PUNKTIŅŠ (A grupa) Deju stunda
12.01.2018

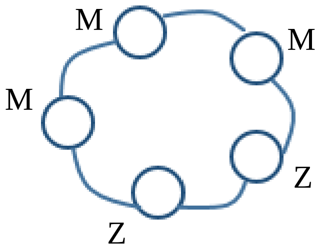
Nodarbības mērķis: Mācīties shematiski interpretēt uzdevumā doto lielumu savstarpējās sakarības, rosināt vizuālo iztēli, pamatot apgalvojumus.

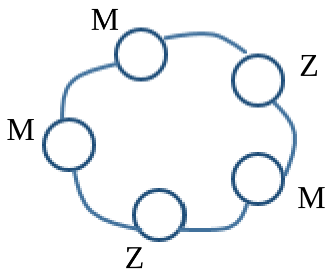
1. Deju grupā ir 5 bērni – zēni un meitenes. Katrs bērns draudzējas tieši ar diviem citiem bērniem. Vai var gadīties, ka meitenes draudzējas tikai ar meitenēm, bet zēni – tikai ar zēniem?

Piezīme. Pirms uzdevuma risināšanas ir svarīgi noskaidrot, vai visi skolēni saprot terminu "draudzība" – tās ir divu cilvēku savstarpējas attiecības, tas ir, Ja Anna draudzējas ar Lindu, tad arī Linda draudzējas ar Annu.

Risinājums. Ja grupā ir 5 bērni, tad viņu vidū ir vismaz 3 meitenes vai arī vismaz 3 zēni. Pieņemsim, ka meiteņu ir vairāk un jebkura no viņām draudzējas tikai ar meitenēm. Tad zēni ir tikai viens vai divi un nevar būt, ka viņi draudzējas tikai ar zēniem, jo tad katram no viņiem nebūtu tieši divi draugi. Tā ir pretrunā mūsu pieņēmumam, tātad ir zēni un meitenes, kuri draudzējas savā starpā.

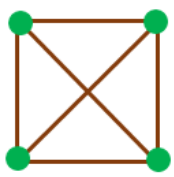
Komentārs. Ieteicams shematiski uzzīmēt draudzību grafu, lai attēlotu, kā bērni savā starpā draudzējas. Ir noderīgi apspriest dažādos izvietojuma gadījumus. Piemēram, ja grupā ir 3 meitenes un 2 zēni, tad draudzību grafi var atšķirties:



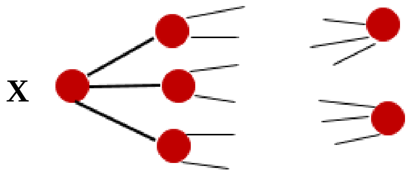


2. Deju grupā ir 6 bērni, un katrs draudzējas tieši ar 3 citiem bērniem. Vai var gadīties, ka meitenes draudzējas tikai ar meitenēm, bet zēni – tikai ar zēniem? Ja tas nav iespējams, tad kāds varētu būt mazākais bērnu skaits šādā grupā, kur meitenes draudzējas tikai ar meitenēm, bet zēni – tikai ar zēniem?

Risinājums. Mazākā bērnu grupa, kur katrs bērns draudzējas tieši ar 3 citiem bērniem, ir 4 bērni, kuri visi draudzējas savā starpā:



Tad pārējo divu bērnu starpā ir tikai 1 draudzība, kas ir pretrunā ar doto.
Aplūkosim vienu no bērniem **X** un viņa vai viņas 3 draugus. Ārpus šīs grupas ir vēl divi bērni, kur katrs draudzējas ar vēl vismaz diviem bērna **X** draugiem. Tāpēc te nevar izveidot divas nošķirtas bērnu grupas.



Te ir divas iespējas – vai nu šie divi bērni (skat zīmējuma labajā pusē) draudzējas savā starpā, tad katrs no viņiem draudzējas ar kādiem diviem **X** draugiem. Ja šie divi bērni savstarpēji nedraudzējas, tad katrs no viņiem draudzējas ar visiem bērna **X** draugiem. (Uzzīmējiet šīs iespējas, šos divus atšķirīgos grafus.)

