Materiāls ņemts no grāmatas: A.Andžāns, I.Bērziņa, B.Johannessons. "Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1999. - 2006. gadā. Zīmējumu numerācija saglabāta kā grāmatā.

26. MĀCĪBU GADS (1999/ 2000)

ATRISINĀJUMI

1. PIRMĀ NODARBĪBA

A GRUPA

1.A1. Skaidrs, ka skaitlim nav neviena pāra cipara un nav arī cipara 5. Tātad tā cipari var būt tikai 1; 3; 7; 9, turklāt tam, tātad arī tā ciparu summai, jādalās ar 9. Apskatām dažādas iespējas:

a) ir 4 devītnieki. Skaitlis 9999 der (pārbaude!)

b) ir 3 devītnieki un 1 citāds cipars. Tad ciparu summa nedalās ar 9, tāpēc šī iespēja atkrīt.

c) ir 2 devītnieki un 2 citādi cipari. Viegli pārbaudīt, ka divu citādo ciparu summas (1 + 1, 1 + 3, 1 + 7, 3 + 3, 3 + 7, 7 + 7) nedalās ar 9, tāpēc šī iespēja atkrīt.

d) ir 1 devītnieks un 3 citādi cipari. Šķirojam apakšgadījumus atkarībā no septītnieku skaita:

d1) trīs septītnieki. Tā kā $3\cdot 7+9$ nedalās ar 9, šī iespēja atkrīt.

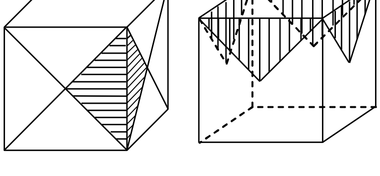
d2) divi septītnieki. Tā kā gan $7\cdot 2+9+1$, gan $7\cdot 2+9+3$ nedalās ar 9, šī iespēja atkrīt.

d3) viens septītnieks. No summām 9 + 7 + 1 + 1, 9 + 7 + 1 + 3, 9 + 7 + 3 + 3 tikai pirmā dalās ar 9. Tātad skaitlim var būt 2 vieninieki, 1 septītnieks un 1 devītnieks (pēdējais cipars!) Atliek pārbaudīt skaitļus 1179, 1719, 7119. No tiem pirmie divi neder (nedalās ar 7), bet 7119 der.

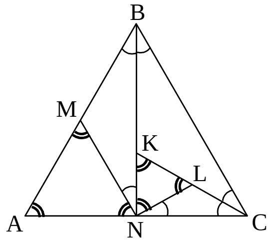
d4) septītnieku nav. Tad triju pirmo ciparu summai (šie cipari var būt tikai 1 un 3) jādalās ar 9; tas iespējams tikai, ja visi šie 3 cipari ir 3. Skaitlis 3339 der (pārbaude!)

Atbilde: 9999; 7119; 3339.

1.A2. Piemēram tā, kā redzam A1. zīm. Četri kvadrāti pārlocīti pa vertikālām kuba šķautnēm (tie visi savā starpā vienādi), bet divi pārklāj pa vienai skaldnei (augšējo un apakšējo) un vēl pa ceturtdaļai no katras vertikālās skaldnes; šīs ceturtdaļas iesvītrotas.



A1. zīm.



A2. zīm.

1.A3. Pēdējam numuram jābūt pāra numuram, tātad 158 vai 518. Tā kā tam jābūt lielākam par 185, tad tas ir 518.

1.A4. Apzīmēsim akmentiņu skaitu kaudzēs ar $a \leq b \leq c$. Šķirosim vairākus gadījumus.

I Ja a = b = c, viss jau sasniegts.

II Ja a = b < c, pievienojam kaudzēs a un b pa vienam akmentiņam tik ilgi, līdz visās kaudzēs to skaits kļūst vienāds.

III Ja $a < b \leq c$, pievienojam kaudzēs a un c pa vienam akmentiņam tik ilgi, kamēr kaudzēs a un b to skaits kļūst vienāds, un tad pārejam pie II gadījuma.

1.A5. Jā, var. Skat., piem., A2. zīm. Te $\measuredangle = 30°$ un $\measuredangle = 60°$. M, N, L ir atbilstoši AB, AC, CK viduspunkti.

1.A6. Apzīmēsim rūķīšus ar A, B, C. Sprīdītis jautā A: "Vai B vienmēr runā patiesību?"

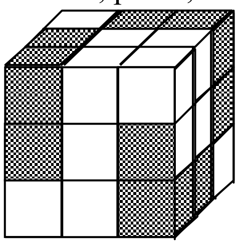
a) ja atbilde ir "jā", tad B tiešām vienmēr runā patiesību; ja A ar savu atbildi būtu samelojies, tad būtu 2 "neuzticami" rūķīši A un B - pretruna.

b) ja atbilde ir "nē", tad C vienmēr runā patiesību (pārbaudiet paši, šķirojot gadījumus, vai A ir teicis patiesību vai nē).

Abos gadījumos Sprīdītim ir droša kandidatūra, kam uzdot otro jautājumu "uz kuru pusi ir ķēniņa pils?"

B GRUPA

1.B1. Jā, var. Skat., piem., A3. zīm.



A3. zīm.

baltās	x	→ 100 – x
sarkanās		↓ 100 - (100 – x) = x

A4. zīm.

1.B2. Šādas daļas var apvienot pāros: $\left(\frac{1}{1999}, \frac{1998}{1999}\right)$, $\left(\frac{2}{1999}, \frac{1997}{1999}\right)$, …, $\left(\frac{999}{1999}, \frac{1000}{1999}\right)$. Katrā pārī skaitītāju summa ir 1999. Viegli pārliecināties par šādu faktu: ja x + y = n, tad skaitļus x un n abus var izdalīt ar kādu d > 1 tādā un tikai tādā gadījumā, ja y un n abus var izdalīt ar šo d. Tāpēc katrā pārī vai nu abas daļas ir nesaīsināmas, vai neviena no tām nav nesaīsināma. Tāpēc nesaīsināmo daļu ir pāra skaits.

Piezīme: minētais spriedums der arī vispārīgam uzdevumam, kur apskata daļas $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ (ja n – pāra skaitlis, tad vidējā daļa, kura ne ar ko pārī neapvienojas, ir saīsināma). Mūsu uzdevumu varēja atrisināt arī, ievērojot, ka 1999 ir pirmskaitlis (pamatojiet!), tāpēc visas 1998 apskatāmās daļas automātiski ir nesaīsināmas.

1.B3. Atbilde: 27.

a) šādu summu var iegūt, uz divām pretējām skaldnēm uzrakstot 1 un 2, bet uz pārējām četrām pēc kārtas 4; 7; 5; 8.

b) pierādīsim, ka mazāku summu iegūt nevar. Ievērosim: no jebkuriem trim pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem n; n + 1; n + 2 uz kuba nevar atrasties vairāk par diviem (pretējā gadījumā skaitlim n+1 ir divi "nepieļaujami kaimiņi" n un n + 2, bet tāds drīkst būt tikai viens). Skaidrs, ka summa būs jo mazāka, jo mēs izvēlēsimies mazākus trijniekus (1; 2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9), (10; 11; 12), … un to iekšpusē – mazākos skaitļus. No trim mazākajiem trijniekiem (1; 2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9) no katra paņemot divus mazākos skaitļus, iegūstam summu $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27$.

1.B4. Abi daudzumi noteikti ir vienādi (skat. A4. zīm.).

1.B5. Acīmredzot pietiek noskaidrot, vai abi vieglākie akmentiņi kopā sver vairāk nekā smagākais akmens viens pats. Parādīsim, kā ar 12 svēršanām atrast gan smagāko, gan abus vieglākos akmeņus. Sadalām akmeņus 4 pāros un salīdzinām katra pāra akmeņus. Ņemam smagāko no katra pāra; šos četrus akmeņus apvienojam pa 2 pāros un salīdzinām katra jaunā pāra akmeņus; šajās salīdzināšanās atrastos smagākos akmeņus salīdzinām savā starpā, un smagākais no tiem ir smagākais vispār. Līdz šim iztērētas 7 svēršanas.

Līdzīgā ceļā no tiem 4 akmeņiem, kas pirmajā posmā savos pāros izrādījās vieglāki, ar 3 svēršanām atrodam visvieglāko akmeni. Patērētas 10 svēršanas.

Šai brīdī ir 3 akmeņi, kas tikuši tieši salīdzināti ar visvieglāko un izrādījušies smagāki par to. Katrs cits akmens (bez šiem trim) ir izrādījies smagāks par kādu citu bez visvieglākā, tātad nav otrais vieglākais. Tāpēc otro vieglāko akmeni varam atrast, meklējot vieglāko no trim minētajiem. To viegli izdara ar divām svēršanām (salīdzinot x ar y un vieglāko no tiem ar z). Patērētas 12 svēršanas.

Ar pēdējo, 13. svēršanu noskaidro, vai abi vieglākie akmeņi kopā ir smagāki par vissmagāko.

1.B6. Apzīmēsim šos skaitļus ar $a_1 < a_2 < \ldots < a_9 < a_{10}$. Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda. Tad $a_1 \geq 1$, tāpēc $a_2 > a_1 \cdot \frac{3}{2} > \frac{3}{2}$; tā kā a_2 – naturāls skaitlis, tad $a_2 \geq 2$. Tālāk $a_3 > a_2 \cdot \frac{3}{2} > 3$; tā kā a_3 – naturāls, tad $a_3 \geq 4$. Tālāk $a_4 > a_3 \cdot \frac{3}{2} > 6$; tā kā a_4 – naturāls, tad $a_4 \geq 7$. Līdzīgi iegūstam pakāpeniski $a_5 \geq 11$, $a_6 \geq 17$, $a_7 \geq 26$, $a_8 \geq 40$, $a_9 \geq 61$, $a_{10} \geq 92$ – pretruna.

