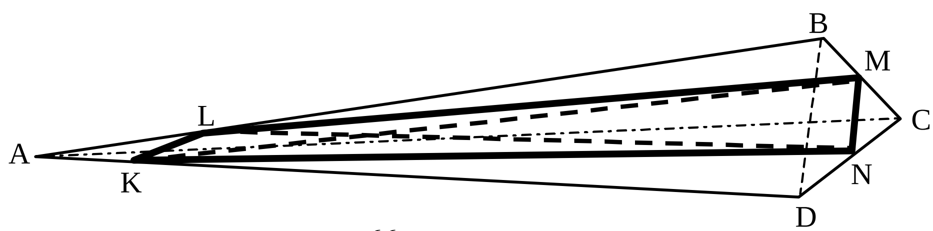
Lai dotie taisnstūri būtu vienādi, tad starp paralēlskaldņa izmēriem jāpastāv sekojošām sakarībām (a - “ķieģeļa” augstums, b - platums, c - garums):

1) a=b

2) 2a+c=2c jeb 2a=c.

Tātad, “ķieģeli”, kura platums ir tikpat cik augstums, un vienāds ar pusi no garuma, var aplīmēt ar 5 vienādiem taisnstūriem, kuru garums ir vienāds ar “ķieģeļa” garumu, bet platums ir puse no garuma.

65. Jā, ārējā četrstūra superperimetrs var būt mazāks par iekšējā četrstūra superperimetru. Par ārējo četrstūri ņem figūru, kurai ir 2 ļoti garas malas un 2 ļoti īsas malas (skat. 66. zīm. ABCD), bet iekšējais četrstūris ir KLMN (skat. zīm.).



66. zīm.

Četrstūra ABCD superperimetru sastāda trīs ļoti gari nogriežņi un trīs ļoti īsi nogriežņi, bet KLMN superperimetrs sastāv no četriem ļoti gariem nogriežņiem un diviem ļoti īsiem nogriežņiem. Garos nogriežņus pagarinot, bet īsos samazinot, tas ir, abus četrstūrus pastiepjot un sašaurinot, var panākt, ka iekšējā četrstūra superperimetrs lielāks par ārējā četrstūra superperimetru, jo pirmajam ir četri gari nogriežņi, bet ārējam tikai trīs gari nogriežņi, kas tikai nedaudz atšķiras no iekšējā četrstūra garajiem nogriežņiem, bet pārējās malas neko būtiski neietekmē, jo tās ir ļoti īsas.

66. a) Doto izteiksmi var pārveidot par parasto daļu, kuras saucējs ir visu skaitļu no 2 līdz 10 reizinājums, bet skaitītājā ir 1. Šī daļa ir $1:2:3:4:5:6:7:8:9:10=\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}$. Ja dotajā izteiksmē ieliek iekavas, tad to arī varēs pārveidot daļā, kuras saucējs un skaitītājs sastāvēs no skaitļu 1, 2, 3, …, 10 reizinājuma, pie tam tie skaitļi, kas būs saucējā, nebūs skaitītājā un otrādi.

Skaitlis 7 ir pirmskaitlis un starp skaitļiem 1, 2, …, 10 ar 7 dalās tikai pats 7. Tātad dotajā izteiksmē iekavas jāsaliek tā, lai, iegūto izteiksmi pārveidojot daļā, skaitītājā būtu reizinātājs 7 un pārējie skaitļi noīsinātos. To var izdarīt, piemēram, sekojošā veidā:

$$1:2:3:4:5:(6:7:8:9:10)=\frac{1\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=7\,.$$

b) Skaitlis 35 ir pirmskaitļu 5 un 7 reizinājums, Starp dotajiem skaitļiem, skaitlis 5 kā pirmreizinātājs ietilpst divas reizes - skaitļos 5 un 10. Ja izteiksmi (doto izteiksmi ar iekavām) pārveidotu par daļu, tad šie abi skaitļi (5 un 10) var abi atrasties daļas saucējā, abi skaitītājā vai viens saucējā, viens skaitītājā. Pirmajā gadījumā saucējā paliek vismaz reizinātājs 25 (jo skaitītājā nav neviena skaitļa, kas dalās ar 5), tātad tas nebūs vesels skaitlis. Otrajā gadījumā 25 būs skaitītājā, bet 35 nedalās ar 25. Gadījumā, ja viens skaitlis ir saucējā, otrs skaitītājā, tad daļu var saīsināt ar 5, un 5 kā reizinātājs vispār izzūd. Tātad 35 iegūt no dotās izteiksmes ar iekavu palīdzību nevar.

