Materiāls ņemts no grāmatas: A.Andžāns, I.Bērziņa, B.Johannessons. "Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1999. - 2006. gadā. Zīmējumu numerācija saglabāta kā grāmatā.

26. MĀCĪBU GADS (1999/ 2000)

UZDEVUMI

1. PIRMĀ NODARBĪBA

A GRUPA

1.A1. Kādi četrciparu skaitļi, kas beidzas ar 9, dalās ar katru savu ciparu?

1.A2. Izdomājiet, vai visu kuba virsmu var aplīmēt ar 6 kvadrātiem tā, lai tie nekur nepārsegtos un lai starp kvadrātiem būtu gan vienādi, gan dažādi.

1.A3. No grāmatas izrāva vairākas pēc kārtas ņemtas lapas. Pirmās izrautās lappuses numurs bija 185, bet pēdējais numurs sastādīts no tiem pašiem cipariem , tikai citā kārtībā. Kāds bija pēdējās izrautās lappuses numurs?

1.A4. Trīs kaudzēs ir attiecīgi 10, 17 un 21 akmentiņi. Atļauts ar vienu gājienu pievienot divām kaudzēm pa vienam akmentiņam. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai visās kaudzēs būtu vienāds akmentiņu skaits? Vai to var panākt, ja kaudzēs sākotnēji ir patvaļīgs akmentiņu daudzums?

1.A5. Visas trijstūra malas ir vienādas. Vai to var sagriezt 5 vienādsānu trijstūros, starp kuriem nekādi divi nav savā starpā vienādi?

1.A6. Sprīdītim jāuzzina, vai ķēniņa pils atrodas pa labi vai pa kreisi. Viņš satiek trīs rūķīšus. Zināms, ka divi rūķīši vienmēr runā taisnību, bet viens dažreiz runā taisnību, dažreiz melo. Sprīdītis nezina, kurš rūķītis ir "neuzticams". Kā Sprīdītis var uzzināt vajadzīgo, uzdodot pa vienam jautājumam diviem no rūķīšiem?

B GRUPA

1.B1. Kuba izmēri ir $3\times3\times3$. Vai no tā var izzāģēt 9 kubiņus ar izmēriem $1\times1\times1$ katru tā, lai atlikušā ķermeņa virsmas laukums būtu tāds pats kā sākotnējam kubam?

1.B2. Apskatām visas daļas ar saucēju 1999, kuru skaitītāji ir 1; 2; …; 1998. Pierādīt, ka starp tām ir pāra skaits nesaīsināmu daļu.

1.B3. Uz kuba skaldnēm uzrakstīti 6 dažādi naturāli skaitļi; uz blakus skaldnēm uzrakstītie skaitļi atšķiras viens no otra vismaz par 2. Kāda ir mazākā iespējamā visu 6 skaitļu summa?

1.B4. Simts vienāda izmēra kartīšu viena puse ir sarkana, bet citām 100 tādām pašām kartītēm - balta; otrā puse visām 200 kartītēm ir zaļa. Kartītes kaut kā novietotas divās rindās pa 100 kartītēm katrā ar zaļo pusi uz augšu. Sprīdītis, tikai paskatoties uz rindām, prot pateikt, vai pirmajā rindā balto kartīšu ir tikpat, mazāk vai vairāk nekā otrajā rindā sarkano. Kā tas iespējams?

1.B5. Ģeologam ir sviras svari bez atsvariem un 8 dažādi akmeņi. Viņš vēlas noskaidrot, vai ir taisnība, ka katri divi akmeņi kopā sver vairāk par jebkuru trešo akmeni. Kā to izdarīt, izmantojot 13 svēršanas?

1.B6. Doti 10 dažādi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 90. Pierādīt: no tiem var izvēlēties divus skaitļus tā, ka izvēlēto skaitļu attiecība (lielākais pret mazāko) nepārsniedz 3/2.

2. OTRĀ NODARBĪBA

A GRUPA

2.A1. Tabula sastāv no 3×3 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Rindiņās ierakstīto skaitļu summas ir 21, 22 un 24; divās kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir 27 un 28. Kāda ir trešajā kolonnā ierakstīto skaitļu summa?

2.A2. Vai septiņstūra trīs diagonāles var krustoties vienā punktā? Bet četras diagonāles?

2.A3. Kādu naturālu skaitli pareizināja pašu ar sevi. Pierādiet, ka rezultāts nav 97516824.

