„Profesora Cipariņa kluba” 1998./99.m.g.
uzdevumu atrisinājumi

1. a) x … tik monētu vienā makā

2x … tik monētu otrā makā

Jā, tā var gadīties.

$x + 2x = 12$

$3x = 12$

$x = 12 : 3$

$x = 4$ (m.)

$2x = 2 \cdot 4 = 8$ (m.)

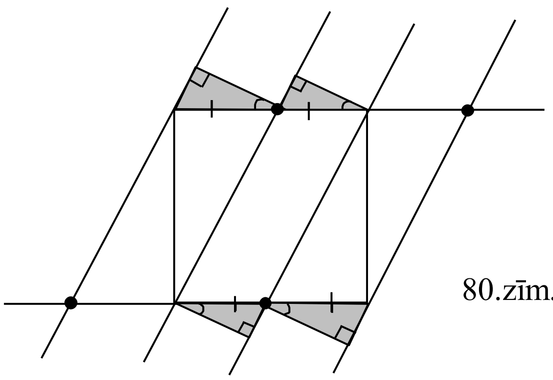
Vienā makā ir 4, bet otrā – 8 monētas.

b) Jā. Vienā makā 5 monētas, un šis maks līdz ar citām 5 monētām ievietots otrā makā.

2. Piemēram, šāds variants :

$$-1 \cdot 2 + (3 \cdot 4 + 5) \cdot 6 = 100 \text{ vai } 1 + (2 + 3 + 4) \cdot (5 + 6) = 100.$$

3. Jāatrod pretējo malu viduspunktus. Šīs malas jāpagarina. Uz pagarinājuma aiz virsotnes jāatliek malas puse. Tad jāvelk taisnes caur kvadrāta virsotnēm un atrastajiem punktiem tā, kā parādīts 80. zīmējumā.



80.zīm.

Attālumu vienādība izriet no mazo taisnleņķa trijstūru vienādības (pazīme hl).

4. x … tik floderi

y … tik limpongi

$$\frac{1}{9}x = \frac{1}{10}y$$

$$x = \frac{9}{10}y \Rightarrow x < y$$

Tātad floderu ir mazāk nekā limpongu.

5. Nē, tā nav taisnība. Ja izvēlamies šādus nogriežņu a_k garumus: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; … (a_1 =1, a_2 = 1, a_{k+1} = a_{k-1} + a_k, $k \geq 2$), tad nevar atrast 3 tādus nogriežņus, kuri derētu par kāda trijstūra malām.

6. Visi spēlētāji kopā nospēlēja 5 · 40 min = 200 min. 200 min = 12 000 sek. Tā kā komandā ir 12 spēlētāju, tad katrs spēlētājs nospēlēja 12 000 : 12 = 1 000 (sek.) = 16 min 40 sek.

7. Vīriešu skaitu apzīmējam ar n. Tad arī sieviešu skaits ir n, un pavisam tātad ir 2n deputātu. Ja sēdē "pret" balso x parlamentārieši, tad "par" jābalso x + 17 parlamentāriešiem. Tas nozīmē, ka, lai pieņemtu kādu lēmumu ar 17 balsu pārsvaru,

x + (x + 17) = 2n

$\underbrace{2x}_{p} + \underbrace{17}_{n} = \underbrace{2n}_{p}$ - pretruna (pāra skaitli saskaitot ar nepāra skaitli, nevar iegūt pāra skaitli). Tātad parlaments nevar pieņemt lēmumu ar 17 balsu pārsvaru.

8. Ja skaitļi n, S(n), S(S(n)) un S(S(S(n))) visi ir dažādi un mazākais no tiem ir 3, tad S(S(S(n))) = 3. Lai n būtu mazākais, tad S(S(n)) jāņem divciparu skaitlis, jo nav cita viencipara skaitļa ar ciparu summu 3, izņemot skaitli 3. Divciparu skaitļi, kuriem ciparu summa 3, ir: 12, 21 un 30. Tātad $S(S(n)) \geq 12$. Meklējam atkal divciparu skaitli, kuram ciparu summa 12. Šādi skaitļi ir: 39; 48; 57; 66; 75; 84 un 93. Tātad $S(n) \geq 39$. Ciparu summai 39 atbilst noteikti piecciparu skaitlis, jo lielākā četrciparu skaitļa ciparu summa ir 9+9+9+9 = 36. Piecciparu skaitļa pirmais cipars nevar būt ne 1, ne 2, lai pārējo četru ciparu summai nebūtu jāpārsniedz 36. Mazākais piecciparu skaitlis ar ciparu summu 39 ir 39999.