67. Pieņemsim, ka $n=a^2+b^2+c^2$, a, b, c - naturāli skaitļi. Varam pieņemt, ka $c\le a$ un $c\le b$.

Tad $n^2=(a^2+b^2+c^2)^2= a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2c^2b^2=$

$$= (a^4+b^4+c^4-2a^2c^2-2c^2b^2+2a^2b^2)+4a^2c^2+4b^2c^2=$$

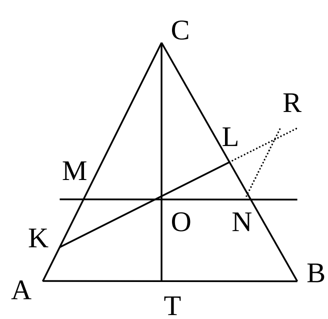
$$=(a^2+b^2-c^2)^2+(2ac)^2+(2bc)^2$$

Tā kā $a\ge c$ un $b\ge c$, tad $a^2+b^2-c^2$ arī ir naturāls (nevis vienkārši vesels) skaitlis.

68. Pieņem, ka caur trijstūra centru novilktā taisne ir taisne MN, kas paralēla malai AB (skat. 67. zīm.). Tādā gadījumā $\Delta MCN \sim \Delta ACB$. Novelk augstumus CO un CT; tie ir arī mediānas. No trijstūru līdzības seko, ka

$$\frac{[MCN]}{[ACB]}=\frac{CO^2}{CT^2}=\left(\frac{CO}{CT}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9},$$

jo O ir ΔABC mediānu krustpunkts. Tātad, ja pēc dotā [ACB] = 9 cm^2, tad [MCN] = 4 cm^2. Tātad šis variants (ka atšķeltā trijstūra laukums ir tieši 4cm^2) ir iespējams.



67. zīm.

Tagad caur trijstūra centru novelkam taisni KL, kas nav paralēla malai (skat. 67. zīm.). Uz taisnes KL izvēlamies punktu R tā, ka NR||AC.

ΔKMO~ΔRNO, jo RO un OK atrodas uz vienas taisnes; tāpat uz vienas taisnes atrodas nogriežņi MO un ON, kā arī RN||AC pēc konstrukcijas.

Tā kā vienādmalu ΔMCN augstums ir arī mediāna, tad MO=ON. Bez tam ΔKMO~ΔRNO, tāpēc ΔKMO=ΔRNO (pēc malas un tās pieleņķiem).

Tādējādi [OLN] < [ORN] = [OKM] jeb

[OKM]-[OLN]>0

tāpēc [KCL] = [MCN] + [OKM] - [OLN] > [MCN] = 4 cm^2, t.i., ja caur trijstūra centru novilkta taisne KL, kas nav paralēla malai, tad ΔKCL laukums ir lielāks par 4 cm^2.

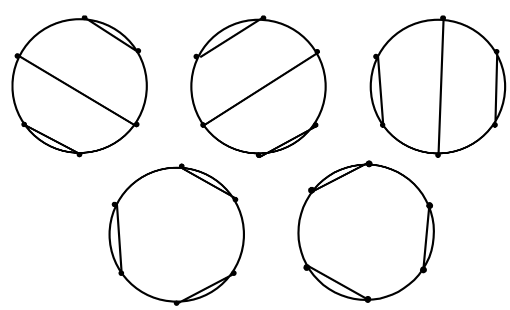
Tātad jebkurā gadījumā interesējošā trijstūra laukums nav mazāks par 4 cm^2.

Līdzīgi spriežot, pierāda, ka, griežot taisni KL pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam, △KCL laukums aizvien palielinās. Kad K sasniedz virsotni A, tas ir 4,5 cm^2. Tālāk griežot, trijstūris kļūst jau par četrstūri.

Tātad trijstūra daļas laukums vienmēr ir mazāks par 5 cm^2; tāpēc četrstūra daļas laukums ir lielāks, par 4cm^2, k.b.j.

