Šis materiāls ņemts no darba: Kristīne Kiršteina, Agnis Andžāns „Uzdevumu krājums "Profesora Cipariņa kluba" dalībniekiem", 2004.g. Tas satur 1995./96.m.g. „Profesora Cipariņa kluba" visu 6 kārtu uzdevumus un atrisinājumus. Zīmējumu numerācija atbilst numerācijai minētajā darbā. Uzdevumi numurēti no sākuma vienotā numerācijā.

"Profesora Cipariņa klubs" 1995.-1996.mācību gads

1. kārtas uzdevumi

A grupa

1. Rindā augošā kārtībā izrakstīti visi naturālie skaitļi, kas nedalās ne ar 5, ne ar 7. Kāds skaitlis šajā rindā atrodas
  a) 100–ā,
  b) 1995–ā vietā?

2. Atrodiet kaut vienu trijstūri, kuru var sagriezt trijos mazākos trijstūros, pie tam tā, lai katram no mazākajiem trijstūriem leņķu lielumi būtu tādi paši kā sākotnējam.

3. Pēteris dalīja vienu naturālu skaitli ar otru; dalīšanas rezultātā radās atlikums. Vai var būt, ka dalāmajam, dalītājam, dalījumam un atlikumam pēdējie cipari ir 1, 3, 7, 9 (katram cits)?

4. Mārtiņš apgalvo, ka viņš atradis trīs divciparu skaitļus ar īpašību: saskaitot jebkurus divus no tiem, summā iegūst divciparu skaitli, kura cipari ir tie paši, kas trešajam skaitlim, tikai apgrieztā kārtībā. Vai tā var būt?

5. Trīs kvadrāti sastāv attiecīgi no 2×2, 3×3 un 6×6 rūtiņām. Sagrieziet divus no tiem katru divās daļās tā, lai no iegūtajiem pieciem gabaliem varētu salikt kvadrātu ar izmēriem 7×7 rūtiņas. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

6. Trīs skaistules katra sastādīja 30 dažādu kleitu sarakstu, kuras vēlētos iegādāties. Satikušās viņas visas parādīja savus sarakstus cita citai. Pēc atgriešanās mājās katra skaistule izsvītroja no sava saraksta tās kleitas, kuras viņa bija redzējusi arī vienā vai abos no pārējiem sarakstiem. Vai var gadīties, ka vienā sarakstā palika 15 kleitas, otrā - 22, bet trešajā - 24 kleitas?

B grupa

7. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Vai var 24 rūtiņās ierakstīt pa vienai zvaigznītei tā, lai aizkrāsojot jebkuras 3 rindiņas un jebkuras 3 kolonnas, neizkrāsotas paliktu vismaz 6 zvaigznītes?

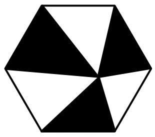
8. Rindā izrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 1994 ieskaitot. Vai var katram no tiem priekšā pierakstīt "+" vai "-" zīmi tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu 1995? Bet ja būtu izrakstīti skaitļi no 1 līdz 1995 un vajadzētu iegūt izteiksmes vērtību 1996?

9. Jānim un Pēterim katram ir vairāki uzdevumu krājumi. Jāņa krājumos uzdevumu kopā ir 11 reizes vairāk nekā Pētera krājumos, tomēr pēc tam, kad Jānis uzdāvināja Pēterim savu uzdevumu krājumu ar vismazāko skaitu uzdevumu, Jāņa krājumos palika vairs tikai 7 reizes vairāk uzdevumu nekā Pētera krājumos. Pierādiet, ka pēc dāvināšanas Jānim palika ne vairāk kā 21 uzdevumu krājums.

10. Sprīdītim ir 11 zelta gabali, kuriem būtu jāsver atbilstoši 1kg; 2kg; 3kg; …; 11kg. Ir zināms, ka ne vairāk kā divu zelta gabalu masas atšķiras no tām, kas uz tiem norādītas. Kā, izmantojot sviras svarus bez atsvariem, var noskaidrot, vai zelta gabals ar uzrakstu "1kg" tiešām sver vienu kilogramu?