Mazākā bērnu grupa, kur katrs bērns draudzējas tieši ar trim citiem bērniem un meitenes draudzējas tikai ar meitenēm, bet zēni – tikai ar zēniem, ir 8 bērni, kur ir 4 meitenes un 4 zēni. Visas meitenes draudzējas savā starpā, bet zēni – savā starpā (tāda situācija attēlota uzdevuma pirmajā zīmējumā).

3. Deju grupā ir 4 meitenes un 3 zēni. Gatavojoties deju svētkiem, bērni dejo pāros, lai noskaidrotu, kuri pāri piedalīsies uzvedumā. Vienā tūrē dejo uzreiz 3 pāri. Cik tūres bērniem jādejo, lai katra meitene būtu dejojusi ar katru zēnu?

Atrisinājums. Ja zēnam kopumā ir jādejo ar katru no meitenēm, tad viņam ir jādejo četras dejas. Katram zēnam jānodejo 4 dejas. No tā spriežam, ka nepieciešamas vismaz četras tūres. Parādīsim, ka ar 4 tūrēm pietiek. Meitenes apzīmēsim ar A, B, C, D, bet zēnus ar P, R, S.

Pirmā tūre: dejo pāri (A, P), (B, R), (C, S)

Otrā tūre: (B, P), (C, R), (D, S)

Trešā tūre: (C, P), (D, R), (A, S)

Ceturtā tūre: (D, P), (A, R), (B, S)

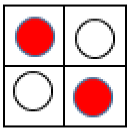
4. Zēniem jāmēģina jauna deju figūra. Ar katru izvēlēto pāri treneris strādā atsevišķi, tas ir, vienā laika momentā deju figūru mēģina tikai 2 zēni. Nodarbības beigās izrādījās, ka katrs no zēniem jauno figūru izmēģinājis atšķirīgu skaitu reižu. Kāda var būt pāru izveidošanas kārtība, ja grupā ir 4 zēni? Uzraksti piemēru! Nosaki mazāko mēģinājumu skaitu!

Atrisinājums. Pieņemsim, ka nodarbības laikā katrs zēns trenējās vismaz vienu reizi. Ja meklējam mazāko iespējamo mēģinājumu skaitu, tad jānosaka iespējami mazākais katra zēna mēģinājumu skaits, kas varētu būt 1, 2, 3 un 4 mēģinājumi. Kopējā katra zēna mēģinājumu skaita summa ir 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Treneris katrā mēģinājumā strādāja ar 2 zēniem. Ja bijuši 5 mēģinājumi, tad treneris kopumā strādājis ar 10 bērniem (daži no zēniem, protams, piedalījušies vairākos mēģinājumos). Parādīsim, ka tas ir iespējams, piemēram:

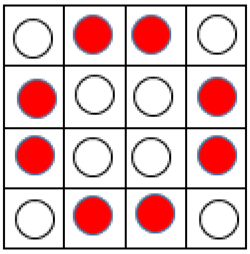
	1.mēģinājums	2.mēģinājums	3.mēģinājums	4.mēģinājums	5.mēģinājums
Patriks	x				
Renārs		x	x		
Silvestrs			x	x	x
Tālis	x	x		x	x

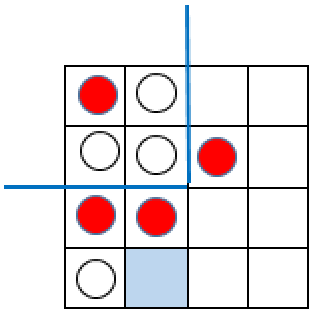
5. Deju svētkos piedalās daudzi deju kolektīvi un dalībnieku izvietojums laukumā veido dažādus krāsainus rakstus. 16 meitenes ir jāizvieto kvadrāta veidā 4 rindās un 4 kolonās tā, lai katrai meitenei baltā kleitā blakus atrastos tieši divas meitenes sarkanās kleitās, bet katrai meitenei sarkanā kleitā blakus atrastos ne vairāk kā viena meitene sarkanā kleitā. Cik meiteņu būs sarkanās kleitās? (Meitenes atrodas blakus, ja viņas stāv blakus vienā rindā vai vienā kolonā.)