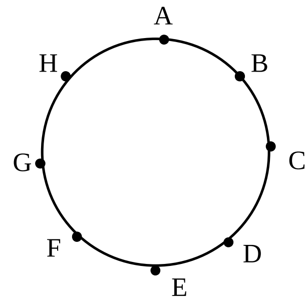
69. Ja uz riņķa līnijas ir tikai divi punkti, savienošanu var izdarīt vienā veidā; ja tur ir 4 punkti, savienošanu var izdarīt divos veidos.

Ja uz riņķa līnijas ir 6 punkti, savienošanu var izdarīt 5 veidos (skat. 68. zīm.).



68. zīm.

Pieņemsim, ka uz riņķa līnijas ir 8 punkti (skat. 69. zīm.).



69. zīm.

Ja A savieno ar B vai ar H, tālākai savienošanai paliek vēl 6 punkti. Katrā no šiem variantiem iegūstam 5 savienojuma veidus.

Ja A savieno ar D, tad B noteikti jāsavieno ar C. Tālākai savienošanai atliek 4 punkti, kurus var savienot 2 veidos.

Tāpat 2 savienošanas veidi ir, ja A savieno ar F.

Ja A savieno ar C, E vai G, tad tālāka savienošana vispār nav iespējama, jo katrā pusē no novilktā nogriežņa paliek nepāra skaits punktu, ko pa pāriem savienot nevar.

Tātad 8 punktus varētu savienot 5+5+2+2=14 veidos.

Līdzīgi 10 punktu gadījumā iegūstam, ka savienošana izdarāma $14+5+2\times2+5+14=42$ veidos.

Te saskaitāmais 2×2 atbilst gadījumam, kad punkts A savienots ar "pretējo" punktu; katrā pusē no novilktā nogriežņa paliek 4 punktu, un katru punktu četrinieku var savienot 2 veidos vienu neatkarīgi no otra. Tā kā katrs pirmā četrinieka savienošanas veids var kombinēties ar katru otrā četrinieka savienošanas veidu, iegūstam 2×2 dažādus savienojumus.

70. Skaitīsim, cik pavisam trijstūru virsotnes ir plaknē. Tā kā doti pavisam 1996 trijstūri, tad pavisam ir $1996\cdot3$ virsotnes (ja diviem trijstūriem sakrīt viena virsotne, tad to vienalga skaitīsim kā divas dažādas virsotnes).

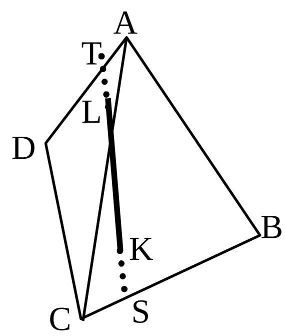
Bet no tā, ka katrs trijstūris satur ne mazāk kā 4 citu trijstūru virsotnes, seko, ka katrs trijstūris satur ne mazāk kā 3+4=7 virsotnes (gan savas, gan citas). Tad pavisam ir ne mazāk kā $7\cdot1996$ trijstūru virsotnes. Bet tagad tās virsotnes (tie punkti, kas vismaz vienam trijstūrim ir virsotne) katra ir ieskaitīta tik reizes, cik trijstūriem tā pieder. Pieņemsim, ka katrs punkts var būt kopīgs ne vairāk kā diviem trijstūriem. Tātad katra virsotne pieder vienam vai diviem trijstūriem. Bet tas nozīmē, ka plaknē ir atzīmētas vismaz $\frac{7\cdot1996}{2}$ virsotnes.

Taču sākumā mēs konstatējām, ka plaknē ir $3\cdot1996$ virsotnes, kas ir mazāk nekā $\frac{7}{2}\cdot1996$.

Iegūta pretruna, tātad pieņēmums, ka neviens punkts nepieder vairāk nekā 2 trijstūriem, ir nepareizs. Tas nozīmē, ka var atrast 3 trijstūrus, kuriem ir kopīgs punkts.

71. Tā kā iekšējais četrstūris atrodas ārējā iekšpusē un neviena tā mala neziet ārpus ārējā četrstūra, tad iekšējā četrstūra perimetrs (malu summa) ir mazāks par ārējā četrstūra perimetru, tātad arī par tā superperimetru.