11. Kāda var būt A grupas 4. uzdevumā minēto Mārtiņa iedomāto skaitļu summa?

12. Sešstūra visas malas vienādas un visi leņķi - arī vienādi. Tā iekšpusē ņemts patvaļīgs punkts un savienots ar visām virsotnēm (skat. 9. zīm.). Pierādiet, ka iesvītroto laukumu summa vienāda ar neiesvītroto laukumu summu.



9. zīm.

2. kārtas uzdevumi

A grupa

13. Kastē atrodas 10 kartītes. Uz tām uzrakstīts pa vienam ciparam (visi dažādi). No kastes uz labu laimi izņem 3 kartītes. Pierādīt, ka no tām var sastādīt skaitli, kas dalās ar 3 (nav obligāti jāizmanto visas kartītes).

14. Vai var uzzīmēt 8 nogriežņus tā, lai katrs no tiem krustotu tieši 3 citus?

15. Skaitļa pieraksts sastāv tikai no vieniniekiem, un tas dalās ar 7. Pierādiet, ka tas dalās arī ar 37.

16. Uzzīmējiet kaut vienu slēgtu lauztu līniju, kuras posmi iet pa rūtiņu papīra līnijām un pēc kārtas ņemto posmu garumi ir 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 vienības (1 vienība - rūtiņas malas garums).

17. Dotas 4 pēc ārējā izskata vienādas monētas ar masām 1g, 2g, 3g, 4g. Ar četrām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem jānoskaidro, cik sver katra monēta. Kā to izdarīt?

18. Divdesmit klasēs ir pa 20 skolēniem katrā. Katram skolniekam ir zilas, pelēkas vai brūnas acis. Pierādiet, ka var atrast tādas divas klases, kurās sakrīt vai nu zilacaino, vai pelēkacaino, vai brūnacaino skolēnu skaits.

B grupa

19. Kāds mazākais kartīšu skaits ir jāizņem, lai noteikti varētu sastādīt skaitli, kas dalās ar 9 (skat. A grupas 1. uzdevumu)?

20. Vai var uzzīmēt 8 taisnes tā, lai katra no tām krustotu tieši 3 citas?

21. Rindā izrakstīti deviņi devītnieki. Kā pierakstīt rindas galā vēl 10 ciparus, lai iegūtais skaitlis būtu kāda naturāla skaitļa kvadrāts? Pietiek parādīt vienu veidu kā to izdarīt.

22. Atrisināt A grupas 4 uzdevumu, ja pēc kārtas ņemto posmu garumiem jābūt 1; 2; …; n, kur n=9; 10; 12; 16. Norāde: ne visos gadījumos šādu līniju tiešām var uzzīmēt.

23. Kādu svētdienu 8 draugi apmeklēja kino. Uz katru seansu aizgāja 3 no viņiem; nekādi divi draugi nebija kopā vairāk nekā vienā seansā. Kāds varēja būt lielākais iespējamais seansu skaits?

24. Papīra kvadrātu sagrieza 6 daļās; tās visas bija izliektas figūras. Viena no šīm daļām saglabājās, pārējās pazuda. Saglabājusies daļa ir regulārs astoņstūris. Vai var noskaidrot sākotnējā kvadrāta izmērus, ja mūsu rīcībā ir vienīgi šis astoņstūris?

3. kārtas uzdevumi

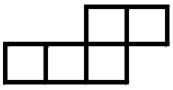
A grupa

25. No papīra bija izgriezts daudzstūris. Pēc tam ar vienu taisnu griezienu to sagrieza divās daļās - trijstūrī un četrstūrī. Cik malu varēja būt sākotnējam daudzstūrim?

26. Apskatām visus naturālos skaitļus no 1995 līdz 1000 000. Cik starp tiem ir tādu, kam ir tieši trīs (ne vairāk un ne mazāk) vienādu ciparu?

27. Atrodiet, kādi cipari aizstāti ar burtiem saskaitīšanas piemērā TRĪS+TRĪS=SEŠI. Zināms, ka vienādi cipari aizstāti ar vienādiem burtiem, bet dažādi - ar dažādiem (burtus I un Ī, kā arī S un Š uzskatām par vienādiem).

28. Taisnstūris sastāv no 6×10 rūtiņām. Kādu lielāko daudzumu figūru, kas parādītas 10. zīmējumā, var izgriezt?



10. zīm.