Atrisinājums. Uzdevumu risināsim shematiski – kvadrātā 4 x 4 rūtiņas izvietosim baltus un sarkanus aplīšus. Vispirms apskatīsim kvadrātiņu 2 x 2 rūtiņas. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem tajā var izvietot ne vairāk kā 2 aplīšus sarkanā krāsā:



Uzdevumā ir prasīts, cik ir meiteņu sarkanās kleitās jeb cik sarkanos aplīšus jāizvieto rūtiņu kvadrātā. Mēģināsim to novērtēt skaitliski. Izvēlētajā kvadrātā ir 16 rūtiņas. Ja kvadrātu sagriezīsim četros kvadrātos ar izmēru 2 x 2 rūtiņas, tad lielākais sarkano aplīšu skaits var būt 8 – katrā kvadrātiņā divi sarkani aplīši. Pretējā gadījumā (ja sarkano aplīšus skaits ir lielāks par 8) kādā no četriem mazākajiem kvadrātiem būs izvietoti 3 vai pat 4 sarkanie aplīši, kas ir pretrunā ar doto. Izvietojums ar 8 sarkaniem aplīšiem ir iespējams:



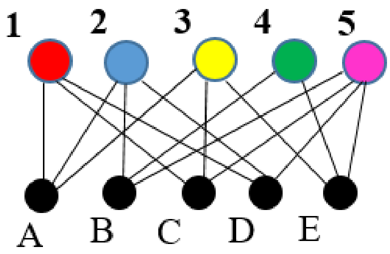


Vai iespējams, ka balto aplīšu ir vairāk nekā 8? Tad, līdzīgi spriežot, kādā no 4 mazajiem kvadrātiem būs 3 baltie aplīši (padomā, kāpēc 4 nevar būt?). Apskatīsim šāda izvietojuma iespējas, pieņemsim, ka 3 baltie aplīši ir kreisā augšējā stūrī. Tad kvadrāta 4 x 4 stūrī noteikti ir sarkanais aplītis, jo stūra rūtiņai ir tikai divas blakus pozīcijas un stūra rūtiņā izvietojot balto aplīti, tam blakus būtu ne vairāk kā viens sarkanais aplītis. Turpinot izvietojumu, spriežam, ka apakšējā kreisā stūrī izvietotam baltajam aplītim blakus jānovieto otrs sarkanais aplītis (šī pozīcija zīmējumā ir iekrāsota), bet tādā gadījumā sarkanajam aplītim virs iekrāsotās rūtiņas blakus atgadīsies divi sarkanie aplīši, kas ir pretrunā ar doto.

Tātad, meiteņu izvietojumā būs tieši 8 meitenes sarkanās kleitās.

6. Katrai no piecām meitenēm ir jāizvēlas viena no piecām balles kleitām. Katrai meitenei patīk tieši 3 kleitas, bet jebkurām divām meitenēm vienlaikus patīk ne vairāk kā 2 kleitas. a) Vai var gadīties, ka tieši 2 kleitas patīk visām meitenēm? b) Vai var gadīties, ka tieši viena kleita patīk visām meitenēm?

Atrisinājums. Vispirms ir jānoskaidro, vai uzdevumā minētā situācija vispār ir iespējama. Pieņemsim, ka meitenes ir A, B, C, D, E, bet kleitas sanumurēsim 1, 2, 3, 4, 5. Parādīsim situāciju shematiski, kur katrai meitenei patīk tieši 3 kleitas, bet jebkurām trim meitenēm vienlaikus patīk ne vairāk kā 2 kleitas. Piemēram:



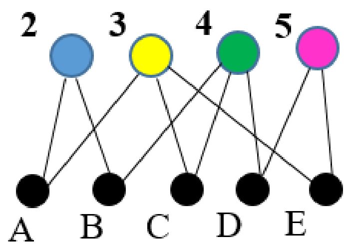
Varam arī izveidot tabulu, kurā redzam, kādas kleitas kurai meitenei patīk (protams, var būt arī citādi piemēri):

Anna	1 2 3
Baiba	2 4 5
Cilda	1 3 5
Dace	1 2 4
Emīlija	3 4 5

No shematiskā zīmējuma (matemātikā to sauc par grafu) un no tabulas redzams, ka jebkurām divām meitenēm vienlaikus patīk ne vairāk kā divas kleitas (pārbaudi!).