2.A4. Lauvam apstājies sienas pulkstenis. Viņš var aiziet ciemos pie tīģera un paskatīties uz tīģera sienas pulksteni, bet, atgriežoties savā alā, pareizais laiks būs cits.
Kā lauvam nostādīt savu sienas pulksteni pareizi?

2.A5. Plaknē atrodas 4 punkti. Izmērot attālumus starp katriem diviem no tiem, iegūst tikai 2 dažādas vērtības.
Uzzīmējiet cik varat daudzus dažādus 4 punktu novietojumus ar šādu īpašību.

2.A6. Ierakstiet tabulā 4×4 rūtiņas naturālus skaitļus no 1 līdz 7 (katrā rūtiņā vienu skaitli) tā, lai katra rindiņa un katra kolonna kopā saturētu 7 dažādus skaitļus. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

B GRUPA

2.B1. Jānis piedāvā Andrim sadalīt konfektes šādi: viena man, divas tev, trīs man, četras tev, …; kad tā vairs nevarēs turpināt, kārtējais zēns paņems visas atlikušās. Kurš kopā saņems vairāk konfekšu?

2.B2. Sešstūra malu garumi ir 1; 2; 3; 4; 5; 6 (varbūt citā kārtībā). Vai var gadīties, ka kāda riņķa līnija pieskaras visām sešstūra malām?

2.B3. Skaitļu virkni 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; … veido pēc likuma: katrs loceklis, sākot ar trešo, vienāds ar divu iepriekšējo summu. Vai šajā virknē ir divi blakus stāvoši skaitļi, kas dalās ar 3?

2.B4. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Vai šaha zirdziņš var apstaigāt tās tā, lai katrā rūtiņā būtu tieši vienu reizi? Ar pēdējo gājienu nav obligāti jāatgriežas sākotnējā rūtiņā.

2.B5. Kādu mazāko daudzumu naturālu skaitļu jāuzraksta, lai katrs nenulles cipars būtu pēdējais cipars kaut kādu divu uzrakstīto skaitļu reizinājumā?

2.B6. Skat. A grupas 6. uzdevumu, ja formulējumā 4 aizstāj ar 8 un 7 aizstāj ar 15.

3. TREŠĀ NODARBĪBA

A GRUPA

3.A1. Skaitli $\frac{1}{26}$ pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu un izsvītroja tajā 1999-o ciparu aiz komata.
Kurš skaitlis lielāks: sākotnējais vai iegūtais?

3.A2. Atrast visus naturālos skaitļus, kas 8 reizes lielāki par savu ciparu summu.

3.A3. Desmit dažādi naturāli skaitļi izrakstīti uz riņķa līnijas. No katriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem viens dalās ar otru. Vai noteikti eksistē tādi divi skaitļi, kas uzrakstīti uz riņķa līnijas, neatrodas blakus un no kuriem viens dalās ar otru?

3.A4. Izdomājiet kaut vienu taisnstūri, kuru var sagriezt savstarpēji līdzīgos trijstūros, kas nav taisnleņķa trijstūri.

3.A5. Kvadrāts sastāv no 36 vienādām rūtiņām; rūtiņas malas garums ir 1. Kādu lielāko daudzumu rūtiņu centru var atzīmēt, lai attālums starp katriem diviem atzīmētajiem centriem būtu lielāks par 2?

3.A6. Ar kādu lielāko daudzumu vienādu nenulles ciparu var beigties naturāla skaitļa kvadrāts?

B GRUPA

3.B1. Krava ar masu 11 tonnas iepakota kastēs; nevienas kastes masa nepārsniedz 3 tonnas. Kāds mazākais daudzums reisu jāveic, lai aizvestu visu kravu, ja katrā reisā var aizvest ne vairāk kā 3 tonnas?

3.B2. Dots, ka a, b, c, d – pirmskaitļi, $a>3b>6c>12d$ un $a^2-b^2+c^2-d^2=1749$. Aprēķiniet $a^2+b^2+c^2+d^2$.

3.B3. Skat. A grupas 3. uzdevumu, ja izrakstīti 9 skaitļi.

3.B4. Kvadrāts sastāv no 64 vienādām rūtiņām. Dažās rūtiņās ierakstīta zvaigznīte, pie tam tā, ka blakus katrai rūtiņai atrodas vismaz viena zvaigznīte. (Zvaigznīte atrodas blakus rūtiņai X, ja tā ir tādā rūtiņā, kam ar X ir kopēja mala). Kāds mazākais zvaigznīšu daudzums var būt kvadrātā?