Atbilde. n=39999.

9. Ja segas malas garums nepārsniedz 10 m, tad lielākais attālums starp segas punktiem nepārsniedz $10\sqrt{2}$ < 15 m. Bet tad katra dobes stūra pārsegšanai vajag citu segu.

10. Kā divu dažādu saliktu skaitļu summu nevar izteikt šādus pirmskaitļus: 2; 3; 5; 7 un 11. Pārējie pirmskaitļi beidzas ar 1; 3; 7 vai 9, bet tos var izteikt šādi:

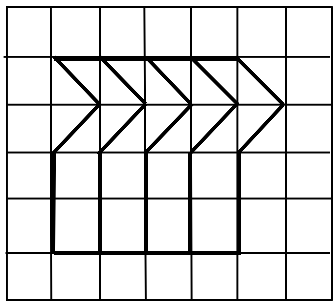
$$\left.\begin{aligned}\overline{n1} &= \overline{(n-2)0} + 21\\ \overline{n3} &= \overline{(n-1)4} + 9\\ \overline{n7} &= \overline{(n-1)8} + 9\\ \overline{n9} &= \overline{n5} + 4\end{aligned}\right. \text{, n – naturāls skaitlis.}$$

$\overline{(n-2)0}; \overline{(n-1)4}; \overline{(n-1)8}$ un 4 ir pāra skaitļi (dalās ar 2), 9 un 21 dalās ar 3, bet $\overline{n5}$ dalās ar 5, tātad visi ir salikti skaitļi.

11. Ja kvadrātu centri sakrīt, apgalvojumu pierāda, pagriežot zīmējumu par 90^0 ap kopējo centru. Pretējā gadījumā paralēli pārbīda iekšējo kvadrātu, līdz tā centrs O_1 sakrīt ar lielā kvadrāta centru O_2. Pētāmie viduspunkti pārbīdās par nogriežņiem ar garumu $\frac{1}{2}O_1O_2$ kas paralēli O_1O_2. Tā kā pēc pārbīdes tie veido kvadrātu, tad tāpat bija pirms pārbīdes.

12. Jā, tā notiek, piemēram, ja komandās ir šahisti ar numuriem {2, 6, 7}, {1, 5, 9} un {3, 4, 8} un katrā spēlē uzvar šahists ar mazāko numuru. Visu uzdevumā minēto sacensību rezultāti ir 5 : 4.

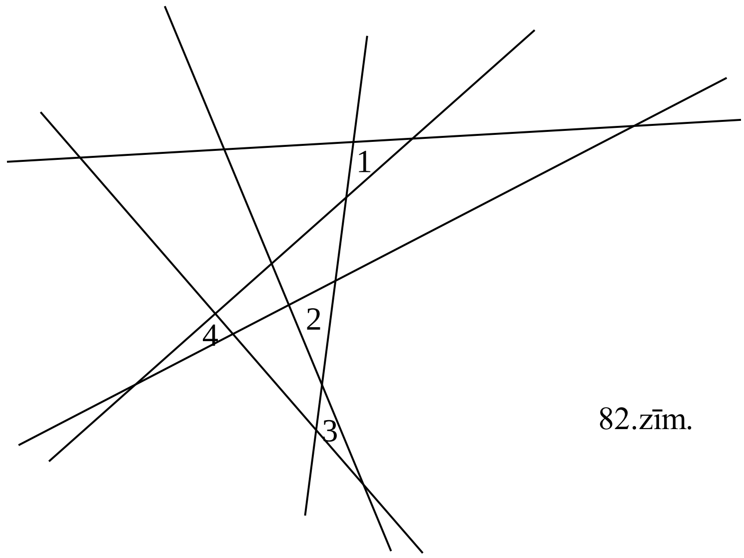
13. Sk. 81. zīm.



81.zīm.

14. Piemēram, skaitļi 3; 5; 6 un 7.

15. Sk. 82. zīm.



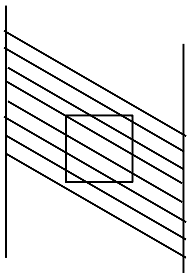
82.zīm.