Iekšējā četrstūra diagonāle ir kāds nogrieznis, kas atrodas ārējā četrstūra iekšpusē. Pagarinām to, līdz tā krusto ārējā četrstūra malas (skat. 70. zīm.).



70. zīm.

Iegūtais nogrieznis TS ir mazāks par četrstūra ABCD (tas ir ārējais četrstūris) garāko diagonāli (70. zīmējumā - AC).

Tāpat arī otra iekšējā četrstūra diagonāle ir īsāka par ārējā četrstūra garāko diagonāli. Bet diagonāle AC ir mazāka par AD+DC (pēc trijstūra nevienādības). AD+DC nepārsniedz ārējā četrstūra pusperimetru (par AD un DC ņem tās divas malas, kas ar diagonāli AC veido trijstūri un kuru garumu summa ir ne lielāka kā 2 pārējo četrstūra ABCD malu garumu summa). No tā seko, ka iekšējā četrstūra diagonāļu garumu summa ir mazāka par ārējā četrstūra perimetru, tātad arī par superperimetru.

Līdz ar to iekšējā četrstūra superperimetrs ir mazāks par divkāršotu ārējā četrstūra superperimetru.

72. Sauksim kastīti par pustukšu, ja tajā ir 1 konfekte, par normālu, ja tajā ir 2 konfektes, un par pilnu, ja tajā ir vismaz 3 konfektes.

Ēšanas laikā pilna kastīte var pārvērsties par normālu, normāla - par pustukšu, pustukša - par tukšu.

Pieņemsim, ka ir a tukšas, b pustukšas, c normālas un d pilnas kastītes, turklāt pilnajās kastītēs konfekšu daudzumi ir $2+x_1$, $2+x_2$, …, $2+x_d$. Sacīsim, ka i-jā pilnajā kastītē ir x_i *liekas* konfektes, un uzskatīsim, ka no pilnas kastītes vienmēr ēd lieku konfekti (ja lieko konfekšu vairs nav, pilna kastīte pārvērtusies par normālu).

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem

$$(1) \qquad a+b+c+d=100$$

$$b+2c+(2+x_1)+(2+x_2)+\ldots+(2+x_d)=200$$

$$(2) \qquad b+2c+2d+(x_1+x_2+\ldots+x_d)=200$$

Reizinot (1) ar 2 un atņemot iegūto vienādību no (2), iegūstam

$$(x_1+x_2+...+x_d)=b+2a$$

(*) Tātad lieko konfekšu skaits sākumā nav mazāks par pustukšo kastīšu skaitu.

Andra stratēģija ir sekojoša: viņš ēd konfektes no pustukšajām kastītēm, ja tādas ir, un no pilnā kastītēm, ja nav pustukšo kastīšu.

Vai Andris var izdarīt kādu gājienu? Jā, jo pēc Jāņa gājiena vienmēr paliek neapēsts nepāra skaits konfekšu, tātad vismaz vienā kastītē ir 1; 3; 5; … konfektes.

Kāpēc Andra stratēģija garantē panākumus?

Jāņa pirmā gājiena rezultātā pustukšo kastīšu skaits var samazināties (ja viņš ēd konfekti no pustukšas kastītes), nemainīties (ja viņš ēd no pilnas kastītes) vai palielināties par 1 (ja viņš ēd konfekti no normālas kastītes).

Viegli izsekot, ka pēc Andra atbildes gājiena nosacījums **(*)** saglabājas visos gadījumos. Tāpēc pustukšās kastītes "izbeigsies" ne vēlāk kā liekās konfektes. Šai brīdī visās netukšajās kastītēs būs vismaz 2 konfektes. Ja tālāk Jānis ēdīs konfekti no normālas kastītes, Andris tūlīt šo kastīti iztukšos. Ja Jānis ēdīs konfekti no pilnas kastītes, Andris darīs to pašu, jo saskaņā ar konfekšu skaita paritāti ir palikusi vēl vismaz viena pilna kastīte.

Tādejādi visas pilnās kastītes pamazām kļūs par normālām, kuras pēc tam pakāpeniski izzudīs. Pēdējā palikusī normālā kastīte garantēs Andra uzvaru.