a) Vai ir iespējams, ka tieši divas kleitas patīk visām meitenēm? Pieņemsim, ka tas ir iespējams, pieņemsim, ka tās ir pirmā un otrā kleita. Ievērojot, ka katrai meitenei patīk tieši 3 kleitas, tad no atlikušajām trim (trešās, ceturtās un piektās) katrai patīk tieši viena kleita. Tā kā ir 5 meitenes un 3 kleitas, tad vismaz viena kleita patiks vairāk kā vienai meitenei (saskaņā ar Dirihlē principu). Tātad vismaz divām meitenēm vienlaikus patiks vismaz 3 kleitas, kas ir pretrunā ar doto. Tāpēc nav iespējams, ka visām meitenēm vienlaikus patīk tieši divas kleitas.

b) Vai ir iespējams, ka visām meitenēm vienlaikus patīk tieši viena kleita? Jā, tas ir iespējams. Pieņemsim, ka visām patīk sarkanā kleita (pirmā). Tad no atlikušajām kleitām katrai meitenei patīk tieši divas un jebkurām divām meitenēm vienlaikus patīk ne vairāk kā viena kleita. Attēlosim to ar piemēru shematiski, paturot prātā, ka sarkanā kleita patīk vienlaikus visām meitenēm:



Piezīme. Uzdevuma spriedumā var izmantot **Dirihlē principu**:

Ja vairāk kā n elementi jāsadala tieši n grupās, tad kādā no grupām atradīsies vismaz 2 elementi.

PUNKTIŅŠ (A grupa) Sakārtosim, novērtēsim

19.01.2018

Nodarbības mērķis: atrast doto elementu kopīgās un atšķirīgās īpašības, veikt skaitliskus novērtējumus. Šādas iemaņas ir nepieciešamas daudzu uzdevumu atrisināšanā, arī tādu uzdevumu atrisināšanā, kur pamatojumus var veikt, balstoties uz Dirihlē principu.

1. Apskatīsim deviņus naturālos skaitļus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Meklēsim atbildes uz jautājumiem:

a) Cik dažādas divu dažādu skaitļu summas var iegūt no dotajiem skaitļiem?

b) Cik dažādu skaitļu pārus var izveidot?

c) Cik var izveidot tādus dažādu skaitļu pārus, kuru summa nav lielāka par 13?

d) Kāds var būt lielākais tādu skaitļu skaits, lai saskaitot jebkurus 3 no tiem, to summa būtu vismaz 17?

Atrisinājums.

a) Vismazāko summu iegūsim no mazākajiem skaitļiem – tā ir 1 + 2 = 3, līdzīgi lielākā divu dažādu skaitļu summa ir 17. Tad visas dažādās summas ir no 3 līdz 17, to skaits ir 17 – 3 + 1 = 15.

b) Katru no dotiem 9 skaitļiem var likt pārī ar vienu no 8 skaitļiem. Ievērojot, ka izvēlēto skaitļu secībai nav nozīmes (piemēram, pāris 2 un 5 ir tas pats pāris 5 un 2), tad kopējais pāru skaits ir $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$.

Piezīme. Pāru skaita noteikšanu var izpildīt uzskatāmi, shematiski. Apļa formā izkārtojam 9 punktus (vai aplīšus), kas simboliski apzīmē katru no skaitļiem. Var aplūkot divus paņēmienus kā veidojas pāri. 1) Katru punktu uzreiz savieno ar visiem citiem punktiem, novelkot nogriežņus. No katra punkta iziet 8 nogriežņi – izejošo nogriežņu kopējais skaits ir 72. Katram no nogrieznim ir divi gali, tāpēc katrs nogrieznis tika pieskaitīts divas reizes. Nogriežņu skaits ir 36. 2) Nogriežņus velk pakāpeniski. Pirmajam skaitlim jeb punktam atzīmējam visus astoņus iespējamos pārus. Nākošais punkts jau ir savienots ar pirmo punktu, tad tas var veidot vēl septiņus citus pārus. Un tā turpinām. Tad pāru skaitu aprēķina: 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36.

c) Risināsim uzdevumu "no otra gala" - pievērsīsim uzmanību lielākajām summām – tās ir 17, 16, 15 un 14. Tādi ir tikai 6 pāri: (9; 8), (9; 7), (9; 6), (9; 5), (8; 7), (8; 6). Tāpēc to pāru skaits, kuru skaitļu summa ir ne lielāka par 13, ir 36 – 6 = 30.

d) Apskatīsim lielāko 3 skaitļu summu. 9 + 8 + 7 = 24. Šo trīs skaitļu grupai var pievienot jebkurus tādus skaitļus, kur triju vismazāko skaitļu summa ir vismaz 17. Apskatīsim 4, 5, 6. To summa ir 15. Tāpēc jebkuru trīs dažādu skaitļu summa, kur skaitļi ir mazāki par 7, nebūs derīga. Skaitļu grupa, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, sastāv no 5 skaitļiem. Ir divi varianti (9; 8; 7; 6; 5) vai (9; 8; 7; 6; 4).