Tātad mūsu pieņēmums nepareizs.

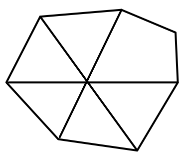
2. OTRĀ NODARBĪBA

A GRUPA

2.A1. Tā kā, saskaitot skaitļus pa kolonnām, jāiegūst tāds pats rezultāts, kā saskaitot tos pa rindām, tad atbilde ir (21 + 22 + 24) - (27 + 28) = 12. Tabulas piemēru skat. A5. zīm. (Piemērs nepieciešams, jo citādi pastāv iespēja, ka uzdevuma nosacījumi ir pretrunīgi, un tādā gadījumā atbilde būtu "tā nevar būt".)

12	8	1
10	7	5
5	13	6

A5. zīm.



A6. zīm.

2.A2. **a)** Jā. Skat., piemēram, A6. zīm.

b) Nē. Ja 4 diagonāles krustojas vienā punktā, tad tām kopā ir $4 \cdot 2 = 8$ dažādi gali. Bet septiņstūrim ir tikai 7 virsotnes.

2.A3. Skaitļa A = 97516824 ciparu summa ir 42. Tā dalās ar 3, bet nedalās ar 9. Tātad arī pats skaitlis A dalās ar 3 bet nedalās ar 9. Pieņemsim no pretējā, ka

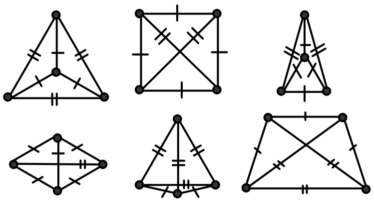
$A = x \cdot x$, kur x – naturāls skaitlis. Ja x dalās ar 3, tad A dalās ar 9, ja x nedalās ar 3, tad arī A nedalās ar 3. Abos gadījumos iegūstam pretrunu ar sākumā konstatēto A īpašību. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

2.A4. Lauva uzvelk savu pulksteni un dodas ciemos pie tīģera. Aizejot viņš atceras, cik bija pulkstenis viņa aiziešanas brīdī. Ierodoties pie tīģera, lauva ievēro, cik rāda tīģera pulkstenis. Brīdi paciemojies, viņš dodas atpakaļ, atkal ievērojot, cik aiziešanas brīdī rāda pulkstenis. Atgriezies savā alā, lauva pēc sava pulksteņa konstatē, cik ilgi bijis prom. Atņemot no šī laika daudzuma to laika daudzumu, ko viņš pavadījis pie tīģera, lauva uzzina ceļā pavadīto laiku. Dalot to ar 2, lauva uzzina atceļā pavadīto laiku. Pieskaitot šo laiku tīģera pulksteņa rādījumam atvadīšanās brīdī, lauva uzzina patieso laiku, cikos atgriezies savā alā, un uzstāda savu pulksteni pareizi.

Ievērojiet: lai šo plānu realizētu, lauvam ceļā pie tīģera un atpakaļ jāpavada vienādu laiku. Vienkāršāk to panākt, pārvietojoties ar vienu un to pašu ātrumu pa vienu un to pašu maršrutu.

2.A5. Skat. A7. zīm.

Var pamatot, ka citu iespēju nav (uzdevumā tas nebija prasīts).



A7. zīm.

	d	e	f	g
3.	c	*		
2.	b	*		
1.	a	*		
	1.			

A8. zīm.

2.A6. Uzdevuma prasības nav izpildāmas.

Pieņemsim, ka to izdarīt izdevies. Visi skaitļi a, b, c, d, e, f, g ir dažādi. Tā kā katrā rindiņā un kolonnā kopā ir tieši 7 rūtiņas, tad ne rindiņā, ne kolonnā nevar būt 2 vienādi skaitļi. Tāpēc nevienā ar * apzīmētajā rūtiņā nevar būt skaitlis e (skat. A8. zīm.). Apskatot kopā 1.kolonnu un 1.rindiņu, redzam, ka 1.rindiņā ar * apzīmētajā vietā var būt tikai viens no skaitļiem f un g. Līdzīgu rezultātu iegūstam attiecībā uz abām pārējām ar * apzīmētajām rūtiņām. Tā kā trijās ar * apzīmētajās rūtiņās var ierakstīt tikai f vai g, tad divās no tām ierakstīti vienādi skaitļi. Iegūta pretruna.

B GRUPA

2.B1. Pieņemsim, ka pirmo konfekti saņems Jānis, nākošās divas – Andris utt. Pieņemsim, ka katram zēnam n reizes tiek iedotas konfektes, neķeroties pie nosacījuma "kārtējais zēns paņems visas atlikušās":

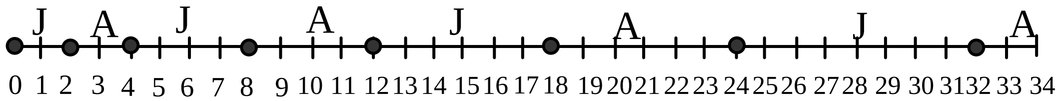
Jānis	Andris
1	2
3	4
5	6
...	...
(2n-1)	2n

Šajā brīdī sadalītas

$1+2+\ldots+(2n-1)+2n=(1+2n)+(2+(2n-1))+$

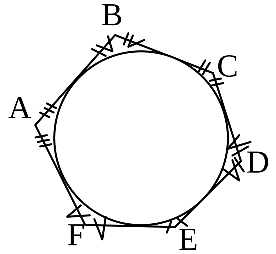
$+\ldots+(n+(n+1))=(2n+1)n=2n^2+n$ konfektes un vēl neiedotas palikušas x konfektes, kur $0 \le x < (2n+1)+(2n+2)$ jeb $0 \le x < 4n+3$ (ja neiedotas būtu vēl

(4n + 3) vai vairāk konfektes, tad varētu veikt vismaz vēl vienu konfekšu izsniegšanas "dubultsoli").
Šai brīdī Andrim ir par n konfektēm vairāk nekā Jānim.
a) Ja $0 \le x < n-1$, tad visas atlikušās konfektes saņems Jānis, un beigās konfekšu vairāk būs Andrim.
b) Ja x = n, tad visas atlikušās konfektes saņems Jānis, un beigās abiem zēniem būs vienāds konfekšu skaits.
c) Ja $n+1 \le x \le 2n+1$, tad visas atlikušās konfektes saņems Jānis un viņam beigās būs vairāk konfekšu.
d) Ja 2n + 1 < x, tad Jānis vispirms saņems 2n + 1 konfektes (un viņam šai brīdī būs par n + 1 konfekti vairāk nekā Andrim), bet pēc tam visas atlikušās konfektes saņems Andris. No šejienes iegūstam:
d1) ja 2n + 1 < x < (2n + 1) + (n + 1) jeb 2n + 1 < x < 3n + 2, tad beigās vairāk konfekšu būs Jānim,
d2) ja x = 2n + 1 + (n + 1) jeb x = 3n + 2, tad beigās abiem zēniem būs vienāds skaits konfekšu,
d3) ja 3n + 2 < x < 4n + 3, tad beigās vairāk konfekšu būs Andrim.
Apkopojot šos rezultātus, iegūstam:
1) ja sākumā ir $(2n^2 + n) + n = 2n^2 + 2n$ vai $(2n^2 + n) + (3n + 2) = 2n^2 + 4n + 2$ konfektes kādam veselam n, tad beigās abiem zēniem ir vienāds konfekšu skaits,
2) ja sākumā konfekšu skaits ir lielāks par $2n^2 + 2n$ un mazāks par $2n^2 + 4n + 2$ kādam veselam n, tad beigās vairāk konfekšu ir Jānim,
3) citos gadījumos vairāk konfekšu ir Andrim.
Parādīsim, kā uz skaitļu ass sākuma izvietojas Jānim un Andrim "labvēlīgie" konfekšu sākuma daudzumi. Ar "izceltajiem" punktiem apzīmēti tie konfekšu sākuma daudzumi, kas noved pie godīga "sadalījuma".



A9. zīm.

2.B2. Nē, tā gadīties nevar. Atcerēsimies: no viena punkta pret riņķa līniju vilkto pieskaru garumi ir savā starpā vienādi. (Skat. A10. zīm.) Pieņemsim no pretējā, ka tāds sešstūris, par kādu runā uzdevumā, eksistē. Tad viegli redzēt, ka AB + CD + EF = BC + DE + AF. Bet
(AB+CD+EF)+(BC+DE+FA) = 1+2+3+4+5+6 = 21, tātad AB + CD + EF = 10,5. Tas nav iespējams, jo visu malu garumi ir veseli skaitļi. Tāpēc mūsu pieņēmums ir nepareizs.



1	5	6	2
6			5
5			6
4	6	5	3

A10. zīm. A11. zīm.

2.B3. Nē, nav. Ja tādi būtu, tad to starpība (kas ir virknes iepriekšējais skaitlis) arī dalītos ar 3. Līdzīgi turpinot, mēs iegūtu, ka arī virknes pirmais skaitlis dalītos ar 3, bet tā ir pretruna.

2.B4. Nē, nevar. Sadalīsim kvadrāta malējās rūtiņas 6 grupās (vienas grupas rūtiņas apzīmētas ar vienādiem cipariem, skat. A11. zīm.)
Viegli redzēt, ka no vienas grupas rūtiņām uz citas grupas rūtiņām iespējams aiziet vienīgi, ejot caur kādu no centrālajām rūtiņām. Tā kā zirdziņam jānonāk visu 6 grupu rūtiņās, tad viņam vismaz 5 reizes jāpāriet no vienas grupas uz otru, tātad vismaz 5 reizes jānonāk kādā no centrālajām rūtiņām. Bet centrālo rūtiņu ir tikai 4, tātad viņam kādā no centrālajām rūtiņām jānonāk vairāk nekā vienu reizi..