16. Der a =5; b =4 un c =21, jo $(5^2+1)(4^2+1)=26 \cdot 17=442$ un $21^2+1=441+1=442$.

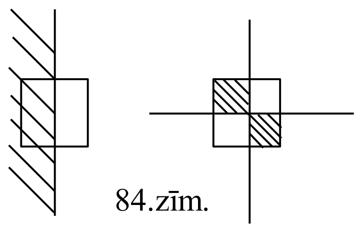
17. Ja ar katras valsts karogiem ir tieši 5 nozīmītes, viss kārtībā. Ja tā nav, tad no kādas valsts A ir x nozīmītes, $x \le 4$, un no kādas citas valsts B ir y nozīmītes, $y \ge 6$. Vienā kastītē ieliekam x nozīmītes no valsts A un (5 - x) nozīmītes no valsts B. Ielikšanai paliek 20 nozīmītes ar 4 valstu karogiem un 4 kastītes. Tālāk turpinām līdzīgi.

18. Doto kvadrātu ar izmēriem 200×200 rūtiņas sadala 10 000 kvadrātos ar izmēriem 2×2 rūtiņas. Novelkot horizontālās un vertikālās taisnes, katrs kvadrātiņš ar izmēriem 2×2 rūtiņas var atrasties:

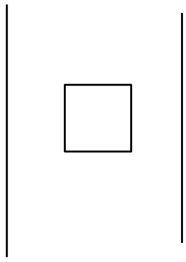
1) pilnīgi iekrāsotajā daļā (sk. 83. zīm.);
2) daļēji iekrāsotajā daļā (sk. 84. zīm.);
3) pilnīgi neiekrāsotajā daļā (sk. 85. zīm.)



83.zīm



84.zīm.



85.zīm

Apskatot 1), 2) un 3) gadījumu redzam, ka baltā krāsā nokrāsoto kvadrāta rūtiņu skaits vienmēr ir pāra skaitlis.

Tā kā tas ir pāra skaitlis katrā no 10 000 kvadrātiņiem, tad tas ir pāra skaitlis arī visos tajos kopā, t.i., lielajā 200×200 rūtiņu kvadrātā.

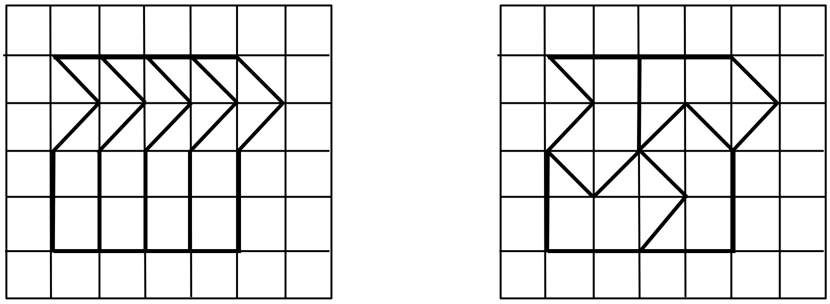
19. $A(x) \cdot B(x) \geq 1998$.

Tā kā $0 \leq B(x) < 1$, jābūt $A(x) \geq 1999$.

Pie A(x) = 1999 der B(x) = $\frac{1998}{1999}$ un x = $1999\frac{1998}{1999}$.

Ja $A(x) \geq 2000$, arī $x \geq 2000$.

20. Sk. 86. zīm.



86.zīm.

21. Ņemam patvaļīgu taisni t un tai tuvāko citu taišņu krustpunktu M. Trijstūri ar virsotni M un pamatu uz t nekrusto neviena cita taisne, citādi M nebūtu t tuvākais krustpunkts. Tātad blakus taisnei t ir vismaz viens trijstūris. Katrs trijstūris ir blakus trim taisnēm, un taisnes ir sešas, tātad trijstūru ir vismaz 6:3=2.

22. Jā. Piemēram, a=2000, b=1999, c=3998001

2000^2+1=4000001

1999^2+1=3996001

3 996 002 · 4 000 001=15 984 011 996 002

3 998 001^2+1=15 984 011 996 002

Šādus skaitļus var izvēlēties bezgalīgi daudz veidos: izvēlas b, tad a=b+1 un c=a^2-b.