29. Atrodiet 6 dažādus naturālus skaitļus tā, lai katru piecu summa dalītos ar sesto (pietiek atrast vienu šādu skaitļu sistēmu). Vai var atrast 1995 dažādus naturālus skaitļus tā, lai katru 1994 skaitļu summa dalītos ar atlikušo?

30. Šaha turnīrā piedalījās n dalībnieki. Katri divi savā starpā izspēlēja divas partijas (vienreiz ar baltajām figūrām spēlēja viens, otrreiz - otrs). Katrs dalībnieks ar baltajām figūrām izcīnīja tikpat uzvaru, cik visi pārējie ar melnajām kopā. Pierādiet, ka visi dalībnieki izcīnīja vienu un to pašu uzvaru skaitu (uzskaitām uzvaras ar abu krāsu figūrām).

B grupa

31. Vai skaitlis $47\cdot53\cdot59\cdot65+49\cdot55\cdot61\cdot67$ dalās ar 3?

32. Pagājušajā gadā Karlsons katru nākošo mēnesi iztērēja par kūkām vairāk naudas nekā iepriekšējā mēnesī. Pierādiet, ka viņa vidējie izdevumi pirmajos piecos mēnešos bija mazāki nekā vidējie izdevumi visā gadā! (Karlsons citām vajadzībām naudu netērē.)

33. Uz Pasaku meža parlamenta sēdi ieradās 11 rūķīši, kas pārstāvēja 4 ciltis. Lai uzsvērtu savas draudzīgās attiecības, viņi grib sasēsties ap apaļu galdu tā, lai starp katriem pieciem pēc kārtas sēdošiem rūķīšiem būtu sastopami visu 4 cilšu pārstāvji. Pierādiet, ka viņiem neizdosies to izdarīt.

34. Plaknē uzzīmēts 11-stūris un atzīmēti tā malu viduspunkti. Parādiet, kā sanumurēt virsotnes un malu viduspunktus ar skaitļiem no 1 līdz 22 tā, lai visām malām abu galu un viduspunktu numuru summa būtu viena un tā pati.

35. Atrodiet **visas** iespējas, kā var izvēlēties 4 dažādus naturālus skaitļus ar īpašību: katru triju skaitļu summa dalās ar ceturto.

36. Vai kubu var sagriezt 100 mazākos kubos? (Starp, griežot iegūtajiem, kubiem daži var būt arī vienādi.)

4. kārtas uzdevumi

A grupa

37. Lietojot ciparus 1, 9, 9, 6 tieši šādā secībā un nepieciešamajā daudzumā aritmētisko darbību zīmes, kvadrātsaknes zīmi, apaļās iekavas un veselās daļas zīmi [ ], izsacīt pēc kārtas iespējami daudzus naturālos skaitļus, sākot ar 1.

Piemērs: $19+\sqrt{9}+6=28$.

Paskaidrojums: par skaitļa a veselo daļu [a] sauc lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz a. Piemēram, [4,2]=4; [5]=5.

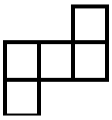
38. Uzrādīt visus veidus, kā skaitļus no 1 līdz 6 ieskaitot var sadalīt trijās grupās tā, lai katrā grupā būtu vismaz viens skaitlis un neviena grupa nesaturētu skaitļus, kas viens no otra atšķiras par 1.

39. Atrast kaut vienu naturālu skaitli A ar īpašību, ka visu to A ciparu summa, kas paši nedalās ar n, dalās ar n (n = 2; 3; 4; ...; 9).

40. Cik ir laukums taisnleņķa trijstūrim, kura hipotenūza ir 10 cm, bet augstums pret hipotenūzu ir 6 cm?

41. Atrast mazāko naturālo skaitli, kura ciparu reizinājums ir 952560000.

42. Vai 11. zīmējumā attēloto figūru, kas sastāv no 5 vienādiem kvadrātiem, var sagriezt 3 daļās tā, lai no šīm daļām varētu salikt vienu lielu kvadrātu?