2.B5. **a)** Pietiek ar 6 skaitļiem. Piemēram, der skaitļi 1; 2; 3; 5; 7; 9, kā tas redzams no darbībām:
$3\cdot7=21$; $1\cdot2=2$; $1\cdot3=3$; $2\cdot7=14$; $3\cdot5=15$; $2\cdot3=6$; $1\cdot7=7$; $2\cdot9=18$; $1\cdot9=9$.
b) Pierādīsim, ka ar mazāk nekā 6 skaitļiem nepietiek. Vajadzīgs vismaz viens pāra skaitlis (citādi neviens reizinājums nebeigsies ar pāra ciparu). Vajadzīgs skaitlis, kas beidzas ar 5 (citādi neviens reizinājums nebeigsies ar 5). Lai būtu reizinājumi, kas beidzas ar 1; 3; 7; 9, ir vajadzīgi nepāra skaitļi, kas nebeidzas ar 5, turklāt tādi vajadzīgi vismaz četri (jo no trim skaitļiem a, b, c var izveidot tikai trīs reizinājumus). Tātad pavisam vajag vismaz 1 + 1 + 4 = 6 skaitļus.

2.B6. Uzdevuma prasības nav izpildāmas. Skat. A grupas 6. uzdevuma atrisinājumu.

3. TREŠĀ NODARBĪBA

A GRUPA

3.A1. Izpildot dalīšanu, iegūstam:

```
1 : 26 = 0,0384615...
100
 78
 ---
 220
 208
 ---
  120
  104
  ---
   160
   156
   ---
     40
     26
     ---
     140
     130
     ---
      100
      ...
```

Katrs nākošais cipars dalījumā atkarīgs tikai no tā atlikuma, kurš iegūts iepriekšējā dalīšanas solī. Tā kā atlikums 10 ir atkārtojies, tad atkal parādīsies sešu ciparu grupa 384615, pēc tam atkal notiks tas pats utt. Tātad

$$\frac{1}{26}=0{,}038461538461538461 5\ldots$$

Tā kā $1999=1+6\cdot333$, tad izsvītrotais cipars ir perioda pēdējais cipars, t.i., cipars 5. Tātad sākotnējam un iegūtajam skaitlim pirmie 1998 cipari aiz komata sakrīt, bet nākošais cipars sākotnējam skaitlim – 5 – ir lielāks nekā iegūtajam skaitlim –3. Tāpēc sākotnējais skaitlis ir lielāks.

3.A2. Skaidrs, ka nav tāda vienciparu skaitļa. Četrciparu skaitļa ciparu summa nav lielāka par $9\cdot4=36$, tāpēc astoņkāršota tā ciparu summa nav lielāka par $36\cdot8=288$. Bet mazākais četrciparu skaitlis ir 1000, un 1000 > 288. Tātad nav arī tāda 5-ciparu, 6-ciparu utt. skaitļa. Tiešām, apskatīsim n-ciparu skaitli X, kur $n \geq 5$. Tad

$$X \geq \underbrace{100\ldots0}_{n\text{ cipari}} = 1\underbrace{0\ldots0}_{n-1\text{ nulles}} = \underbrace{10\cdot10\cdot\ldots\cdot10}_{n-1\text{ desmitnieki}} = 100\cdot\underbrace{10\cdot\ldots\cdot10}_{n-3\text{ desmitnieki}} \qquad (1)$$

Savukārt skaitļa X ciparu summa S apmierina nevienādību $S \leq 9 \cdot n$; tāpēc astoņkāršota tā ciparu summa apmierina nevienādības

$$8S \leq 72 \cdot n = 72 \cdot \underbrace{\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-2}{n-3} \cdot \ldots \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4}}_{n-3\text{ reizinātāji}} \cdot 4 \qquad (2)$$

Tā kā $100 > 72$ un katrs no n-3 reizinātājiem (2) labajā pusē mazāks par 10 (pārbaudiet paši), tad no (1) un (2) seko, ka 8S < X. Tātad vajadzīgais pierādīts.

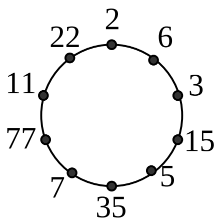
Līdz ar to mūsu meklējamie skaitļi var būt tikai divciparu vai trīsciparu, turklāt tiem jādalās ar 8. Atzīmēsim arī, ka meklējamā skaitļa ciparu summa nevar pārsniegt $3 \cdot 9 = 27$, tāpēc pats skaitlis nevar pārsniegt $8 \cdot 27 = 216$. Visi divciparu un trīsciparu skaitļi, kas nepārsniedz 216 un dalās ar 8, ir sekojoši:

16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 104, 112, 120, 128, 136, 144, 152, 160, 168, 176, 184, 192, 200, 208, 216.

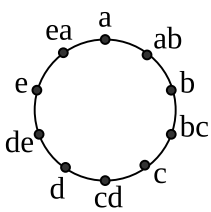
Pārbaudot, kurš no tiem vienāds ar astoņkāršotu savu ciparu summu, redzam, ka tāds ir tikai **72**.

3.A3. Nē, ne noteikti. Skat. piem., A12. zīm.

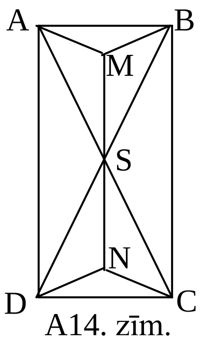
Komentārs. Var iegūt daudzus izvietojumus ar prasīto īpašību. Viens no paņēmieniem parādīts A13. zīm. Te vispirms pa riņķa līniju izraksta a, b, c, d, e – dažādus pirmskaitļus, bet pēc tam starp katriem diviem blakus uzrakstītiem pirmskaitļiem ieraksta to reizinājumu. Pārliecinieties paši, ka uzdevuma prasības ir izpildītas.



A12. zīm.



A13. zīm.

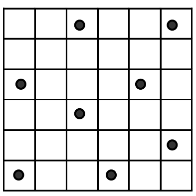


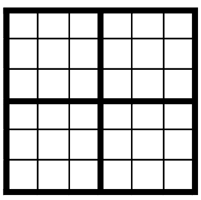
A14. zīm.

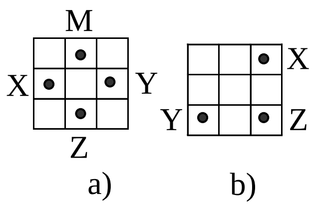
3.A4. Skat. A14. zīm. Te ABS un CDS ir vienādi vienādmalu trijstūri ar centriem atbilstoši M un N, pie tam A, S, C atrodas uz vienas taisnes un B, S, D – tāpat. Pārliecinieties patstāvīgi, ka ABCD ir taisnstūris, bet visiem trijstūriem AMB, BMS, SMA, SNC, CND, DNS, ASD un BSC viens leņķis ir 120°, bet divi leņķi – 30° lieli.

3.A5. Atbilde: 8 centrus.

a) To, ka 8 centrus var atzīmēt, skat. A15. zīm. Pārliecinieties patstāvīgi, ka uzdevuma prasības ir izpildītas.


A15. zīm.


A16. zīm.



A17. zīm.

b) pamatosim, ka vairāk par 8 centriem atzīmēt nevar. Pieņemsim pretējo: saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem atzīmēti vismaz 9 centri. Tad vismaz vienā no četriem 3×3 rūtiņu kvadrātiem (skat. A16. zīm.) atzīmēti ne mazāk par 3 centriem (jo $2 \times 4 = 8 < 9$). Aplūkosim šo kvadrātu un 3 tajā atzīmēto rūtiņu centrus. Viegli saprast, ka neviens no tiem nav atzīmēts centrālajā rūtiņā un ne vairāk kā viens var būt atzīmēts malas vidējā rūtiņā (jo MX = MY < 2 un MZ = 2, skat. A17a). zīm.) Tāpēc vismaz divi no tiem atzīmēti stūra rūtiņās; tiem jābūt pretējās stūra rūtiņās, skat. A17b) zīm., jo XZ = 2. Bet, atzīmējot X un Y, trešo centru atzīmēt vairs nevar; pārliecinieties par to patstāvīgi.

Tātad mūsu pieņēmums par iespējām atzīmēt 9 centrus noved pie pretrunas un tāpēc ir nepareizs.

3.A6. Atbilde: ar 3 vienādiem nenulles cipariem.

a) Viegli pārbaudīt, ka $38^2 = 1444$. Tātad naturāla skaitļa kvadrāts var beigties ar trim vienādiem nenulles cipariem.

b) Pierādīsim, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar beigties ar 4 vienādiem nenulles cipariem.

Lemma. Ja naturāla skaitļa n pēdējais cipars ir nepāra cipars, tad tā kvadrāta priekšpēdējais cipars (ja tāds vispār eksistē, t.i., ja $n^2 \geq 10$) ir pāra cipars.

Pierādīsim to. Ja n = 5; 7; 9, apgalvojumu pārbauda tieši: $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $9^2 = 81$. Pieņemsim, ka n > 10. Apzīmēsim ar y skaitļa n pēdējo ciparu un ar A – to skaitli, kuru iegūst, ja skaitlī n nosvītro pēdējo ciparu (piemēram, ja n = 813, tad y = 3, A = 81). Tad $n = 10 \cdot A + y$ un $n^2 = (10A + y)^2 = 100A^2 + 20A \cdot y + y^2$. Ievērosim, ka skaitlī $100A^2$ divi pēdējie cipari ir nulles, bet skaitlī $20A \cdot y$ jeb, kas ir tas pats, skaitlī $2 \cdot 10Ay$ pēdējais cipars ir nulle, bet priekšpēdējais cipars – pāra cipars. Tāpēc n^2 priekšpēdējais cipars ir pāra vai nepāra atkarībā no tā, vai y^2priekšpēdējais cipars ir pāra vai nepāra cipars (ja y^2 ir tikai viens cipars, tad varam uzskatīt, ka tā priekšpēdējais cipars ir 0). Pārbaudām visas iespējas: 1^2=**0**1, 3^2=**0**9, 5^2=**2**5, 7^2=**4**9, 9^2=**8**1. Tātad lemma pierādīta.