3.B5. Kvadrāts sastāv no 16 vienādām rūtiņām. Dažās rūtiņās novilkts pa diagonālei; nekādām divām novilktajām diagonālēm nav kopīgu punktu. Kāds ir lielākais iespējamais novilkto diagonāļu skaits?

3.B6. Skopulim ir 51 pēc ārējā izskata vienāda monēta. No tām 50 ir ar vienādu masu, bet viena – vieglāka. Kā ar 5 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast vieglāko monētu, ja nevienu monētu nedrīkst svērt vairāk par 2 reizēm?

4. CETURTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

4.A1. Viens no trim brāļiem A, B, C vienmēr runā patiesību, otrs vienmēr melo, bet trešais dažreiz runā patiesību, dažreiz melo. Uz jautājumu "Kas ir A?" viņi atbildēja šādi:

A: "Es dažreiz meloju, dažreiz nē".

B: "Melis!"

C: "Godīgs!"

Noskaidrojiet, "kas ir kas" no šiem brāļiem.

4.A2. Vai pastāv tāds izliekts četrstūris, kuru var sadalīt divās vienādās daļās, novelkot vienu nogriezni, bet nevar to izdarīt, novelkot diagonāli vai viduslīniju?

4.A3. Pierādīt: no sešiem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem vismaz viens nav lielāks par savu naturālo dalītāju summu, neieskaitot šai summā viņu pašu.

4.A4. Divi trīsciparu skaitļi atšķiras viens no otra par 8. Par cik var atšķirties to ciparu summas?

4.A5. Šaha turnīrā ir 6 dalībnieki, katrs spēlē ar katru vienu reizi. Vai var gadīties, ka no katriem četriem dalībniekiem var atrast tādu, kura partijās ar trim pārējiem viņš vienreiz uzvarējis, vienreiz zaudējis un vienreiz spēlējis neizšķirti?

4.A6. Astoņiem bērniem visiem ir dažāds konfekšu skaits. Ir zināms, ka katrs bērns var visas savas konfektes sadalīt pārējiem tā, lai viņiem būtu vienāds konfekšu skaits. Kāds mazākais skaits konfekšu daudzums var būt tam bērnam, kuram to ir visvairāk?

B GRUPA

4.B1. Pēterim ir 1 lats 98 santīmi, pavisam 100 monētas. Pierādīt, ka viņš savu naudu var sadalīt divās vienādās daļās.

4.B2. Kā no punkta ārpus taisnes var novilkt perpendikulu pret šo taisni, ja dots cirkulis ar neierobežoti lielu rādiusu un lineāls, kura garums ir 1 cm?

4.B3. Vai var izveidot 10 kaudzes akmeņu ar 100 akmeņiem kopā tā, lai visās būtu dažāds skaits akmeņu, bet, jebkuru kaudzi patvaļīgā veidā sadalot divās mazākās, šī īpašība vairs neizpildītos?

4.B4. Pa apli stāv 5 zēni un 5 meitenes. Ar vienu gājienu patvaļīgi divi bērni var mainīties vietām. Ar kādu mazāko gājienu skaitu no jebkuras sākuma situācijas var panākt, lai ne divi zēni, ne divas meitenes nekur nestāvētu blakus?

4.B5. Daži rūķīši no votivapu un šillišallu ciltīm kopīgi sagaidīja Jauno gadu. Svinībām bija sagādātas vairākas kūku kastes, katrā pa 12 kūkām. Katrs votivapa var apēst 6 vai 7 kūkas, katrs šillišalla – 2 vai 3 kūkas. Cik bija votivapu un cik - šillišallu, ja ar 4 kūku kastēm nebūtu pieticis, bet, nopērkot 5 kastes, visas kūkas netika apēstas?

4.B6. Daži skolēni no 7^a klases pārgāja uz 7^b klasi. Pierādiet: varēja gadīties, ka abās klasēs vidējā atzīme paaugstinājās. Vai tas pats varēja notikt, ja pēc tam daži skolēni no 7^b klases pārgāja uz 7^a klasi?

5. PIEKTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

5.A1. Vienas daļas saucējs ir 3, otras – 5; skaitītāji ir veseli skaitļi, un daļu vērtības nav vienādas. Kāda ir mazākā iespējamā šo daļu starpība, no lielākās atņemot mazāko?

5.A2. Vai var plaknē atzīmēt vairākus punktus un novilkt vairākas taisnes tā, lai caur katru atzīmēto punktu būtu novilktas tieši 3 taisnes un uz katras novilktās taisnes atrastos tieši 3 atzīmētie punkti?
(Novilktās taisnes var krustoties arī neatzīmētos punktos.)