11.zīm

B grupa

43. Vai plaknē var atzīmēt 5 punktus tā, lai vienlaicīgi izpildītos sekojošas divas īpašības:

a) nekādi 3 no atzīmētajiem punktiem neatrodas uz vienas taisnes,

b) starp katriem 3 atzīmētajiem punktiem var atrast gan divus tādus, starp kuriem attālums lielāks par 1 cm, gan divus tādus, starp kuriem attālums mazāks par 1 cm ?

44. Pieņemsim, ka līdzīgi kā A grupas 2. uzdevumā jāsadala naturālie skaitļi no 1 līdz 10 ieskaitot. Cik ir šādu sadalījumu?

45. Katrs no skaitļiem 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128 uzrakstīts uz divām kartiņām; pavisam ir 16 kartiņas. Dažas kartiņas nokrāsotas baltas, citas - sarkanas, citas - zaļas.

Ir zināms, ka tieši viena kartiņa ar skaitli 16 palikusi balta un ne sarkanā, ne zaļā krāsā nav nokrāsoti divi vienādi skaitļi.

Vai skaitļu summa uz sarkanajām kartiņām var būt vienāda ar skaitļu summu uz zaļajām kartiņām?

46. Uz kvadrāta ABCD malas BC ņemts patvaļīgs punkts M, bet uz malas CD tāds punkts N, ka leņķi MNA un DNA ir vienādi. Aprēķināt leņķa MAN lielumu.

47. Saīsināt daļu $\dfrac{1114807}{1426702}$.

48. Kādā valstī ir 5 pilsētas. Lai kuru no tām izvēlētos, var atrast divas citas pilsētas, kuras no izvēlētās ir ne tālāk kā 100 km.

Pierādīt, ka pilsētu nosaukumus var uzrakstīt rindā tādā secībā, ka katras divas blakus uzrakstītās pilsētas ir viena no otras ne tālāk kā 100 km.

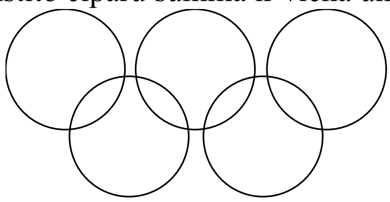
5. kārtas uzdevumi

A grupa

49. Samtcepure ir divreiz vecāks nekā Kaupiņš bija tad, kad Kaupiņam bija trīsreiz mazāk gadu nekā Samtcepurem būs tad, kad Samtcepure būs tikpat vecs, cik Kaupiņš ir tagad. Cik veci ir abi
Velēnu vecīša gariņi, ja viņu gadu starpība ir 666?

50. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 0; 99; 1996. Ja uz tāfeles jau atrodas 2 skaitļi, atļauts tur vēl uzrakstīt to abu vidējo aritmētisko; no tāfeles nekas netiek nodzēsts. Parādiet, kā uz tāfeles var iegūt skaitļus 1; 17; 1000. Kādus naturālus skaitļus vispār var iegūt?

51. Deviņos apgabalos, kurus ierobežo olimpiskie riņķi 12. zīm., ierakstīti 9 dažādi nenulles cipari tā, ka katrā riņķī ierakstīto ciparu summa ir viena un tā pati. Kā tā var būt?



12. zīm.

52. Vai izliektā 1996-stūrī visu leņķu lielumi var izsacīties ar veselu skaitu grādu?

53. Klasē ir 25 skolnieki. Starp katriem trim no tiem var atrast vismaz divus, kas savā starpā draudzējas. Pierādiet, ka var atrast skolnieku, kam klasē ir vismaz 12 draugi.

54. Kubs sadalīts $10\times10\times10$ mazākos vienādos kubiņos. Kādā lielākajā daudzumā kubiņu var iemitināt pa rūķītim tā, lai neviens netraucētu otru? Divi rūķīši traucē viens otru, ja tie dzīvo kubiņos, kuru centrus savienojošā taisne paralēla kādai no kuba šķautnēm.

B grupa

55. Atrodiet kaut vienu naturālu skaitli, kas pats dalās ar 7 un ar 13 un kura ciparu summa arī dalās ar 7 un ar 13.

56. Uzzīmējiet 12 riņķa līnijas tā, ka nekādas divas no tām nekrustojas un katra pieskaras tieši piecām citām. Pietiek parādīt vienu veidu kā to izdarīt.