No šejienes izriet, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar beigties ne ar 1111, ne ar 3333, ne ar 5555, ne ar 7777, ne ar 9999.

Tā kā $2^2 = 4$, $4^2 = 16$, $6^2 = 36$, $8^2 = 64$, tad redzams, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar beigties ne ar 2, ne ar 8; tātad tas nevar beigties arī ar 2222 vai 8888. Atliek izpētīt, vai tas var beigties ar 4444 vai ar 6666.

Ja n^2 beigtos ar 6666, tas tas ir pāra skaitlis. Tad arī n ir pāra skaitlis, tāpēc n^2 dalās ar 4. Bet tad n^2 = ...6666 =...6600 + 66. Tā kā gan n^2, gan ...6600 dalās ar 4, tad arī 66 jādalās ar 4, bet tā nav. Tātad n^2 nevar beigties ar 6666 (un, kā viegli redzēt, pat ne ar 66!)

Ja n^2 beigtos ar 4444, tad n^2 un arī n ir pāra skaitlis. Varam apzīmēt n = 2m; tad $n^2 = 4m^2 = A \cdot 10000 + 4444$ (te A – skaitlis, ko iegūst, ja n^2 nosvītro pēdējos četrus ciparus).

No vienādības $4m^2 = 10000A + 4444$ seko $m^2 = 2500A + 1111$, tātad m^2 beidzas ar ...11. Tas ir pretrunā ar sākumā pierādīto lemmu.

Līdz ar to visi gadījumi apskatīti. Esam pierādījuši, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar beigties ar četriem vienādiem nenulles cipariem.

B GRUPA

3.B1. Mazākais pietiekamais reisu daudzums ir atkarīgs no kravas sadalījuma kastēs. Mums jāatrod visi iespējamie gadījumi un jāpierāda, ka citu bez mūsu atrastajiem nav. Mēs pierādīsim, ka

a) mazākais pietiekamais reisu daudzums var būt 4; 5; 6; 7
b) nekādā gadījumā nevar iztikt ar 3 vai mazāk reisiem
c) vienmēr var iztikt ar augstākais 7 reisiem

A. Ja krava iepakota 4 kastēs, katrā pa 11/4 = 2,75 tonnām, tad ar katru reisu var aizvest augstākais vienu kasti, tātad nepieciešami 4 reisi. Skaidrs, ka ar 4 reisiem pietiek (ar katru reisu aizved tieši vienu kasti). Līdzīgi gadījumos, kad krava iepakota 5; 6; 7 vienādās kastēs, attiecīgi gan nepieciešami, gan pietiekami 5; 6; 7 reisi – pārliecinieties par to patstāvīgi.

B. Veicot ne vairāk kā 3 reisus, var aizvest ne vairāk kā $3 \cdot 3 = 9$ tonnas, bet jāaizved 11 tonnas, tāpēc ar 3 vai mazāk reisiem nepietiek nekādā kravas iepakojuma gadījumā.

C. Pierādīsim, ka ar 7 reisiem kravu vienmēr var aizvest.

Kastes, kuras sver vairāk par 1,5 tonnām, sauksim par smagām; pārējās kastes, kuras katra sver 1,5 tonnas vai mazāk par 1,5 tonnām, sauksim par vieglām. Veidosim no vieglajām kastēm kaudzes. Kaudžu veidošana notiek sekojoši: izvēlamies vienu kasti un kraujam tai virsū citas kastes tik ilgi, līdz kaudzes kopējā masa pirmo reizi pārsniedz 1,5 tonnas. Šai brīdī kaudzes veidošanu pabeidzam un sākam veidot jaunu kaudzi no vēl atlikušajām vieglajām kastēm (ja tādas vēl ir).

Ievērosim, ka katras kaudzes kopējā masa nepārsniedz 3 tonnas, jo pirms pēdējās kastes pievienošanas šajā kaudzē bija ne vairāk kā 1,5 tonnas un pēdējā pievienotā kaste svēra ne vairāk par 1,5 tonnām.

Agri vai vēlu mēs sasniegsim situāciju, kad jaunas kaudzes vairs nevar izveidot. Tad

a) smago kastu un kaudžu kopējais skaits nepārsniedz 7 (ja tas būtu vismaz 8, tad smagajās kastēs un kaudzēs kopā būtu vairāk nekā $8 \cdot 1{,}5\ \text{tonnas} = 12$ tonnas kravas – pretruna)

b) kaudzēs neievietota palikusi ne vairāk kā viena vieglā kaste (ja tādu būtu divas, tad no tām varētu izveidot vēl vienu kaudzi). Tālāk šķirojam divas iespējas.

c1. Smago kastu un kaudžu kopā ir ne vairāk par 6. Katru no tām aizvedam ar vienu reisu, bet atlikušo, kaudzēs neievietoto kasti, ja tāda ir - ar septīto reisu.

c2. Smago kastu un kaudžu kopā ir 7. Tad to kopējā masa ir vairāk nekā $7 \cdot 1{,}5$ tonnas = 10,5 tonnas. Ja visas vieglās kastes ievietotas kaudzēs, tad varam visu kravu aizvest ar 7 reisiem. Ja viena kaste palikusi pāri, tad tā sver mazāk nekā 11 - 10,5 = 0,5 tonnas. Pierādīsim, ka vismaz vienā smagā kaste vai kaudze sver ne vairāk par 2,5 tonnām. Tiešām, ja tā nebūtu, tad to kopējā masa būtu lielāka nekā $7 \cdot 2{,}5$ tonnas = 17,5 tonnas > 11 tonnas – pretruna. Tātad tāda smagā kaste vai kaudze eksistē. Uzliekot tai virsū malā palikušo pēdējo kasti, iegūstam kaudzi, kuras masa mazāka nekā 2,5 tonnas + 0,5 tonnas = 3 tonnas. Tagad visu kravu var aizvest ar 7 reisiem.

3.B2. No uzdevuma nosacījumiem seko arī, ka a > b > c > d; tāpēc d ir mazākais no pirmskaitļiem a, b, c, d, un tie visi ir dažādi.

Tā kā

a^2-b^2+c^2-d^2 ir nepāra skaitlis, tad vismaz viens no skaitļiem a, b, c, d ir pāra. Tā kā vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2, tad tieši viens no skaitļiem a, b, c, d ir pāra skaitlis un tas ir 2; tā kā 2 ir vispār mazākais pirmskaitlis, tad tas ir arī mazākais no a, b, c, d. Tāpēc d = 2. Iegūstam

$a^2 - b^2 + c^2 – 4 = 1749$; tāpēc $a^2 - b^2 + c^2 = 1753$ (1)

Tā kā c>2d, tad c>4; tāpēc $c \geq 5$. Pieņemsim, ka $c \neq 5$; tad c>7. Tāpēc $3b > 6 \cdot 7$ un b > 14, tātad $b \geq 17$.

Tad

$$a^2 - b^2 + c^2 > (3b)^2 - b^2 + 25 = 8 \cdot b^2 + 25 \geq 8 \cdot 17^2 + 25 = 8 \cdot 289 + 25 > 8 \cdot 250 =$$
$= 2000 > 1753$, un tā ir pretruna ar (1). Tāpēc mūsu pieņēmums ir nepareizs un c = 5. Tad no (1) iegūstam

$$a^2 - b^2 = 1728 \quad (2)$$

Savukārt no 3b > 6c seko, ka

$$b \geq 11 \quad (3)$$

Tā kā a > 3b, tad no (2) seko $(3b)^2 - b^2 < 1728$ jeb $8b^2 < 1728$, no kurienes $b^2 < 216$ un $b \leq 14$. No šejienes un no (3) seko, ka vai nu b = 11, vai b = 13. Ja b = 13, tad no (2) seko, ka $a^2 = 1897$, bet tad a nav naturāls skaitlis; ja b = 11, tad no (2) seko, ka $a^2 = 1849$ un a = 43. Tā kā 43 ir pirmskaitlis un $43 > 3 \cdot 11$, tad visi uzdevuma nosacījumi izpildīti. Varam aprēķināt

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1849 + 121 + 25 + 4 = 1999$.

3.B3. Atbilde: jā, noteikti.

Tā kā visi izrakstītie skaitļi ir dažādi, tad no katriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem tikai viens (lielākais) dalās ar otru (mazāko), bet ne otrādi.

Ja pa apli pēc kārtas kādā vietā uzrakstīti skaitļi a, b, c tā, ka a > b > c, tad a dalās ar b un b dalās ar c, tātad a dalās ar c, pie tam a un c neatrodas blakus. Tāpēc vienīgā iespēja, kad uzdevumā minētie skaitļi varētu neeksistēt, varētu pastāvēt tikai tad, ja nekādi trīs skaitļi pēc kārtas neatrodas uz riņķa līnijas ne augošā, ne dilstošā secībā. Pierādīsim, ka tas nav iespējams.