5.A3. Aprēķināt reizinājumus 67×67; 667×667; 6667×6667. Kāds būs rezultāts, ja katrā no diviem reizinātājiem būs 100 sešinieki un pēdējais cipars - septītnieks? Atbildi pamatojiet.

5.A4. Taisnstūris sastāv no 3×4 kvadrātiskām rūtiņām ar malas garumu 1. Parādīt, ka taisnstūrī var izdarīt dažus iegriezumus tā, lai tas nesadalītos vairākos gabalos, bet ar to varētu divās kārtās aplīmēt kubu ar izmēriem $1\times1\times1$.

5.A5. Dota taisnstūraina papīra lapa. Jānis to ar taisnu griezienu sagriež divos gabalos, pēc tam vienu no gabaliem - atkal divos utt., lietojot tikai taisnus griezienus. Pierādiet: ja Jānis griezīs pietiekami ilgi, tad iestāsies stāvoklis, kad viņam būs 2000 daudzstūri ar vienādu malu skaitu.

5.A6. Dots, ka a, b, c, d ir naturāli skaitļi. Summām $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$ vērtības ir 6; 9; 11; 12; 15 (nav zināms, kurai summai kura vērtība). Atrast
1) summu $c+d$,
2) skaitļus c un d.

B GRUPA

5.B1. Atrodiet visus iespējamos veidus, kā no 9 nenulles cipariem, lietojot katru tieši vienu reizi, izveidot trīs trīsciparu skaitļus, kuri ir naturālu skaitļu kvadrāti. Pierādiet, ka citu veidu bez jūsu atrastajiem nav.

5.B2. Plaknē doti 10 punkti; tie ne visi atrodas uz vienas taisnes. Caur katriem 2 punktiem novilkta taisne. Pierādiet, ka caur kādu punktu iet vismaz 4 dažādas taisnes.

5.B3. Naturālos skaitļus no 1 līdz 3n jāsadala n grupās pa 3 skaitļiem katrā tā, lai katrā grupā divu skaitļu summa būtu 3 reizes lielāka par trešo skaitli. Vai to var izdarīt, ja

a) $n = 8$,

b) $n = 6$?

5.B4. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 1999 var uzrakstīt rindā katru vienu reizi tā, lai nekādu vairāku pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa nedalītos ar 2000?

5.B5. Atrisiniet A grupas 2. uzdevumu, ja skaitli 3 aizstāj ar skaitli 4.

5.B6. Četrām vienāda izskata monētām ir dažādas masas. Apzīmēsim masas ar $a < b < c < d$. Ir zināms, ka $2ac = bd$ un ka $3a > 2b$. Kā ar divām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast smagāko monētu?

6. SESTĀ NODARBĪBA

A GRUPA

6.A1. Pierādiet, ka skaitli $97 \cdot 99 \cdot 101 \cdot 103 + 16$ var iegūt, pareizinot kādu naturālu skaitli pašu ar sevi.

6.A2. Izmantojot katru ciparu tieši vienu reizi, izveidot divus naturālus piecciparu skaitļus tā, lai to reizinājums būtu mazākais iespējamais.

6.A3. Uz galda atrodas kubs. To atļauts ripināt pa galdu, pārveļot pāri kādai no šķautnēm, ar kurām tas atbalstās uz galda. Vai var pārvelt kubu pāri katrai no šķautnēm tieši vienu reizi tā, lai kubs pēc šīm 12 pārvelšanām nonāktu turpat, kur atradās sākumā?

B GRUPA

6.B1. Ar n! apzīmē visu naturālo skaitļu reizinājumu no 1 līdz n. Piemēram, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$, $1! = 1$. Vai no skaitļiem $1!, 2!, 3!, \ldots, 1999!, 2000!$ var izvēlēties tieši 1999 skaitļus tā, lai to reizinājums būtu naturāla skaitļa kvadrāts?

6.B2. Kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām. Katra tā rūtiņa var būt balta vai melna. Ar vienu gājienu atļauts reizē mainīt krāsu 11 rūtiņās, kas aizpilda vienu (patvaļīgu) rindu un vienu (patvaļīgu) kolonnu.

Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai visas rūtiņas kļūtu baltas, ja sākotnēji tās visas ir melnas?

6.B3. Vai kvadrātu var sagriezt tā, lai rastos viens 2000-stūris un 665 trijstūri, bet nerastos nekādas citas daļas?