2. Katram no 4 zēniem ir sīknauda. Vai var gadīties, ka diviem zēniem ir vienāds naudas daudzums, ja

a) dažas no zēnu naudas starpībām ir 1, 3 un 5 centi un nevienam no zēniem nav vairāk kā 6 centi;

b) dažas no zēnu naudas starpībām ir 2, 3 un 5 centi un nevienam no zēniem nav vairāk kā 7 centi?

Atrisinājums.

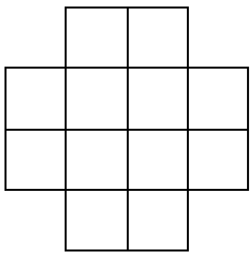
a) Pieņemsim, ka diviem zēniem ir vienāds naudas daudzums. Tad trim zēniem katram ir citāds naudas daudzums, ko apzīmēsim a, b, c. Varam pieņemt, ka vismazākais skaitlis ir a, bet vislielākais ir c:

$$a < b < c$$

Tad lielāko iespējamo starpību 5 var iegūt tikai vienā veidā, ja $a = 1$, bet $c = 6$. Starpību 3 var veidot b un c, tad $b = 3$. tādā gadījumā $b - a = 2$, kas neatbilst nosacījumiem. Ja starpību 3 veido a un b, tad $b = 4$, bet $c - b = 2$, kas atkal neatbilst nosacījumiem. No tā seko, ka visiem zēniem var būt dažāds naudas daudzums. Tas ir iespējams. Zēniem ir, piemēram, 1, 2, 3 un 6 centi. (Atrodi arī citus variantus!)

b) Šis gadījums ir iespējams. Trīs zēniem var būt 2, 3 un 7 centi (vai arī 1, 3, un 6 centi), ceturtajam zēnam naudas daudzums var sakrist ar jebkuru no minētajiem.

3. Sekojošā figūrā katrā rūtiņā ir jāieraksta viens pirmskaitlis. Kādus pirmskaitļus jāieraksta rūtiņās tā, lai katru divu skaitļu summa blakus rūtiņās arī būtu pirmskaitlis un iegūto pirmskaitļu skaits būtu lielākais iespējamais? (Blakus rūtiņām ir kopīga mala.)



Atrisinājums. Lai blakus esošās rūtiņās divu skaitļu summa būtu pirmskaitlis, tad jāievēro, ka gandrīz visi pirmskaitļi, izņemot skaitli 2, ir nepāra skaitļi. No tā seko, ka pirmskaitlis 2 ir jāieraksta rūtiņās, kuras saskaras ar stūriem. Atlikušās sešās rūtiņās ieraksta visus dažādus pirmskaitļus, kuriem pieskaitot 2, atkal iegūst pirmskaitli. Dažādus pirmskaitļu izvēlas, lai iegūtu lielāko dažādo summu skaitu. Noteiksim to. Figūras stūros var ierakstīt 4 dažādus pirmskaitļus, kuri kopumā dos 4 dažādas summas. Centrā ierakstītie divi pirmskaitļi papildus dos vēl divas citas summas. Tāpēc lielākais dažādo summu skaits ir 6.

Aizpildījuma piemērs:

	2	3	
2	5	**2**	11
17	**2**	29	**2**
	41	**2**	

4. Kuram skaitlim no 1 līdz 100 ir vislielākais skaits dažādu dalītāju? Cik dalītāju ir šim skaitlim? Vai ir atrodami arī citi skaitļi no 1 līdz 100 ar tādu pašu dalītāju skaitu?

Komentārs. Pirmskaitļus, kuru reizinājums ir vienāds ar doto skaitli, sauc par šī skaitļa pirmreizinātājiem. **Aritmētikas fundamentālā teorēma** apgalvo: jebkuru naturālu skaitli (izņemot skaitli 1) var izteikt kā vienu pirmskaitli vai sadalīt vairāku pirmskaitļu reizinājumā vienā vienīgā veidā.