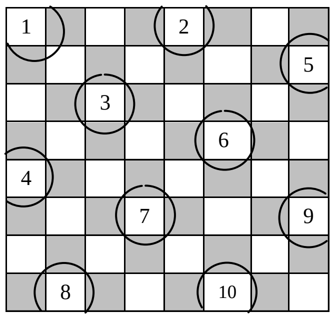
Pieņemsim no pretējā, ka tas iespējams. Apzīmēsim skaitļus uz riņķa līnijas pēc kārtas ar a, b, c, d, e, f, g, h, i, turklāt a ir vislielākais no tiem. Tad a > b. Lai nebūtu triju pēc kārtas dilstošā secībā uzrakstītu skaitļu, jābūt b < c. Lai nebūtu triju pēc kārtas augošā secībā uzrakstītu skaitļu, jābūt c > d. Līdzīgā ceļā pakāpeniski iegūstam d < e, e > f, f < g, g > h, h < i, i > a. Bet nevienādība i > a nevar pastāvēt, jo a ir lielākais izrakstītais skaitlis. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

3.B4. Atbilde: 20 zvaigznītes.

a) Tas, ka ar 20 zvaigznītēm pietiek, redzam A18. zīm.

*			*	*			*
*							*
		*			*		
		*			*		
*							*
*			*	*			*
	*	*			*	*	

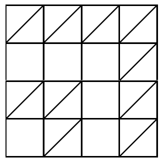
A18. zīm.



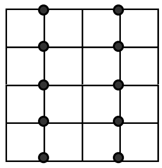
A19. zīm.

b) Pierādīsim, ka vismaz 20 zvaigznītes ir nepieciešamas. Izkrāsosim kvadrāta rūtiņas šaha galdiņa kārtībā. Ievērosim, ka baltajām rūtiņām blakus atrodas tikai zvaigznītes, kas ierakstītas melnajās rūtiņās, un otrādi. Pierādīsim, ka melnajās rūtiņās jāieraksta vismaz 10 zvaigznītes.

Aplūkosim ar skaitļiem apzīmētās baltās rūtiņas A19. zīm.. Katru no tām apjož līnija. Šī līnija iet caur visām tām melnajām rūtiņām, kuras atrodas blakus atbilstošajai baltajai. Redzam, ka ne caur vienu melno rūtiņu neiet divas līnijas. Tas nozīmē, ka katrai ar skaitli atzīmētajai rūtiņai nepieciešama cita tai blakusesoša zvaigznīte. Tāpēc melnajās rūtiņās jāieraksta vismaz 10 zvaigznītes. Līdzīgi pierāda, ka baltajās rūtiņās jāieraksta vismaz 10 zvaigznītes. Tātad kopā to vajadzīgs vismaz 10 + 10 = 20.



A20. zīm.



A21. zīm.

3.B5. Atbilde: 10 diagonāles.

a) Tas, ka 10 diagonāles var novilkt, redzams A20. zīm.

b) Katrai diagonālei, kuru vispār var novilkt, viens galapunkts atrodas vienā no 10 punktiem, kas atzīmēti A21. zīm. Tā kā nekādām divām diagonālēm nav kopīgu punktu, tad to nevar būt vairāk par 10.

3.B6. Liekam uz svaru kausiem pa 9 monētām, pēc tam – pa 7, pēc tam – pa 5, pēc tam – pa 3, pēc tam – pa 1. Katru reizi liekam uz svariem līdz šim vēl neaiztiktās monētas. Ja nevienā reizē līdzsvars netiek izjaukts, tad vieglākā monēta ir vienīgā malā palikusī, un esam to noskaidrojuši ar 5 svēršanām.

Ja turpretī kādā reizē (salīdzinot $2n+1$ monētas uz viena kausa ar $2n+1$ monētām uz otra kausa) viens kauss paceļas uz augšu, tad vieglākā monēta atrodas uz tā. Tad mēs augstāk aprakstīto procesu pārtraucam (esam patērējuši jau 5-n svēršanas) un $2\,n$ no "aizdomīgajām" monētām sadalām pa pāriem; sākam salīdzināt katra pāra monētas savā starpā. Ja kādā salīdzināšanā viens kauss paceļas uz augšu, tad uz tā ir vieglākā monēta; ja visās reizēs svari ir līdzsvarā, tad vieglākā ir malā palikusī "aizdomīgā" monēta. Esam iztērējuši ne vairāk par (5-n) + n = 5 svēršanām, un neviena monēta nav svērta vairāk par divām reizēm.

Piezīme: ja nebūtu nosacījuma, ka katru monētu var svērt ne vairāk par divām reizēm, vieglāko monētu varētu atrast ar 4 svēršanām (izdomājiet paši, kā).

4. CETURTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

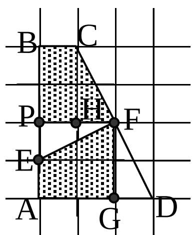
4.A1. **1)** Ja A runā patiesību, tad A ir svārstīgs; iegūta pretruna, jo A vienlaicīgi nevar būt svārstīgs un runāt patiesību. Tātad A nerunā patiesību.

2) Ja A ir svārstīgs, tad ne B, ne C nav patiess. Tāpēc A nav svārstīgs.

Tātad A melo. Tā kā viens no brāļiem vienmēr runā patiesību un A ir melis, tad B runā patiesību, bet C ir svārstīgs.

4.A2. Atbilde: jā, pastāv.

Aplūko kvadrātisku rūtiņu režģī iezīmētu taisnleņķa trapeci ABCD (skat. A22. zīm. ; $\angle A = 90^\circ$, $BC \| AD$).



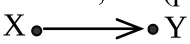
A22. zīm.

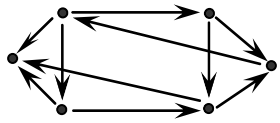
Pēc pazīmes mlm $\Delta CHF = \Delta FGD$; tāpēc $\angle CFD = \angle CFH + \angle HFG + \angle GFD =$ $= \angle CFH + 90^\circ + \angle HCF = 90^\circ + (\angle CFH + \angle HCF) = 180^\circ$ un rūtiņu virsotne F atrodas uz malas CD tās viduspunktā. Sagriežam trapeci ABCD pa nogriezni EF.

Tagad PBCF = GAEF, jo, savietojot šīs taisnleņķa trapeces pa rūtiņu līnijām, tās acīmredzami sakrīt. Bez tam $\Delta EPF = \Delta DGF$ (mlm). Ja divām vienādām figūrām pie atbilstošajām malām pievieno vienādi orientētas vienādas figūras, atkal iegūst vienādas figūras. Tātad četrstūri AEFD un BCFE ir vienādi.
Savukārt, novelkot diagonāli BD, iegūst taisnleņķa trijstūri BAD un platleņķa trijstūri BCD, kuri nav vienādi. Līdzīgi, novelkot diagonāli AC, iegūst taisnleņķa trijstūri ABC un šaurleņķu trijstūri ACD . Novelkot viduslīniju PF, trapeces PBCF un APFD nav vienādas, jo vienai no tām pamatu garumi ir 1 un 2 , bet otrai - 2 un 3. Novelkot viduslīniju, kas savieno pamatu BC un AD viduspunktus, iegūst divas trapeces, no kurām tikai viena ir taisnleņķa; tāpēc tās nav vienādas.

4.A3. No sešiem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar 6; to apzīmē ar n. Skaitlim n ir dalītāji $\frac{n}{3}, \frac{n}{2}$ un $\frac{n}{6}$, kas atšķiras no n. Atrod šo dalītāju summu: $\frac{n}{3}+\frac{n}{2}+\frac{n}{6}=\frac{6n}{6}=n$. (Atceramies, ka n var būt arī vēl citi dalītāji.)

4.A4. <u>Atbilde:</u> par 1, par 8 vai par 10.
Ja skaitļa pēdējais cipars ir 0 vai 1, tad, pieskaitot tam 8, tā ciparu summa palielinās par 8. Ja rodas pārnesums, tad ciparu summa katra pārnesuma dēļ samazinās par 9 (jo var rasties tikai pārnesums 1). Tā kā pārnesums var būt tikai divās - vienu un desmitu - šķirās, tad pārnesumu dēļ ciparu summa var samazināties par 9 vai par 18.
Tātad abu apskatāmo skaitļu ciparu summas var savā starpā atšķirties par 8, par $1=|8-9|$ un par $10=|8-2\cdot 9|$.
Piemēri: 211 un 219; 218 un 226; 299 un 307 parāda, ka šīs iespējas tiešām realizējas.

4.A5. Jā, var (piem., skat. A23. zīm.).
 nozīmē, ka X uzvarējis pret Y (jeb Y zaudējis pret X); nenovilkta līnija nozīmē, ka spēle beigusies neizšķirti.



A23. zīm.

4.A6. <u>Atbilde:</u> mazākais konfekšu daudzums ir 28.
a) Piemērs 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28 parāda, ka vērtība 28 ir iespējama. To, kā katrs bērns var sadalīt savas konfektes, parāda sekojoša tabula.

Dalītāja konfekšu skaits	Cik dod citam atkarībā no viņa konfekšu skaita							
	21	22	23	24	25	26	27	28
21		6	5	4	3	2	1	0
22	7		5	4	3	2	1	0
23	7	6		4	3	2	1	0
24	7	6	5		3	2	1	0
25	7	6	5	4		2	1	0
26	7	6	5	4	3		1	0
27	7	6	5	4	3	2		0
28	7	6	5	4	3	2	1	

b) Pieņemsim, ka konfekšu daudzumi bērniem ir a_1; a_2 ; . . .; a_8 un $a_1 < a_2 < . . . < a_8$. Bērnu ar a_i konfektēm sauksim par i - to bērnu. Tā kā jebkurš bērns var sadalīt savas konfektes pārējiem, tad, ja 1.bērns "izlīdzina" konfekšu daudzumu, viņam jādod vismaz viena konfekte 7. bērnam, vismaz divas konfektes 6. bērnam, vismaz trīs konfektes 5. bērnam, . . . , vismaz sešas konfektes 2. bērnam.

