PUNKTIŅŠ (B grupa) Uzdevumu “kokteilis”
6.10.2017

Īsi risinājumi un paskaidrojumi

1. Taisnstūris sastāv no 8 x 10 rūtiņām. Tajā jāizmitina 2 suņi, daži kaķi un daži jēri. Katram kaķim dzīvei vajag vienu rūtiņu. Katram sunim dzīvei vajag 2 x 2 rūtiņu kvadrātu. Katram jēram dzīvei vajag 10 rūtiņu lielu patvaļīgas formas apgabalu. Neviena suņa mītne ne ar malām, ne stūriem nedrīkst saskarties ne ar vienu jēra mītni. Kāds ir lielākais izvietojamais jēru daudzums?

Atrisinājums. Ja aplūkojam situāciju – taisnstūrī ir 80 rūtiņas, kur 8 no tām aizņem suņi. Atliek 72 rūtiņas, kurās teorētiski varētu izvietot 7 jērus. Taču suņu aploki nedrīkst saskarties ar jēru aplokiem. Tas nozīmē, ka starp suņu aizņemtiem kvadrātiem un jēru aplokiem ir jāizvieto kaķi kā aizsargjosla. Visekonomiskākais abu suņu izvietojums ir blakus taisnstūra 8 x 10 stūrī, tad aizsargjosla ir 7 rūtiņu gara. Tas nozīmē, ka atliek ne vairāk kā 65 rūtiņas jēru izvietošanai. Tāpēc lielākais var izvietot 6 jērus. To nav grūti konstruēt (2 suņi, 6 jēri un 12 kaķi).

2. Konstruē četras sešu rūtiņu figūras, kuras visas pieskaras viena otrai.

Piezīme. Viens no risinājumiem ir centrā izvietot taisnstūri 2 x 3 rūtiņas, kuru ietver trīs 6rūtiņu figūras, kuras savstarpēji saskaras.

3. Diviem divciparu skaitļiem $A=\overline{ab}$ un $B=\overline{cd}$ uzrakstīja skaitļus, kuros ir otrāda ciparu kārtība $U=\overline{ba}$ un $V=\overline{dc}$. Visi cipari *a, b, c, d* ir dažādi. Atrodi piemērus, kur skaitļu *A* un *B* summa ir mazāka nekā skaitļu *U* un *V* summa! Kādi var būt vislielākā ciparu *a* un *c* summa?

Atrisinājums. Piemērs: *A* = 12, *B* = 37, tad *U* = 21 un *V* = 73. 12+37 < 21 + 73

Skaitļa *A* decimālais pieraksts ir $A=10a+b$, līdzīgi $B=10c+d$. Savukārt otrs skaitļu pāris $U=10b+a$ un $V=10d+c$. Pēc uzdevuma nosacījuma:

$$10a+b+10c+d<10b+a+10d+c$$

Pārveidojot $9a+9c<9b+9d$, *jeb* $a+c<b+d$

Vislielākās dažādu vienciparu skaitļu summas ir

9 + 8 = 17	9 + 5 = 14	8 + 7 = 15	7 + 6 = 13
9 + 7 = 16	9 + 4 = 13	8 + 6 = 14	7 + 5 = 12
9 + 6 = 15		8 + 5 = 13	

No tā izriet, ka *a* + *c* summa būs mazāka par 17 un arī par 16. Skaitļu *a* + *c* summa nevar būt arī 15 (lielāku summu veido 9 + 7 vai 9 + 8, tad *a* + *c* jābūt 7 + 8, kas liecina ka kādu ciparu jāizmanto divas reizes). Tāpēc vislielākā *a* + *c* summa var būt 14. Var būt vairāki atrisinājumi:

A = 97; *B* = 58

A = 98; *B* = 57

A = 89; *B* = 67

A = 87; *B* = 69

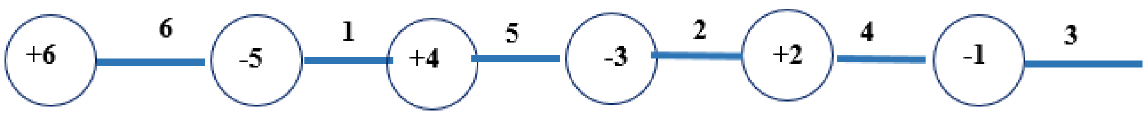
4. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis *n* ar īpašību: skaitļi *n* un *2n* pa abiem satur katru ciparu tieši vienu reizi?