(Avots: http://mathworld.wolfram.com/FundamentalTheoremofArithmetic.html)

Atrisinājums. Apskatam kādu skaitli un sadalām to pēc iespējas sīkākos reizinātājos, tas ir, pirmreizinātājos. Piemēram, skaitli 80 var sadalīt sekojošā veidā:

$$80 = 8 \cdot 10 = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

Noteiksim skaitļa dalītāju skaitu. Vispirms apskatīsim, cik dalītājus var izveidot no dotajiem četriem skaitļiem 2. Tie ir 2, 4, 8, 16. Skaitļa dalītājs ir arī 5 un to var kombinēt ar visiem divnieku reizinājumiem, iegūstot dalītājus 10, 20, 40 un 80. Tad kopējais skaitļa 80 dalītāju skaits ir 10, jo skaitlis dalās arī ar 1.

Ja gribam atrast tādu skaitli, kuram ir vairāk nekā 10 dalītāji, tad jāizvēlas lielāks skaitļa pirmreizinātāju skaits. Skaitļa dalītāju skaits ir atkarīgs no pirmreizinātāju skaita un veida. Vismazākais pirmskaitlis ir 2. Sareizinot sešus divniekus, iegūstam skaitli 64, kuram ir tikai 7 dalītāji (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64). Izvēloties visus vienādus pirmreizinātājus, vairāk kā 6 dažādus skaitļa (kurš mazāks par 100) dalītājus iegūt nevar. (Pārbaudi arī citus iespējamos pirmskaitļus!) Tāpēc izdevīgi izvēlēties vismaz divus dažādus pirmreizinātājus.

Aplūkosim lielāko skaitli no dotajiem, tā pirmreizinātāji ir $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ un dažādo dalītāju skaits ir 9.

Aizvietosim lielāko pirmreizinātāju 5. Tā vietā var izvelēties divus pirmreizinātājus 2, jo $2 \cdot 2 = 4 < 5$ un tā iegūstam mazāku reizinājumu - skaitli 80, kuru jau apskatījām. Abus piecniekus aizvietojot ar četriem divniekiem, iegūstam reizinājumu 64. Ja izvēlēsimies trīs dažādus pirmskaitļus, tad viena pirmreizinātāja 5 vietā izvēlēsimies skaitli 3, un tad pirmreizinātāji izveido skaitli $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Šim skaitlim ir 12 dalītāji (1, 2, 4, 3, 5, 6, 12, 10, 20, 15, 30, 60).

Līdzīgi var izvēlēties pirmreizinātāju komplektus

$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$; $\quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$; $\quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 96$

Ir vairāki skaitļi, kuri ir mazāki par 100 un kuriem dalītāju skaits ir 12. Tie ir skaitļi 60, 72, 90 un 96. Citiem skaitļiem (mazākiem par 100) dalītāju skaits ir mazāks.

Piezīme. Var veidot vispārīgāku pierādījumu, balstītoties uz sekojošu teorēmu:

Teorēma. Ja skaitļa *n* sadalījums pirmskaitļu reizinātājos ir

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots . p_k^{\alpha_k} ,$$

tad skaitļa *n* visu dalītāju skaitu s var aprēķināt sekojoši

$$s = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1).$$

Piemēram, ja skaitļa pirmreizinātāji ir *t* divnieki, *m* trijnieki un *k* piecinieki, tad visu skaitļa dalītāju skaits ir *(t+1)(m+1)(k+1).*

5. 30 konfektes ir jāsaliek vairākās kastītēs. Nevienā kastītē nevar ielikt vairāk kā 8 konfektes. Kā sadalīt konfektes,

a) lai būtu jāizmanto pēc iespējas mazāk kastīšu un katrā kastītē būtu citāds konfekšu skaits?

b) lai, salīdzinot katru divu kastīšu konfekšu skaita starpību, visas šīs starpības ir atšķirīgas?

