Materiāls sagatavots no darba: Renāte Bondare „Uzdevumu krājums matemātikas padziļinātai mācīšanai 5. – 9. Klasēs", 2003.g.

Šis materiāls satur „Profesora Cipariņa kluba" 1998./99.m.g. 3 nodarbību uzdevumus, atrisinājumus, kā arī vairākus ievaduzdevumus un to atrisinājumus.

PROFESORA CIPARIŅA KLUBS (1. – 36.)

1. NODARBĪBA (1. – 12.)

A grupa (1. – 6.)

1. Vai var gadīties, ka vienā makā ir divas reizes vairāk monētu nekā otrā, ja abos makos pavisam ir a) 12 monētas, b) 10 monētas?
2. Ciparu virknē 1 2 3 4 5 6 ievietot iekavas un aritmētisko darbību zīmes tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu 100. Centieties atrast vairākus veidus, kā to izdarīt.
3. Caur visām četrām kvadrāta virsotnēm jānovelk pa taisnei tā, lai tās visas būtu savā starpā paralēlas un lai visi attālumi starp blakus esošām taisnēm būtu vienādi. Kā to izdarīt, lietojot lineālu un cirkuli?
4. Viena devītā daļa no floderiem ir arī limpongi, bet viena desmitā daļa no limpongiem ir arī floderi. Kuru ir vairāk – floderu vai limpongu?
5. Vai taisnība, ka no katriem 1998 nogriežņiem var izvēlēties trīs tādus, kas atbilstoši vienādi ar kāda trijstūra malām?
6. Basketbola komandā ir 12 spēlētāju, spēle ilgst 40 minūtes un vienlaicīgi tajā piedalās 5 spēlētāji (spēlētāji spēles gaitā mainās). Cik ilgi spēlēja katrs spēlētājs, ja visi nospēlēja vienādu laiku?

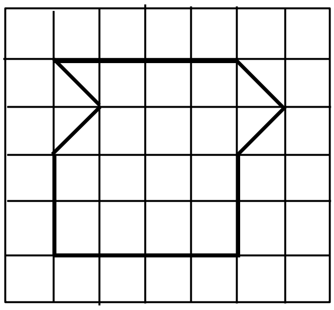
B grupa (7. – 12.)

7. Parlamentā ir vienāds skaits vīriešu un sieviešu, visi apmeklē visas sēdes un balsojumos nekad neatturas (t.i., vienmēr balso "par" vai "pret"). Vai parlaments var kādu lēmumu pieņemt ar 17 balsu pārsvaru?
8. Ja n – naturāls skaitlis, tad ar S(n) apzīmējam tā ciparu summu. Atrast mazāko tādu n, ka skaitļi n, S(n), S(S(n)) un S(S(S(n))) visi ir dažādi un mazākais no tiem ir 3.
9. Kvadrātiskas dobes malas garums ir 15 m. Tā pilnībā pārklāta ar trim vienādām kvadrātiskām segām. Pierādīt, ka katras segas malas garums lielāks par 10 m.
10. Kurus pirmskaitļus nevar izsacīt kā divu dažādu saliktu skaitļu summu?
11. Kvadrāts ABCD atrodas kvadrāta MNKL iekšpusē (abiem virsotnes norādītas pulksteņa rādītāju kustības virzienā). Pierādīt, ka nogriežņu AM, BN, CK, DL viduspunkti ir kāda trešā kvadrāta virsotnes.
12. Deviņi šahisti visi ir ar dažādu spēles prasmi, un katrā spēlē vienmēr uzvar spēcīgākais (neizšķirtu tātad nav). Viņi sadalīti 3 komandās pa trim šahistiem katrā. Katra komanda sacenšas ar katru no abām pārējām, pie tam katrā sacensībā visi vienas komandas šahisti spēlē ar visiem otras komandas šahistiem. Vai var gadīties, ka pirmā komanda uzvar otro, otrā – trešo, bet trešā – pirmo?

2. NODARBĪBA (13.- 24.)

A grupa (13.- 18.)

13. Parādiet, kā 13. zīm. rūtiņu lapā attēloto figūru var sagriezt 4 vienādās daļās. Pietiek uzrādīt vienu veidu, kā tas izdarāms.



13.zīm.