Tāpēc $a_1 \geq 1+3+\ldots+6=21$.

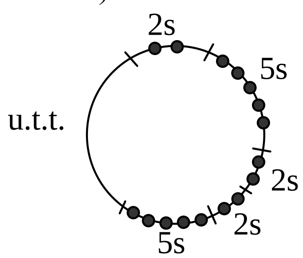
Tā kā $a_2 > a_1$, tad $a_2 \geq 22$. Līdzīgi $a_3 \geq 23$ a_3 ^{3}, . . . , $a_8 \geq 28$. Tātad mazākais konfekšu daudzums bērnam, kuram to ir visvairāk, ir 28.

B GRUPA

4.B1. Ja visas monētas ir 1 santīma vērtībā, tad uzdevuma prasības izpildāmas (naudu var sadalīt divās vienādās daļās). Acīmredzot to var izdarīt arī, ja visas ir 2 santīmu monētas.

Pieņemsim, ka monētas ir dažādas.

Uz riņķa līnijas atzīmē 198 punktus (1 lats 98 sant. = 198 sant.). Novelkam starp punktiem nogriežņus tā, lai punktu skaits riņķa līnijas "lokos" atbilstu monētu vērtībām santīmos (skat. A24. zīm.).



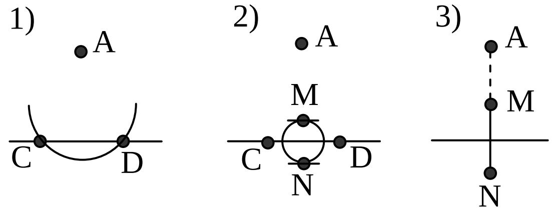
A24. zīm.

Tā kā uz riņķa līnijas ir 198 punkti, tad ir 198 atstarpes starp punktiem. Ievērosim , ka $198 = 99 \cdot 2$. Tātad atstarpes var sadalīt "diametrāli pretēju" atstarpju pāros, un šādu pāru būs 99. Ir novilkti 100 nogriežņi (100 monētas). Ievērojam, ka $100 > 99$ .Tātad divi nogriežņi nonāks vienā "diametrāli pretēju" atstarpju pārī, tātad "diametrāli pretējās" atstarpēs. Tie norādīs vajadzīgo naudas sadalījumu.

4.B2. **1)** Ar centru punktā A velk riņķa līnijas loku, kas krusto taisni t divos punktos C un D (loka rādiusu izvēlas tā, lai būtu CD < 1 cm).

2) Ar centriem punktos C un D velk riņķa līnijas lokus ar vienādiem rādiusiem tā, lai loki krustotos divos punktos N un M (rādiusi nedaudz lielāki par pusi no CD).Tad NM<1 cm.

3) Novelk nogriezni NM un pakāpeniski pagarina līdz to punktam A (skat. A25. zīm.).



A25. zīm.

4.B3. Atbilde: jā, var.

Izveidojam kaudzes ar 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19 akmeņiem. Viegli pārbaudīt, ka $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = (1 + 19) + (3 + 17) + (5 + 15) + (7 + 13) + (9 + 11) = 5 \cdot 20 = 100$.

Savukārt, ja kādu kaudzi ar n akmeņiem (n - nepāra skaitlis)sadalīs kaudzēs ar a un b akmeņiem, tad $a + b = n$, tāpēc vai nu a, vai b būs nepāra skaitlis. Tā kā $a < n$ un $b < n$, tad tajā kaudzītē, kurā sadalot radīsies nepāra skaits akmeņu, būs tikpat akmeņu, cik kādā no pārējām.

4.B4. Sanumurēsim vietas pa apli pēc kārtas: 1, 2, 3, . . . , 10.

Beigās pēc maiņām vai nu visi zēni ir pāra un meitenes - nepāra vietās, vai otrādi (zēni – nepāra un meitenes – pāra vietās).

Pieņemsim, ka X zēni sākumā atrodas "nepareizās" vietās, tad arī X meitenes sākumā atrodas nepareizās vietās (zēnu un meiteņu skaits ir vienāds). Acīmredzot šajā situācijā pietiek ar X maiņām, lai iegūtu uzdevumā prasīto. No otras puses, X maiņas ir nepieciešamas, jo ir 2X (X – zēni un X - meitenes) nepareizības, un ar vienu maiņu var izlabot augstākais 2 nepareizības.

Ja no sākuma visi zēni stāv pēc kārtas un meitenes - arī, tad atkarībā no tā, vai zēnus beigās novietos pāra vai nepāra vietās, $X = 2$ vai $X = 3$, pie tam jebkurā situācijā var panākt, lai $X \le 2$ (izvēloties, vai zēni beigās stāvēs pāra vai nepāra vietās).

Tātad ar 2 maiņām pietiek vienmēr, un ir gadījumi, kur ar mazāk nekā 2 maiņām iztikt nevar.

4.B5. Atbilde: 8 votivapas un 1 šillišalla.

Apzīmēsim votivapu un šillišalu daudzumus attiecīgi ar v un š. No pirmā nosacījuma seko: $6v + 2š > 4 \cdot 12$; abas nevienādības puses dalot ar 2, iegūst $3v + š > 24$ (1)

No otrā nosacījuma seko: $7v + 3š < 5 \cdot 12$ (2)

No (1) seko $3š > 72 - 9v$; no (2) seko $3š < 60 - 7v$. Tāpēc $72 - 9v < 60 - 7v$, $2v > 12$, $v > 6$.

Tāpēc no $7v + 3š < 60$ secinām, ka $v = 7$ vai $v = 8$, jo jābūt $š \ge 0$.

Ja $v = 7$, tad no (1) $š > 3$, tātad $š \ge 4$; bet tad neizpildās (2). Ja $v = 8$, tad no (1) $š > 0$, tātad $š \ge 1$, bet no (2) $56 + 3š < 60$. Tāpēc noteikti $š = 1$. Tātad votivapu bija 8, bet šillišallu – 1.

4.B6. Atbilde: a) jā, b) nē.

a) Pieņemsim, ka 7.a klasē ir 8 skolēni ar vērtējumu "10" balles un 2 skolēni ar vērtējumu "9" balles, savukārt 7.b klasē ir 8 skolēni ar vērtējumu "2" balles.

Iedomāsimies, ka uz 7.b klasi pāriet abi skolēni no 7.a klases ar vērtējumu "9" balles.

Pirms pāriešanas vidējais vērtējums 7.a klasē bija $\frac{8\cdot 10+2\cdot 9}{10}=9{,}8$ balles, bet 7.b klasē vidējais vērtējums bija 2 balles. Savukārt pēc pāriešanas vidējais vērtējums 7.a klasē bija 10 balles, bet 7.b klasē tas bija $\frac{8\cdot 2+2\cdot 9}{10}=3{,}4$. Tātad abi vērtējumi paaugstinājušies.

b) Apzīmēsim 7.a klases vidējo atzīmi ar x, 7.b klases vidējo atzīmi ar y, bet tās skolēnu grupas vidējo atzīmi, kas pāriet no 7.a uz 7.b, ar p. Viegli saprast, ka abās klasēs vidējā atzīme paaugstināsies tad un tikai tad, ja x>p>y; tad jaunās vidējās atzīmes $x_1>x>p>y_1>y$. Līdzīgi spriežot, lai otrajā pārejā paaugstinātos 7.b klases vidējā atzīme, uz 7.a klasi jāpāriet grupai ar vidējo atzīmi p_1, kur $p_1<y_1$, tātad $p_1<x_1$. Bet tā rezultātā 7.a klases vidējā atzīme samazināsies.

Atliek pamatot pasvītroto apgalvojumu. Pieņemsim, ka 7.a klasē pirms pārejas bija m skolēni, 7.b klasē - n skolēni, bet pārgāja k skolēni. Tad pēc pārejas vidējā atzīme 7.a klasē bija $\frac{m\cdot x-k\cdot p}{m-k}$, bet 7.b klasē tā bija $\frac{n\cdot y+k\cdot p}{n+k}$. Viegli saprast, ka

$$\frac{m\cdot x-k\cdot p}{m-k}>x\Leftrightarrow m\cdot x-k\cdot p>m\cdot x-k\cdot x>k\cdot p\Leftrightarrow x>p$$

un $\frac{n\cdot y+k\cdot p}{n+k}>y\Leftrightarrow n\cdot y+k\cdot p>n\cdot y+k\cdot y\Leftrightarrow p>y$.

Savukārt

$$p>y_1\Leftrightarrow\frac{n\cdot y+k\cdot p}{n+k}<p\Leftrightarrow n\cdot y+k\cdot p<n\cdot p+k\cdot p\Leftrightarrow n\cdot y<n\cdot p\Leftrightarrow y<p.$$

Vajadzīgais pierādīts.

5. PIEKTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

5.A1. Atbilde: mazākā iespējamā starpība ir $\frac{1}{15}$.

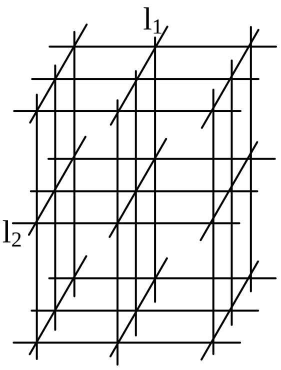
Apzīmēsim daļu skaitītājus ar x un y. Tad apskatāmā starpība ir pozitīvs skaitlis $\left|\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right|=\frac{|5x-3y|}{15}$. Tā kā |5x-3y|>0 un |5x-3y| ir vesels skaitlis, tad $|5x-3y|\geq 1$.

Tāpēc apskatāmā starpība nevar būt mazāka par $\frac{1}{15}$.