Pārbaudām:

$(a^2+1)(b^2+1)=$

$=((b+1)^2+1)(b^2+1)=$

$=(b^2+2b+2)(b^2+1)=$

$=b^4+2b^3+2b^2+b^2+2b+2=$

$=b^4+2b^3+3b^2+2b+2$ un

$c^2+1=$

$=((b+1)^2-b)^2+1=$

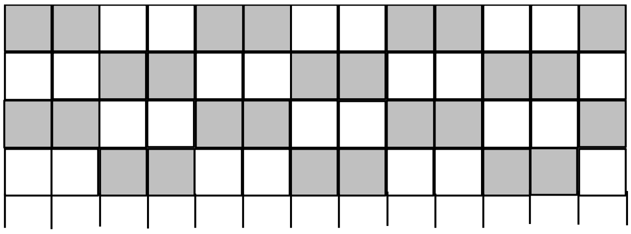
$=(b^2+b+1)^2+1=$

$=b^4+b^2+1+2b^3+2b^2+2b+1=$

$= b^4+2b^3+3b^2+2b+2$

Redzam, ka rezultāti vienādi!

23. Nē. Izkrāsojam kvadrātu, kā parādīts 87. zīmējumā. Pēc centrālās rūtiņas izgriešanas, tajā paliek par 2 melnām rūtiņām vairāk nekā baltām, bet katrs taisnstūris 1×4 pārklāj 2 melnas un 2 baltas rūtiņas.

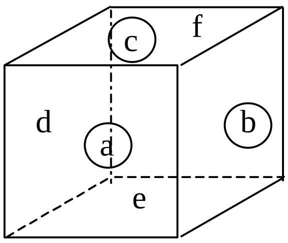


87.zīm.

24. Eksistē spēlētājs, kam ir vismaz 4 uzvaras. Atmetam viņu un tos, ko viņš uzvarējis; starp atlikušajiem eksistē tāds, kas uzvarējis vismaz pusi atlikušo pretinieku, utt. Kad atrasti 5 šādi spēlētāji, vismaz 3 no tiem ir no vienas komandas; tie ir meklējamie.

25. No visiem divciparu skaitļiem izrakstām tos, kuri apmierina uzdevuma nosacījumus: 11; 12; 15; 22; 24; 33; 36; 44; 48; 55; 66; 77; 88; 99. Pavisam ir 14 skaitļi, kas dalās ar katru no saviem cipariem.

26. a; b; c – skaitļi uz redzamām skaldnēm, d; e; f – skaitļi uz neredzamām skaldnēm (sk. 88. zīm.)



88.zīm.

Pēc dotā ade + abe + bef + def + acd +abc + bcf + dcf = 105

a(de + be + cd + bc) + f(de + be + dc + bc) = 105

(a+f)(de + be + cd + bc) = 105

(a + f)(d(e +c) + b(e+c)) = 105

(a+f)(d+b)(e+c) = 105. Katrs reizinātājs lielāks nekā 1, jo a; b; c; d; e; f – naturāli skaitļi. Sadalām skaitli 105 pirmreizinātājos:

$105 = 3 \cdot 35 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Tātad visu uz skaldnēm uzrakstīto skaitļu summa

a + b + c + d + e + f = 3 + 5 + 7 = 15.

27. Ja nebūtu garo gadu (februāra ar 29 dienām), tad nākamais šāds gads būtu pēc 6 gadiem 7. gadā. Tā kā 2000. gads un katrs ceturtais gads ir garais gads, tad jāmeklē skaitļu 4 un 7 mazākais kopīgais dalāmais.

MKD (4; 7) = 28.

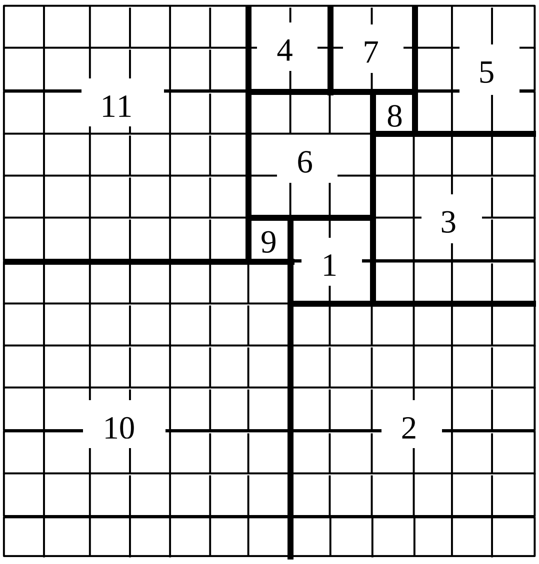
Tātad nākamais gads ar šādu īpašību būs 1998 + 28 = 2026. gads.