14. Atrodiet kaut vienu tādu 4 naturālu skaitļu komplektu, kas visi mazāki par 8 un kam piemīt īpašība: visas iespējamās šo skaitļu summas pa diviem, pa trim un pa četriem atšķiras gan savā starpā, gan no pašiem sākotnējiem skaitļiem.

15. Novelciet plaknē sešas taisnes tā, lai katras divas no tām krustotos, nekādas trīs neietu caur vienu punktu un starp daļām, kurās tās sadala plakni, būtu tieši 4 trijstūri.

16. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi a, b un c, kas visi lielāki par 3 un apmierina vienādību $(a^2+1)(b^2+1) = c^2+1$?

17. Maija uzdāvināja Aijai 25 nozīmītes ar 5 dažādu valstu karogiem. Aijai ir 5 kastītes; katrā var ievietot tieši 5 nozīmītes. Pierādīt, ka Aija var ielikt nozīmītes kastītēs tā, lai katrā kastītē būtu ne vairāk kā divu dažādu valstu nozīmītes.

18. Kvadrāts sastāv no 200×200 rūtiņām. To krusto vairākas horizontālas un vairākas vertikālas taisnes; katra no tām iet pa rūtiņu līnijām. Šīs taisnes sadala kvadrātu taisnstūros; taisnstūri izkrāsoti šaha galdiņa kārtībā. Pierādīt, ka balto rūtiņu ir pāra skaits.

B grupa (19. – 24.)

19. Ar A(x) apzīmējam pozitīva skaitļa x veselo daļu, ar B(x) – daļveida daļu. (Piemēram, A(4,7)=4 un B(4,7)=0,7.) Atrast mazāko tādu x, ka $A(x) \cdot B(x) \geq 1998$.

20. Parādīt divus dažādus veidus, kā var izpildīt A grupas 93. uzdevumu.

21. Pierādiet: novelkot 6 taisnes tā, kā aprakstīts A grupas 95. uzdevumā, vienmēr radīsies vismaz 2 trijstūri.

22. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi a, b, c, kas apmierina A grupas 96. uzdevuma vienādību un visi lielāki par 1998? Cik pavisam veidos var izvēlēties tādus skaitļus?

23. Kvadrāts sastāv no 13×13 rūtiņām; no tā izgriezta centrālā rūtiņa. Vai atlikušo daļu var sagriezt 42 taisnstūros ar izmēriem 1×4?

24. Divās galda tenisa komandās katrā ir pa 7 spēlētājiem. Katrs vienas komandas spēlētājs spēlē ar katru otras komandas spēlētāju tieši vienu reizi; neizšķirtu nav. Pierādīt, ka pēc sacensību beigām var atrast 3 spēlētājus no vienas komandas tā, ka katrs otras komandas spēlētājs zaudējis vismaz vienam no šiem trim.

3.NODARBĪBA (25. – 36.)

A grupa (25. – 30.)

25. Cik ir tādu divciparu skaitļu, kas dalās ar katru no saviem cipariem?

26. Uz katras kuba skaldnes uzrakstīja pa naturālam skaitlim. Pēc tam katrai virsotnei aprēķināja to triju skaitļu reizinājumu, kas uzrakstīti skaldnēs, kuras satur šo virsotni. Visu iegūto 8 reizinājumu summa ir 105. Atrast visu uz skaldnēm uzrakstīto skaitļu summu.

27. Pagājušajā, 1998. gadā, trīs mēnešos (februārī, martā un novembrī) 13. datums bija piektdienā. Kurš gads būs nākošais ar šādu īpašību?

28. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Ierakstīt rūtiņās skaitļus no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā citu skaitli) tā, lai katrās 4 rūtiņās, kuru centri veido kādu kvadrātu, ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati. Pietiek parādīt vienu veidu kā to izdarīt.

29. Kvadrāts sastāv no 13×13 rūtiņām. Griežot pa rūtiņu līnijām, sagriezt to iespējami mazākā skaitā mazāku kvadrātu. (Līdzšinējais rekords ir 11.)

30. Jānis iedomājies kādu naturālu skaitli no 1 līdz 89. Andris var uzrakstīt uz tāfeles jebkuru skaitļu grupu un pajautāt Jānim, vai iedomātais skaitlis ir kāds no uzrakstītajiem. Par atbildi "jā" Andris maksā Jānim 2 santīmus, par atbildi "nē" – 1 santīmu. Parādiet, kā Andris var atrast Jāņa iedomāto skaitli, samaksājot ne vairāk kā 10 santīmus.