Atrisinājums. Atzīmēsim dažus faktus. Nulli var saturēt tikai skaitlis 2*n*, un to iegūs, ja 5 reizinās ar 2. Novērtējam, ka abi skaitļi būs piecciparu skaitļi. Ja pieņemam, ka *n* ir 4-ciparu skaitlis, tad 2*n* nesatur vairāk kā 5 ciparus (ja vislielāko 4-ciparu skaitli 9999 reizina ar 2, tad iegūst 19998)Tāpat arī *n* nevar būt 6-ciparu skaitlis, jo 2*n* saturētu vairāk kā 4 ciparus. Mazākais 5-ciparu skaitlis, kas satur visus dažādus ciparus ir 12345 (jo 0 nesatur). Otrais cipars nevar būt 2, jo reizinot izvēlēto skaitli ar 2, desmittūkstošu cipars arī būs 2. Nākamais mazākais skaitlis sākas ar 13_ _ _. Tad 2*n* varētu sākties ar 26_ _ _ vai 27_ _ _. No tā seko, ka cipars 2 skaitlī *n* nav iekļauts. Seko *n* = 134_5. Cipars 5 nevar būt desmitu pozīcijā, jo vienu pozīcijā būs tāds skaitlis, kuru reizinot ar 2 veidosies pārnesums (nebūs 0 otrajā skaitlī) (skaitļi, kuru reizinājums ar 2 neveido pārnesumu – 1, 2, 3, 4 jau ir izvietoti citās pozīcijās). Skaitļa *n* desmitu cipars nevar būt 6, jo tad 2*n* desmitu cipars būs 3. Nevar būt arī 7. Der 8.

Mazākais skaitlis *n* = 13485, tad 2*n* = 26970.

5. Autobuss sāka rīta reisu, tajā cilvēki iekāpa tikai nepāra pieturvietās, bet tikai pāra pieturvietās daži no pasažieriem izkāpa. Izbraucot no sestās pieturvietas izrādījās, ka katru ceļa posmu ir veicis citāds skaits pasažieru, kā arī iekāpjošo un izkāpjošo pasažieru skaits katrā pieturvietā ir bijis citāds. Atrodi mazāko iespējamo kopīgo pasažieru skaitu, ja nevienu reizi salons nebija tukšs. Kāda bija pasažieru iekāpšanas – izkāpšanas secība pieturvietās?

Atrisinājums. Vismazākais kopējais pasažieru skaits, kuri iekāpa un izkāpa pieturās būs visu dažādo skaitļu summa no 1 līdz 6, tas ir, 21. Ir 6 pieturas, vienā no pieturām iekāpj 6 pasažieri. Tas iespējams tikai pirmajā pieturā (ja autobusā jau ir kāds pasažieris tad + 6 nozīmē, ka kādu posmu brauks jau vairāk kā 6 pasažieri). Atgadījuma piemērs var būt sekojošais (aplīšos norādīts, cik pasažieri iekāpa vai izkāpa pieturā):



PUNKTIŅŠ (B grupa) Atrodi likumsakarības!
13.10.2017

Īsi risinājumi un paskaidrojumi

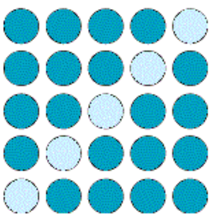
1. Ella iestādīja burvju zariņu. Jau pirmajā dienā zara galā izauga 3 jauni zari. Otrajā dienā atkal katra zara galā izauga 3 jauni zari. Tā turpinājās katru dienu. Devītajā dienā zari vairs neauga, bet katra zara galā uzplauka sudraba lapiņa. Cik lapiņas uzplauka?

Atrisinājums. Pirmajā dienā izauga 3 zari. Katru nākamo dienu zaru galu skaits trīskāršojas. Astoņas dienās izveidojās $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^8 = 6561$ zaru gali. Tikpat daudz devītajā dienā izauga sudraba lapiņas.

2. Pētnieks Asprātis atklājis jaunu baktēriju veidu. Ja satiekas 4 baktērijas, tad viena iet bojā, bet pārējās katra sadalās 4 jaunās baktērijās. Šādas pārmaiņas notiek 20 sekunžu laikā. Tūlīt pat visas baktērijas atkal apvienojas grupās pa četri. Pētnieks Asprātis ievietoja kolbā 8 baktērijas. Tikko baktēriju skaits pārsniedza 10 000, kolba uzsprāga. Pēc cik minūtēm tas notika?

Atrisinājums. 8 baktērijas apvienojas divās grupās. Katrā grupā atliek 3 baktērijas, kuras katra dalās 4 daļās. 20 sekunžu laikā rodas 24 baktērijas. Tās apvienojas 6 grupās, no kurām nākamo 20 sekunžu laikā rodas kopumā $6\cdot3\cdot4 = 72$ jaunas baktērijas. Ja kolbā ir $3n$ baktērijas, tad 20 sekunžu laikā rodas $\frac{3n}{4}\cdot3\cdot4 = 9n$ jaunas baktērijas, tas ir, pēc katrām 20 sekundēm baktēriju skaits ir trīskāršojies. Vienkārši aprēķināt, ka 20 sekunžu periodā tūlīt pēc 2 minūtēm, notiek sprādziens.