Atrisinājums.

a) Ja 30 konfektes jāsadala pa kastītēm, kur vairāk kā 8 ielikt nevar, tad ir nepieciešamas vismaz 4 kastītes, jo trīs kastītēs kopumā var ielikt lielākais 24 konfektes. Lai katrā kastītē būtu dažāds konfekšu skaits un mēs izmantotu pēc iespējas mazāk kastīšu, tad tajās jāliek cik vien iespējams liels konfekšu skaits, tas ir, $8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 30$. Mazākais kastīšu skaits ir 5.

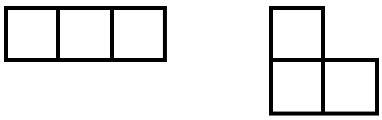
b) Pieņemsim, ka konfektes izvietotas kastītēs, saskaņā ar nosacījumu. Tad nav divu tādu kastīšu, kurās ir vienāds konfekšu skaits. Pretējā gadījumā abām kastītēm sakritīs konfekšu skaita starpības ar citām kastītēm. Tāpēc ir vismaz piecas kastītes. Piecas kastītes veido 10 dažādus pārus, tāpēc kastīšu pāru skaits ir vismaz 10. Kopumā ir jābūt vismaz 10 dažādām skaita starpībām, bet lielākā iespējamā starpība ir 7 (kastītē nevar ielikt vairāk kā 8 konfektes), tāpēc iespējamas tikai 7 dažādas starpības, kas ir par maz, lai būtu izpildīti uzdevuma nosacījumi. Variantu b) realizēt nevar.

PUNKTIŅŠ (A grupa) Rūtiņu figūru pārklāšanās

26.01.2018

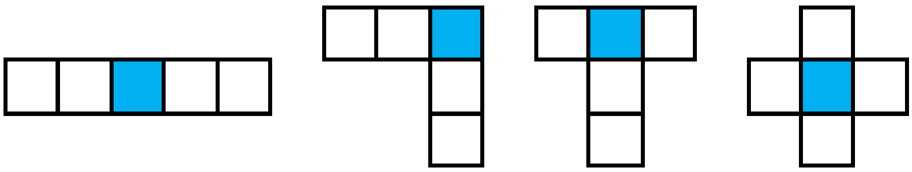
Nodarbības mērķis: aplūkot kombinatoriski ģeometriskus uzdevumus, atklāt figūru izvietojuma īpašības, trenēt telpisko iztēli.

Par “**stienīti**” nosauksim 3 rūtiņu figūru, kas veido taisnstūri *3 x 1* rūtiņa. Otru 3 rūtiņu figūru sauksim par “**leņķīti**”.

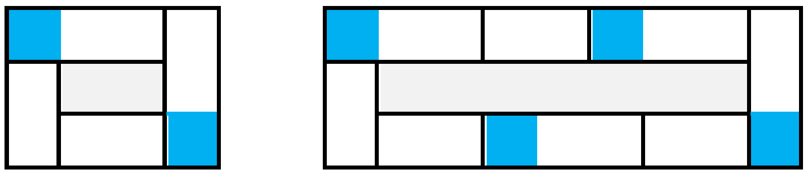


1. **1.** Gar rūtiņu taisnstūra malu ir jāizveido rāmītis – visas malējās rūtiņas jāpārklāj ar stienīšiem tā, ka katram stienītim tieši viena rūtiņa pārklājas ar viena cita stienīša rūtiņu. Kāds var būt taisnstūra platums, ja tā augstums ir 3 rūtiņas?

Risinājums. Divi stienīši var pārklāties dažādi. Rūtiņa, kura pārklāta, ir iekrāsota:



Veidojot prasīto rāmīti, ievērojam, ka pārklājas tieši divi stienīši, tāpēc stienīšu skaits ir pāra skaitlis. Taisnstūra galos jāliek vertikāls stienītis, gar malām var likt tikai horizontālus stienīšus. Tāpēc izmantotas tiek tikai pirmā un otrā konfigurācijas. Vismazāko rāmīti var salikt no 4 stienīšiem, bet lielākam rāmītim ir jāizmanto vismaz 8 stienīši:



Mazākā rāmīša izmērs ir *3 x 4* rūtiņas, lielāku taisnstūri var izveidot no *3 x (4 + 5n)* rūtiņām.