28. Ierakstīto skaitļu summa ir 20. Kā to izdarīt, redzams 89. zīm.

1	8	3
6	5	4
7	2	9

89.zīm.

29. Sk. 90. zīm.



90.zīm.

30. Andris risinājumā balstās uz Fibonači skaitļu virkni F_1=1, F_2=2, F_3=3, F_4=5, F_5= 8, F_6=13, F_7=21, F_8=34, F_9=55, F_{10}=89. Ar katru jautājumu Andris sadala vēl atlikušās F_x hipotēzes grupās pa F_{x-2} un F_{x-1} un prasa: "Vai skaitlis ir grupā ar lielumu F_{x-2}?"

31. Tādu skaitļu ir 55.

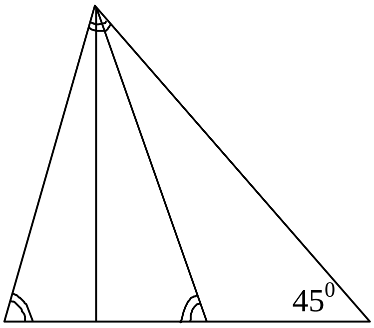
32. 120 karkasus, ja par vienādiem uzskata tādus, ko var savietot, lai krāsas pilnībā sakristu; 30, ja simetriskus karkasus arī uzskata par vienādiem.

33. Novelkot visas izliekta 100 – stūra diagonāles, kuras savstarpēji nekrustojas, 100 – stūris būs sadalīts x trijstūros. Ja tā nebūtu, tad kāda daļa būtu 4 – stūris, 5 – stūris, utt. un tajā varētu novilkt vēl diagonāles.

Iegūto trijstūru virsotnes sakrīt ar dotā 100 – stūra virsotnēm. Tāpēc visu x trijstūru iekšējo leņķu lielumu summa $180^0 \cdot x$ ir vienāda ar 100 – stūra iekšējo leņķu lielumu summu $180^0 \cdot (100-2) = 180^0 \cdot 98$.Tāpēc x = 98. Diviem no tiem divas malas ir daudzstūra malas (jo daudzstūra malu ir 100). No to kopējām virsotnēm diagonāles neiziet.

34. Sastādot atbilstošos vienādojumus, iegūstam, ka ar precizitāti līdz pagriezienam un simetrijām 89. zīmējumā parādītais veids ir vienīgais.

35. Jā, eksistē. Sk. 91. zīm.



91.zīm.

36. Ja monētas izvietošanas secībā (sākot no patvaļīgas vietas) ir A, B, C, D, E, F, G, H, I, tad pirmajā svēršanā uz viena svaru kausa novietojam A un C, uz otra – F un G. Ja A+C < F+G, tad nākamajā svēršanā uz viena svaru kausa liek A un C, uz otra E. Ja A+C < E, tad 1g monēta ir A, ja A+C > E, tad 1g monēta ir H, bet ja A+C = E, tad 1g monēta ir I. Ja pēc pirmās svēršanas A+C > F+G, tad otrajā reizē sver F un G uz viena svaru kausa, I – uz otra svaru kausa. Ja F+G > I, tad 1g monēta ir D, ja F+G = I, tad 1g monēta ir E, ja F+G < I, tad 1g monēta ir F. Ja pēc pirmās svēršanas A+C = F+G, tad uz viena svaru kausa liek D un E, uz otra H. Ja D+E = H, tad 1g monēta ir B, ja D+E < H, tad 1g monēta ir C, ja D+E > H, tad 1g monēta ir G.