Piemērs $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{1}{15}$ parāda, ka tā var būt $\frac{1}{15}$.

5.A2. Atbilde: jā, var.

Skat. A26. zīm.



A26. zīm.

Var pamanīt, ka mēs esam attēlojuši plaknē "režģi", kuru telpā veido 8 vienādu klucīšu šķautnes, ja šie klucīši salikti tā, ka tie kopā sastāda vienu lielu "kluci" .

Klucīšu izmēri jāizvēlas tā, lai zīmējumā norādītās taisnes nesakristu (piem., A26. zīm. varētu sakrist l_1 un l_2 , lai gan telpā šīs taisnes, protams, ir dažādas).

5.A3. **a)** $67\cdot 67=4489$,

b) $667\cdot 667=444889$

c) $6667\cdot 6667=44448889$

Rodas doma, ka $\underbrace{66\ldots6}_{n}7\cdot\underbrace{66\ldots6}_{n}7=\underbrace{44\ldots4}_{n+1}\underbrace{88\ldots8}_{n}9$. Pamatosim to.

Viegli pārbaudīt, ka $\underbrace{66\ldots6}_{n}7=\frac{1}{3}\cdot 2\underbrace{0\ldots0}_{n}1$

Tāpēc $\underbrace{66\ldots6}_{n}7\cdot\underbrace{66\ldots6}_{n}7=\frac{1}{9}\cdot 2\underbrace{00\ldots0}_{n}1\cdot 2\underbrace{00\ldots0}_{n}1$.

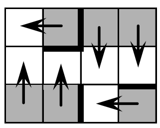
Sareizinot "stabiņā" $2\underbrace{00\ldots0}_{n}1\cdot 2\underbrace{00\ldots0}_{n}1$, iegūstam

$$\begin{array}{r}
20\ldots01\cdot 200\ldots01 \\
\hline
2\underbrace{0\ldots0}_{n}1 \\
4\underbrace{00\ldots0}_{n}2 \\
\hline
4\underbrace{00\ldots0}_{n}4\underbrace{00\ldots0}_{n}1
\end{array}$$

Viegli pārbaudīt (dalot pēc skolā mācītā paņēmiena), ka $4\underbrace{00\ldots0}_{n}4\underbrace{00\ldots0}_{n}1=\underbrace{44\ldots4}_{n+1}\underbrace{88\ldots8}_{n}9$, k.b.j.

5.A4. To var izdarīt, piemēram, tā, kā redzams A27. zīm.

Griezumus izdara pa biezajām līnijām. Pēc tam pelēkos kvadrātiņus uzlokām virsū baltajiem un ar iegūto "divkāršo " figūru aplīmējam kubu.

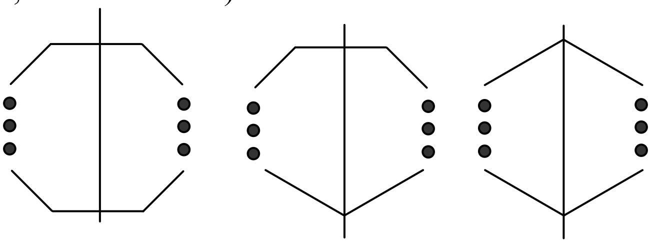


A27. zīm.

5.A5. Pēc 1999n griezieniem Jānim būs 1999n + 1 daudzstūris.

a nekādiem 2000 daudzstūriem nav vienāds malu skaits, tad Jānim katra veida daudzstūru (trijstūri, četrstūri u.t.t.) var būt augstākais 1999.

Tāpēc iegūtajiem daudzstūriem kopā ir vismaz $1999\cdot 3+1999\cdot 4+1999\cdot n+2000= \; =1999(3+4+\ldots+n)+2000$ malas. No otras puses, katra grieziena rezultātā kopējais malu skaits visos daudzstūros palielinās ne vairāk kā par 4 (divas malas rodas pilnīgi no jauna grieziena rezultātā, un vēl ne vairāk kā divas no sagrieztā gabala malām katra sadalās divās jauno daļu malās, skat. A28. zīm.).



A28. zīm.

Tāpēc kopējais malu skaits nepārsniedz $4+4\cdot 1999n = 7996n+4$. Tātad jāpastāv nevienādībai $1999(3+4+\ldots+n)+2000 \le 7996n+4$ 1999(3 + 4+ ... + n) + 2000.

Nevienādība nav pareiza, ja, piemēram, n = 10.

Tāpēc mūsu pieņēmums nav pareizs.

5.A6. Atbilde: c = 2,d = 8 vai c = 8,d = 2.

Ievērosim, ka (a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d) = (a + d) + (b + c). Tātad no skaitļiem 6; 9; 11 ; 12; 15 jāvar izveidot divus pārus, kuros ieejošo skaitļu summas ir vienādas. Viegli pārbaudīt, ka tas ir iespējams tikai vienā veidā: 6 + 15 = 9 + 12. Tāpēc a + b + c + d = 21, a + b = 11 un tāpēc c + d = 21 – 11 = 10.

Skaidrs, ka visi naturālie skaitļi a, b, c, d ir dažādi: ja starp tiem būtu vienādi, tad vienādām būtu jābūt arī dažu pāru summām.

Apzīmēsim tagad skaitļus a, b, c, d augošā kārtībā ar x < y < z < t. Tad mazākā divu skaitļu summa ir x + y, otrā mazākā x + z, lielākā z + t, otra lielākā y + t.

Tātad x + y = 6, x + z = 9, y + t = 12, z + t = 15.

Iegūstam y = 6 - x, z = 9 - x, t = 12 – y = 6 + x. Tāpēc x + t = 6 + 2x un y + z = 15 - 2x; viena no šīm summām ir 10, otra 11 (tātad viena pāra, otra – nepāra skaitlis).

Tā kā 6 + 2x ir pāra skaitlis un 15 - 2x ir nepāra skaitlis, tad 6 + 2x = 10; no šejienes x = 2, y = 4, z = 7, t = 8. No šiem skaitļiem tikai 2 un 8 dod summā 10. Tāpēc skaitļi c un d ir 2 un 8. Pārbaude parāda, ka visi uzdevuma nosacījumi izpildīti.

B GRUPA

5.B1. Atbilde: 361; 529; 784.

Uzdevumā minētie trīsciparu skaitļi var būt tikai 169; 196; 256; 289; 324; 361 ; 529; 576; 625; 729; 784; 841; 961 (mums neder skaitļi ar vienādiem cipariem). Lai izmantotu ciparu 3, jāveido vai nu 324, vai 361.

Pieņemsim, ka viens no kvadrātiem ir 324. Viegli pārbaudīt, ka tad mēs nevaram izmantot ciparu 8. Tāpēc nav jāveido vis 324, bet gan 361. Tad ciparu 4 var izmantot tikai skaitlī 784. No atlikušajiem cipariem 2; 5; 9 var izveidot vienu kvadrātu, proti, 529.

Tāpēc vienīgais atrisinājums ir 361; 529; 784.

5.B2. Izvēlamies punktu A. Pieņemsim, ka caur to iet augstākais 3 taisnes. Uz tām ir izvietoti 9 pārējie punkti, tāpēc vismaz uz vienas no šīm taisnēm ir izvietoti vēl vismaz 3 citi punkti bez A; tātad uz šīs taisnes var atrast 4 punktus A, B, C, D. Ņemam punktu S ārpus šīs taisnes (tāds eksistē saskaņā uzdevuma nosacījumiem). Caur to iet četras dažādas taisnes SA, SB, SC, SD (un varbūt vēl kādas citas).

5.B3. Atbilde: **a)** var, **b)** nevar.

Ievērosim: ja a + b = 3c, tad a + b + c = 4c, tātad katrā veidojamajā 3 skaitļu grupā skaitļu summa dalās ar 4. Tāpēc, lai prasīto sadalījumu varētu izveidot, visu skaitļu summai no 1 līdz 3n ieskaitot jādalās ar 4.

Tā kā 1 + 2 + 3 + . . . + 18 = 171, tad pie n = 6 uzdevuma prasības nav izpildāmas, jo 171 nedalās ar 4.

Pie n = 8 tās var izpildīt, piemēram, šādi:

$\frac{1+5}{2}=3; \frac{3+9}{4}=3; \frac{10+11}{7}=3; \frac{6+18}{8}=3;$

$\frac{16+20}{12}=3; \frac{17+22}{13}=3; \frac{19+23}{14}=3; \frac{21+24}{15}=3.$

5.B4. Atbilde: jā, var.

Aizstāsim nepāra skaitļus 1; 3; 5; ...; 1999 attiecīgi ar -1999; -1997; ...; -1 (t.i., samazināsim katru no tiem par 2000). Veicot šādu samazināšanu, nevienas apskatāmās summas dalīšanās vai nedalīšanās ar 2000 nemainās.

Iegūto skaitļu sistēmu sakārtosim šādi: -1; 2; -3; 4; -5; 6; . . . ; -1997; 1998; -1999.

Pierādīsim, ka šis sakārtojums apmierina uzdevuma prasības. Ja jāsaskaita skaitļi "skaitļu nogrieznī", kas sākas ar nepāra un beidzas ar pāra skaitli, tad tiek saskaitīti n ($n \le 999$) blakusesošu skaitļu pāri, kur katra pāra skaitļu summa ir (-1). Tāpēc iegūtā kopējā summas vērtība ir -n. Tā kā $|-n| \le 999$, tad šī summa nedalās ar 2000.

Trīs citus gadījumus apskata līdzīgi.

5.B5. Atbilde: jā, to var izdarīt.

Līdzīgi kā 100.uzdevuma risinājumā attēlojam plaknē “kluci”, kas izveidots no $3\times3\times3$ maziem vienādiem klucīšiem. Tagad uz katras taisnes ir 4 punkti, bet caur katru punktu iet tikai trīs taisnes.