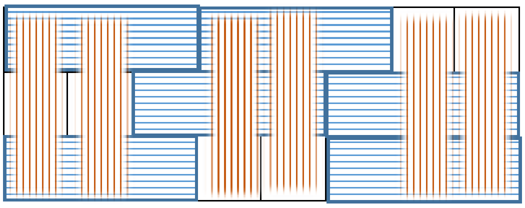
2. Vai taisnstūri ar izmēru $3 \times n$ rūtiņas var pilnībā pārklāt ar stienīšiem uzdevumā 1 aprakstītajā veidā?

Atbilde.

Jā, var. Visās rindās liek tikai horizontālos stienīšus. Tāda taisnstūra izmērs būs $3 \times (5n)$, kur $n > 0$.

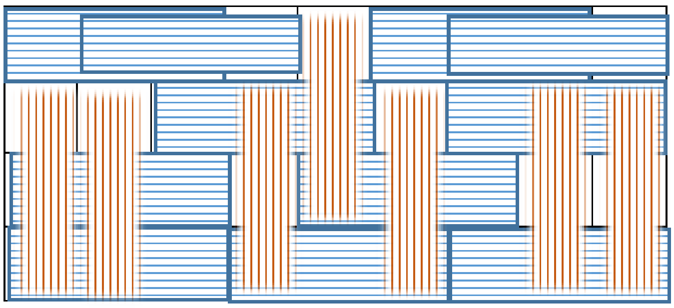
3. Taisnstūri ar izmēru 3×8 pārklāj pilnībā ar stienīšiem tā, ka katram stienītim tieši divas rūtiņas pārklājas ar diviem citiem stienīšiem!

Atbildes piemērs:



4. Taisnstūri ar izmēru 4×9 rūtiņas pārklāj pilnībā ar stienīšiem, kur katram stienītim tieši 2 rūtiņas ir pārklātas ar ne vairāk kā diviem citiem stienīšiem un pārklājumā ir vismaz viens vertikāli novietots stienītis un vismaz viens horizontāli novietots stienītis!

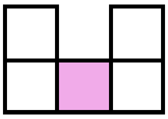
Atbildes piemērs:



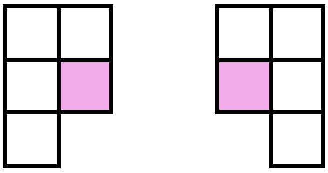
5. Cik dažādas divu leņķīšu konfigurācijas var izveidot, ja tiem pārklājas tieši viena rūtiņa?

Atrisinājums. Var izveidot 8 dažādas leņķīšu konfigurācijas. Starp tām ir trīs pāri ar savstarpēji simetriskām figūrām (simetrija ir pret asi – viena konfigurācija ir kā otras konfigurācijas spoguļattēls). Izveidotās konfigurācijas ir 5 rūtiņu figūras, tās sauc par pentamino. Katras pentamino figūras siluets atgādina kādu alfabēta burtu.

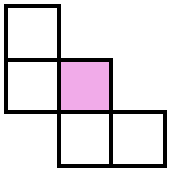
Leņķīšu konfigurācijas (rūtiņas, kuras pārklājas, ir iekrāsotas):



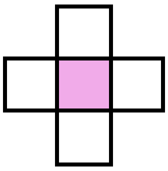
U



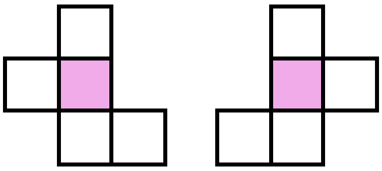
P



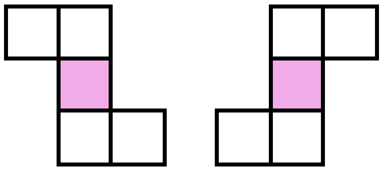
W



X



Y



Z

Jāatzīmē, ka **P** veida konfigurāciju var iegūt divos veidos, augšējo leņķīti pagriežot uz vienu vai otru pusi.

6. Noklāj taisnstūri ar izmēru *4 x 5* rūtiņas ar leņķīšiem tā, ka katram leņķītim pārklājas viena rūtiņa ar citu leņķīti!

Atrisinājuma ideja: izveidojam taisnstūrveida bloku ar izmēru *2 x 5* rūtiņas. Te novieto divas P – veida konfigurācijas (skat. iepriekšējo uzdevumu), izmantojot 4 leņķīšus. Doto taisnstūri pārklājam ar četriem šādiem blokiem.

Taisnstūri pārklāt ar leņķīšiem, protams, var arī citādi.