„Profesora Cipariņa kluba" 1998./99.m.g. uzdevumu ievaduzdevumu atrisinājumi

1. a) Otrajā puķu dobē zied $9 \cdot 2 = 18$ rozes, tātad abās puķu dobēs zied 9 +18 = 27 rozes;

   b) Šajā gadījumā otrajā puķu dobē zied $14 \cdot 2 = 28$ rozes, tātad abās puķu dobēs zied 9 + 28 = 37 rozes;

   c) Ja pirmajā puķu dobē zied k rozes, tad otrajā – 2k rozes un abās dobēs kopā zied k + 2k = 3k rozes.

2. (12 – 3 - 4) : 5 = 1

   (1 · 2 · 3 + 4) : 5 = 2

   (1 + 2 + 3 · 4) :5 = 3

   12 · 3 : 4 – 5 = 4

12 : 3 : 4 · 5 = 5

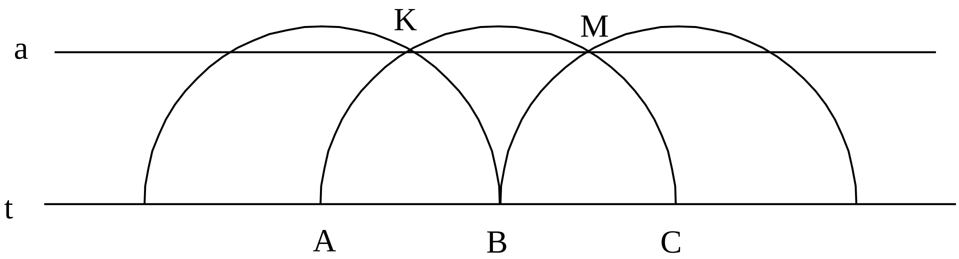
1 · 2 + 3 – 4 + 5 = 6

1 + 2 + 3 – 4 + 5 = 7

12 – 3 + 4 – 5 = 8

1 · 2 · (3 + 4) – 5 = 9

3. Sk. 47. zīm.



47.zīm.

Uz dotās taisnes t izvēlamies punktu A un novelkam riņķa līnijas loku ar centru A, kas krusto riņķa līniju punktā B. Tad novelkam tādu pat riņķa līnijas loku ar centru punktā B. Šī loka krustpunkts ar taisni t ir punkts C. Un vēl velkam tādu pat riņķa līnijas loku ar centru punktā C. Riņķa līniju loki ārpus taisnes t krustojas punktos K un M. Caur šiem punktiem velkam taisni a. Esam ieguvuši, ka t || a,

jo $\Delta AKB = \Delta BMC$ (malas ir vienādu riņķa līniju rādiusi) un abi ir vienādmalu trijstūri. Novelkot no K augstumu pret AB un no M – pret BC, tie arī ir vienādi kā vienādu trijstūru atbilstošie augstumi.

6. Katra komanda veic $5 \cdot 100m = 500m$ lielu attālumu. Ja sacensībās piedalās 7 komandas, tad tās kopā veic $7 \cdot 500m = 3500m = 3{,}5km$ lielu attālumu.

7. Nē, tā nevar gadīties. Katrs dalībnieks var iegūt tikai pāra skaitu punktu, bet skaitlis 13 ir nepāra.

8. a) mazākais četrciparu skaitlis ir 1000. Tā ciparu summa ir 1.

   b) lielākais četrciparu skaitlis ir 9999. Tā ciparu summa ir 36, bet 36 ciparu summa ir 9.

10. Piemēram,13 = 9 + 4,

    17 = 9 +8,

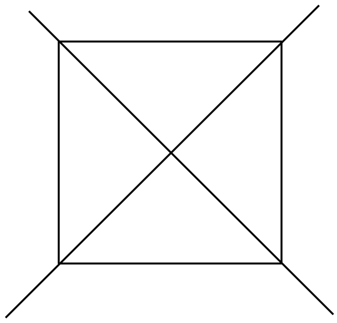
    23 = 14 +9,

    29 = 25 + 4,

    31 = 21 + 10.

13. a) Pavisam ir $3 \cdot 3 = 9$ rūtiņas, kas jāsadala 4 vienādās daļās. 9 : 4 = 2,25 , tātad rūtiņas jādala daļās un sagriezt kvadrātu tā, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, nevar.

b) Jā, var. Piemēram, sk. 48. zīm.