B grupa (31. – 36.)

31. Cik ir tādu trīsciparu naturālu skaitļu, kas dalās ar katru no saviem cipariem?

32. Doti 6 vienāda garuma dažādu krāsu stienīši. Tos savienojot ar galiem, izveido trijstūra piramīdas karkasu. Cik dažādu karkasu var izveidot?

33. Izliekts 100-stūris sadalīts trijstūros, novelkot nekrustojošās diagonāles. Pierādīt, ka no divām virsotnēm neiziet neviena diagonāle.

34. Atrast visus iespējamos veidus, kā apmierināt 108. uzdevuma prasības.

35. Vai eksistē tāds vienādsānu trijstūris, kuru var sagriezt trīs trijstūrīšos ar īpašību: no katriem diviem trijstūrīšiem var salikt vienādsānu trijstūri?

36. Pa apli novietotas vienāda izskata monētas, kuru masas (novietošanas secībā) ir 1g, 2g, …, 9g. Ar divām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast 1g smago monētu.

Ievaduzdevumi

1. Vienā puķu dobē zied a) 9 rozes, b) 14 rozes, c) k rozes, bet otrā – divas reizes vairāk. Cik rožu zied abās puķu dobēs kopā?
2. Parādīt, kā ciparu virknē 1 2 3 4 5 ievietot aritmētisko darbību zīmes un iekavas tā, lai iegūtu visus viencipara naturālos skaitļus.
3. Dota taisne. Uzzīmēt tai paralēlu taisni, izmantojot cirkuli un lineālu.

6. Stafetē katrā komandā ir 5 dalībnieki. Katram dalībniekam jāveic 100 m garš stafetes posms. Cik lielu attālumu veic visi dalībnieki kopā, ja sacensībās piedalās 7 komandas?
7. Dambretes turnīrā piedalās 20 dalībnieki. Katrs spēlē ar katru vienu reizi, neizšķirtu nav. Par uzvaru iegūst 2 punktus, bet par zaudējumu 0 punktus. Vai var gadīties, ka kāds no turnīra dalībniekiem, beidzot turnīru, būs ieguvis 13 punktus?
8. Atrast a) lielākā, b) mazākā četrciparu skaitļa ciparu summu. Ja tā nav viencipara skaitlis, tad atrast tās ciparu summu, utt. kamēr iegūst viencipara skaitli.

10. Uzrakstīt piecus pirmskaitļus, kurus var izteikt kā divu dažādu saliktu skaitļu summu, un izteikt tos šādā veidā.

13. Vai kvadrātu ar izmēriem 3×3 rūtiņas var sagriezt četrās vienādās daļās, ja
    a) jāgriež pa rūtiņu malām,
    b) nav obligāti jāgriež pa rūtiņu malām?
14. Uzrakstīt 4 naturālus skaitļus un atrast to visas iespējamās summas pa diviem, pa trim un pa četriem.
15. Novelciet plaknē piecas taisnes tā, lai katras divas no tām krustotos, nekādas trīs neietu caur vienu punktu un starp daļām, kurās tās sadala plakni, būtu tieši 4 trijstūri.
16. Atrast tādus naturālus skaitļus a, b, c, kas apmierina vienādību $a^2 + b^2 = c^2$. Pietiek parādīt vienu piemēru.

18. Kvadrātu ar izmēriem 10×10 rūtiņas sadalām taisnstūros velkot horizontālas un vertikālas taisnes pa rūtiņu līnijām. Taisnstūrus izkrāsojam šaha galdiņa kārtībā. Kā var būt nokrāsots kvadrātiņš, kas sastāv no 2×2 rūtiņām?

25. Uzrakstīt piecus divciparu skaitļus, kas dalās ar katru no saviem cipariem.

27. Pagājušajā 1998. gadā, trīs mēnešos (februārī, martā un novembrī) 13. datums bija piektdienā. Kādā dienā šo mēnešu 13. datums a) ir šogad, b) būs 2000. gadā?

29. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Sagriezt to pēc iespējas vairāk dažādās figūrās, griežot pa rūtiņu malām.