Caur visiem pašreiz atzīmētajiem 64 punktiem novelkam paralēlas taisnes tā, lai tās visas atšķirtos savā starpā, un atzīmējam vēl trīs jau uzzīmētā režģa kopijas, kas iegūtas, sākotnējo kopiju pārbīdot paralēli tā, lai 64 punkti slīdētu pa novilktajām taisnēm. Kopijas atzīmējam tā, lai neviena jaunā taisne nesakristu ne ar vienu veco.

5.B6. No četrām monētām var izveidot 6 monētu pārus ar masām a + b, a + c, a + d, b + c, b + d, c + d.

Tā kā a < b < c < d, tad a + b un a + c ir attiecīgi mazākā un otrā mazākā no tām, bet c + d un b + d ir attiecīgi lielākā un otrā lielākā no tām.

Vispārīgi runājot, jebkura no abām atlikušajām summām a + d un b + c var būt mazāka par otru. Parādīsim, ka mūsu gadījumā, kad izpildās sakarības 2ac = bd un 3a > 2b, noteikti b + c < a + d.

Tiešām, mums jāpierāda, ka $b+c<a+\frac{2ac}{b}$ jeb, kas ir tas pats,

$b^2 + bc < ab + 2ac$ (*).

Atcerēsimies, ka $a>\frac{2}{3}b$. Tāpēc, ja mēs pratīsim pierādīt nevienādību, kas iegūta no (*), aizstājot a ar $\frac{2}{3}b$ (t.i., samazinot (*) labo pusi), tad būs pierādīta arī (*).

Aizstājot (*) a ar $\frac{2}{3}b$, iegūstam $b^2+bc<b\cdot\frac{2}{3}b+2c\cdot\frac{2b}{3}$,

$\frac{b^2}{3}<\frac{bc}{3}.$

Tā ir taisnība, jo $b < c$. Tāpēc (*) pierādīta.
No šejienes iegūstam, ka ir spēkā nevienādību virkne
$a + b < a + c < b + c < a + d < b + d < c + d$
Tātad, ja uz katra no svaru kausiem novietos divas monētas, tad noteikti uz leju nosvērsies tas kauss, uz kura atrodas smagākā monēta ar masu d.
Apzīmēsim monētas ar x, y, z, t un izdarām divas svēršanas:
1) salīdzināsim x; y ar z; t
2) salīdzināsim x; z ar y; t
Tieši viena monēta abās svēršanās atradīsies uz kausa, kas nosveras uz leju. Tā arī būs meklējamā smagākā monēta.

6. SESTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

6.A1. Uzdevuma apgalvojums seko no vienādībām

$$(2a - 3)(2a - 1)(2a + 1)(2a + 3) + 16 = (2a - 3)(2a + 3)(2a - 1)(2a + 1) + 16 =$$
$$= (4a^2 - 9)(4a^2 - 1) + 16 = 16a^4 - 40a^2 + 25 = (4a^2 - 5)^2,$$ ievietojot $a = 50$.

6.A2. <u>Atbilde:</u> 10468 un 23579.

Ievērosim, ka $10468 \cdot 23579 = 246824972$. No šejienes uzreiz redzams, ka reizinātāju pirmajiem cipariem jābūt 1 un 2 (visos citos gadījumos reizinājuma pirmais cipars ir vismaz 3 un reizinājumam ir vismaz 9 cipari, tāpēc tas ir lielāks par nupat iegūto.

Vienādība $xy = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y)^2 - (x-y)^2}$ pozitīviem x un y pierāda: ja divu skaitļu summa ir konstanta, tad to reizinājums ir jo mazāks, jo vairāk šie skaitļi atšķiras viens no otra.

Atcerēsimies, ka no diviem piecciparu skaitļiem mazākais ir tas, kuram mazāks pirmais cipars (ja šie cipari ir dažādi, kā tas ir mūsu gadījumā).

Tāpēc iegūstam: tam skaitlim, kuram ir mazāks pirmais cipars, ir mazāks arī otrais cipars (citādi, samainot otros ciparus - no tā abu skaitļu summa nemainās - reizinājums samazinātos), mazāks arī trešais cipars u.t.t. Bez tam skaidrs arī, ka katrā no abiem reizinātājiem cipariem jābūt novietotiem augošā secībā (izņemot nulli, kas nedrīkst būt skaitļa pirmais cipars); pretējā gadījumā, samainot ciparus augošā secībā, mēs samazinām atbilstošo reizinātāju, tātad arī reizinājumu.

Ierakstīsim reizinātāju ciparus tabulā ar izmēriem 2x5 rūtiņas, mazāko reizinātāju rakstot pirmajā rindiņā. No augstāk minētā seko, ka sekojošu ciparu vietas noteiktas viennozīmīgi:

1	0			
2				9

Ja otrā reizinātāja otrais cipars nav 3, tad reizinājums ir lielāks par 10300x24500=252350000, kas ir vairāk par sākumā iegūto rezultātu. Tāpēc iegūstam ciparu sadalījumu

1	0			
2	3			9

Skaidrs, ka 4 ir trešajā kolonnā; saskaņā ar iepriekšējo tam kā mazākajam simtu ciparam jābūt mazākajā reizinātājā. Iegūstam

1	0	4		
2	3			9

Atlikušos ciparus var ierakstīt tikai piecos veidos tā, lai izpildītos iepriekš minētie nosacījumi. Viens no tiem minēts risinājuma sākumā. Pārējie četri ir:

1	0	4	5	6
2	3	7	8	9

$10456 \cdot 23789 = 248737784$

1	0	4	5	7
2	3	6	8	9

$10457 \cdot 23689 = 247715873$

1	0	4	5	8
2	3	6	7	9

$10458 \cdot 23679 = 247634982$

1	0	4	6	7
2	3	5	8	9

$10467 \cdot 23589 = 246906063$

Tātad tiešām mūsu sākumā uzrādītais piemērs dod prasīto minimumu.

6.A3. Atbilde: jā, to var izdarīt, ripinot kubu tāda taisnstūra iekšpusē, kas sastāv no 10 rūtiņām, katra no kurām vienāda ar kuba skaldni.

Tabulā redzama viena no iespējām, kurā ar numuriem apzīmētas rūtiņas, kurās kubs nonāk pēc kārtējās pārvelšanas. Velšana sākas no rūtiņas ar numuru 12 un arī beidzas šajā rūtiņā.

11	10	3; 9	4	5
12	1	2; 8	7	6

B GRUPA

6.B1. Ievērosim, ka

$$1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 1999!\cdot 2000! = 1!\cdot(1!\cdot 2)\cdot 3!\cdot(3!\cdot 4)\cdot\ldots\cdot 1999!\cdot(1999!\cdot 2000) =$$

$$= (1!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 1999!)^2\cdot(2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2000) = (1!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 1999!)^2\cdot 2^{1000}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1000) =$$

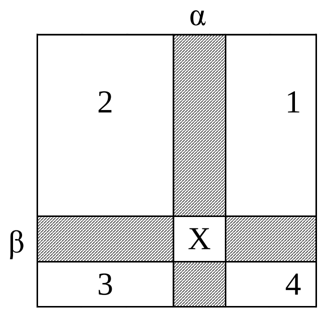
$$= (1!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 1999!\cdot 2^{500})^2\cdot 1000$$

Tātad varam izsvītrot 1000!, un palikušie reizinātāji būs meklētie.

6.B2. Viegli pārbaudīt, ka pietiek ar 36 gājieniem, ja mēs izmantojam visus iespējamos pārus “rindiņa - kolonna “(tad katra rūtiņa maina krāsu 11 reizes). Pierādīsim, ka ar mazāk gājieniem nepietiek.

Īsuma pēc ar vārdiem “gājiens x” apzīmēsim krāsu maiņu rindiņā un kolonnā, kam ir kopīga rūtiņa x. Skaidrs, ka katru gājienu vērts izdarīt vai nu 0, vai 1 reizi, jo divreiz izdarīts viens un tas pats gājiens “anulējas”. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem katrā rindiņas un kolonnas veidotā pārī jābūt izdarītam nepāra skaitam gājienu, lai rezultātā mainītos krāsa šīs rindiņas un kolonas kopējā rūtiņā.

Pieņemsim, ka gājiens x nav izdarīts (skat. A29. zīm.)



A29. zīm.

Aplūkosim iesvītroto apgabalu; katra no tā 10 rūtiņām mainījusi krāsu nepāra skaitu reižu, tāpēc visas šīs 10 rūtiņas kopā mainījušas krāsu pāra skaitu reižu. Gājieni, kas izdarīti apgabalos 1, 2, 3, 4, katrs veido divas maiņas iesvītrotajās rūtiņās, tāpēc tie kopā izsauc tur pāra skaitu krāsu maiņu.

Ja kolonnā a izdarīti a gājieni un rindiņā b - b gājieni, tad tie kopā iesvītrotajā apgabalā radījuši $5\cdot a+5\cdot b=5(a+b)$ krāsu maiņas; tāpēc a + b ir pāra skaitlis. Bet tā ir pretruna ar pasvītroto apgalvojumu.

Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un katrā rūtiņā jābūt izdarītam gājienam. Tāpēc gājienu ir vismaz 36.

6.B3. Atbilde: nē, nevar.

Trijstūriem kopā būtu $665\cdot 3=1995$ stūri. Katrs $2000-$ stūra stūris vienlaikus būtu arī vai nu sākotnējā kvadrāta stūris, vai vismaz viena trijstūra stūris, bet 2000 > 1995 + 4.

Tātad trijstūru stūru ir “pārāk maz”, lai “apkalpotu” visus 2000 - stūra stūrus.