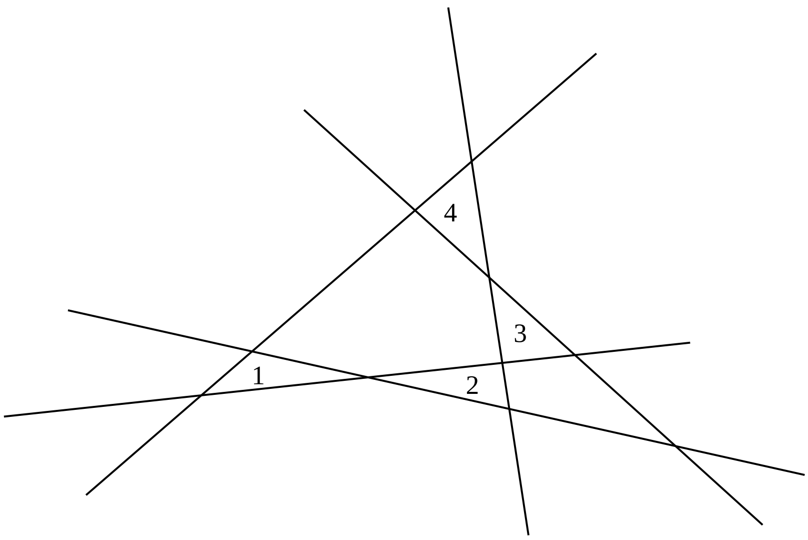


48.zīm.

14. Ņemam skaitļus 7, 10, 11, 14. To iespējamās summas pa diviem, pa trim, pa četriem:

7 + 10 = 17	7 + 10 + 11 = 28	7 + 10 + 11 +14 = 42
7 + 11 = 18	7 + 10 + 14 = 31	
7 + 14 = 21	7 + 11 + 14 = 32	
10 +11 = 21	10 + 11 + 14 = 35	
10 +14 = 24		
11 + 14 = 25		

15. Sk. 49. zīm.



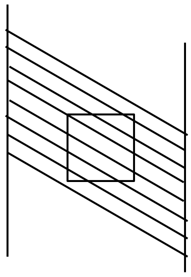
49. zīm.

16. Der, piemēram, skaitļi: a = 3, b = 4 un c = 5, jo $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

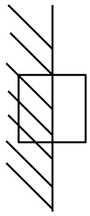
18. Katrs kvadrātiņš ar izmēriem 2×2 rūtiņas var atrasties:

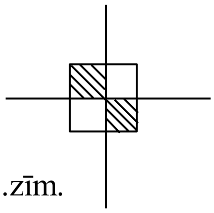
1) pilnīgi iekrāsotajā daļā (sk. 50. zīm.);
2) daļēji atrasties iekrāsotajā daļā (sk. 51. zīm.);

3) neatrasties iekrāsotajā daļā (sk. 52. zīm.)

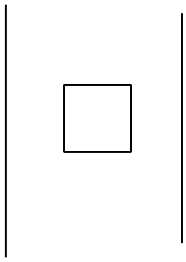


50.zīm





51.zīm.



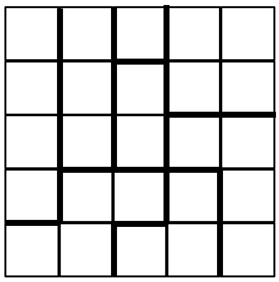
52.zīm

25. Piemēram, 11; 12; 15; 22 un 33.

27. a) Šogad februārī, martā un novembrī 13. datums būs sestdienā.

 b) 2000. gadā februārī ir 29 dienas, tāpēc 13. februāris būs svētdienā, bet 13. marts un 13. novembris būs pirmdienā.

29. Kvadrātā 5×5 ir 25 rūtiņas. Jo daļas sastāvēs no mazāka skaita rūtiņu, jo vairāk daļu var iegūt. Ar 1 rūtiņu ir iespējama tikai 1 veida figūra, ar 2 rūtiņām – 1 veida, ar 3 rūtiņām – 2 veidu, ar 4 rūtiņām – 5 veidu figūras. Kopā ir 29 rūtiņas. Mums nepieciešamas 25 rūtiņas. Tātad jāatmet viena 4 rūtiņu figūra. To, ka pārējās var izvietot dotajā kvadrātā, parāda 53. zīmējums.



53.zīm.