57. Ņurga, Ceips un Skritals ellē nodibinājuši SIA, kas elles iekšējām vajadzībām ražo kurināmā kubiņus. Katra kubiņa katra skaldne nokrāsota vienā no velnu iemīļotajām krāsām: violeta, melna, sarkana, zila, zaļa vai dzeltena. Katram kubiņam visas skaldnes ir dažādas. Cik dažādus kubiņus var ražot SIA?

58. Dots, ka *a, b, c, d* - kaut kādi skaitļi, bet $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+d}{2}$, $\frac{d+a}{2}$ - šie paši skaitļi, tikai var būt citā kārtībā. Pierādīt, ka $a=b=c=d$!

59. Figūra "pūķis" pārvietojas pa rūtiņu lapu (pieņemsim, ka lapa ir neierobežota). Ar vienu gājienu pūķis no rūtiņas, kurā pašreiz atrodas, var pāriet uz jebkuru no 8 rūtiņām, kas atrodas attālumā 1 pa horizontāli un attālumā n pa vertikāli vai attālumā n pa horizontāli un attālumā 1 pa vertikāli (rūtiņas malas garums ir 1). Ir zināms, ka pūķis var aiziet no jebkuras rūtiņas uz jebkuru citu, lietojot šim nolūkam vairākus gājienus. Kāds var būt n?

60. Apskatām A grupas 6. uzdevumā minēto kubu. Parādīt, ka tajā var iemitināt 50 rūķīšus tā, ka nevienu citu iemitināt vairs nevar.

6. kārtas uzdevumi

A grupa

61. Atrast visus trīsciparu skaitļus, kas dalās ar visu savu ciparu reizinājumu.
62. Atrisināt vienādojumu $[x]\times\{x\}=1996x$, kur $[x]$ un $\{x\}$ ir skaitļa x veselā daļa un daļveida daļa.
63. Pa apli uzrakstīti 11 skaitļi. Katru četru pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa ir 20. Kādi skaitļi ir uzrakstīti?
64. Vai var izgatavot tādu taisnstūra paralēlskaldni ("ķieģeli"), kura virsmu var aplīmēt ar 5 vienādiem taisnstūriem, lai tie nekur nepārklātos un nepaliktu neaplīmētas vietas?
65. Sauksim par izliekta četrstūra superperimetru tā visu malu un diagonāļu garumu summu. Viens izliekts četrstūris atrodas otra iekšpusē. Vai iekšējā četrstūra superperimetrs var būt lielāks par ārējā četrstūra superperimetru?
66. Vai izteiksmē 1:2:3:4:5:6:7:8:9:10 var ievietot iekavas tā, lai tās vērtība būtu a) 7, b) 35?

B grupa

67. Naturāls skaitlis izsakāms kā triju naturālu skaitļu kvadrātu summa. Pierādīt, ka tā kvadrāts arī izsakāms tādā pašā veidā.
68. Caur trijstūra mediānu krustpunktu novilkta taisne. Trijstūra laukums ir 9 cm^2. Pierādīt, ka abu daļu laukumi, kurās taisne sadala trijstūri ir vismaz 4 cm^2.
69. Uz riņķa līnijas atzīmēti 10 punkti. Tie pa pāriem jāsavieno ar 5 nogriežņiem tā, lai nogriežņiem nebūtu kopēju punktu. Cik dažādos veidos to var izdarīt?
70. Plaknē uzzīmēti 1996 trijstūri. Katrs no tiem satur (iekšpusē vai uz kontūra) vismaz četras citu trijstūru virsotnes. Pierādīt, ka var atrast 3 trijstūrus, kam ir kopīgs punkts.
71. Pierādiet, ka iekšējā četrstūra superperimetrs noteikti mazāks nekā divkāršots ārējā četrstūra superperimetrs (skat. A grupas 5. uzdevumu).
72. Simt kastītēs atrodas kopā 200 konfektes. Vispirms vienu konfekti apēd Jānis, pēc tam - Andris, tad atkal Jānis utt. Pierādīt, ka Andris var panākt, lai pēdējās divas neapēstās konfektes atrastos vienā kastītē.