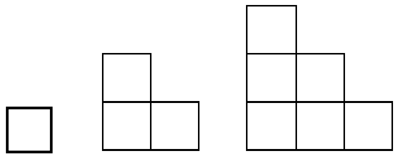
3. Lodītes tiek saliktas kvadrāta veidā, tad noņem tās lodītes, kuras atrodas uz diagonāles. Izpēti, cik lodītes atliek, ja izveido kvadrātiskas konfigurācijas 2 x 2; 3 x 3; 4 x 4; … un noņem lodītes no diagonāles. Izveido atbilstošu skaitļu virkni. Kāda ir tās formula? Cik lodīšu ir 100-tajā konfigurācijā?



Atrisinājums. Attēlā redzama konfigurācija 5 x 5 lodītes, kur noņemtas lodītes no diagonāles. Ja atlikušās lodītes izvieto kompakti – taisnstūra formā, tad lodīšu skaits ir $5\cdot4$. Tāpēc vispārīgs šīs procedūras apraksts ir formā $n(n-1)$. Pirmajā konfigurācijā ir 2 lodītes, otrajā 6, trešajā 12, ceturtajā 20, tad 100-tajā konfigurācijā būs $100\cdot101 = 10100$ lodītes.

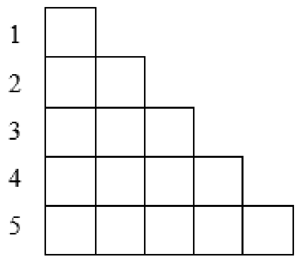
4. Māris būvēja torņus no rotaļu klucīšiem. Cik augstu šāda veida torni Māris var uzbūvēt, ja komplektā ir 50 klucīši? Cik klucīšu viņam nepieciešams, lai uzbūvētu šādu torni augstumā 10? Cik klucīšu vajag, lai vienlaikus uzbūvētu visus torņus augstumā 1, 2, 3, 4, 5 un 6?

Klucīši šķērsgriezumā:



Atrisinājums. Klucīšu skaits torņos secīgi ir 1; 3; 6; 10; 15; 21; …..

Kā veidojas šie skaitļi? Aplūkosim diagrammu:



Klucīšu skaits katrā rindā palielinās par 1. Klucīšu skaits dotajā piemērā ir visu naturālo skaitļu summa no 1 līdz 5. Vispārīga klucīšu skaita aprēķināšanas formula ir:

$$\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$$

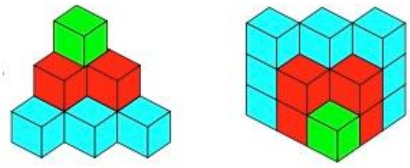
Šī formula izriet no sekojošas metodes:

Kā vēsta nostāsts[1], kad Kārlis Gauss (1777 – 1855) bija skolnieks, skolotājs viņam uzdeva saskaitīt visus skaitļus no 1 līdz tūkstotim. Kārlis atbildi atrada pārsteidzoši ātri. Viņš sadalīja skaitļus pāros (1; 100), (2; 99), (3; 98), … . Katrā pāra summa ir viena un tā pati 101. Pāru skaits ir 50, kopējais rezultāts ir $101\cdot 50=5050$.

Tornim augstumā 10 nepieciešami $\frac{10\cdot 11}{2}=55$ klucīši. Ja rotaļu komplektā ir 50 klucīši, tad augstākais tornis izveidojams no 45 klucīšiem augstumā 9. Lai vienlaikus uzbūvētu visus torņus augstumā no 1 līdz 6, nepieciešami $1+3+6+10+15+21=56$ klucīši, tātad ar dotā rotaļu klucīšu komplektu nepietiek.

[1] Plašāku materiālu var lasīt Kembridžas Universitātes mājas lapā NRICH: https://nrich.maths.org/2478

5. Johans no klucīšiem veidoja sarežģītākas konstrukcijas. Cik klucīšu nepieciešams, lai uzbūvētu konstrukciju A? Konstrukciju B?



A **B**

a) Aplūko A konstrukciju. Cik klucīši nepieciešami, lai konstruētu mazākas un lielākas šādas konstrukcijas? Uzraksti atbilstošo skaitļu virkni! Cik klucīši nepieciešami, lai uzbūvētu A konstrukciju 10 klucīšu augstumā?
b) Izpēti konstrukciju B un sastādi atbilstošo skaitļu virkni!
c) Kāds ir sakars starp konstrukcijām A un B?

Atrisinājums. A veida konstrukciju var sadalīt slāņos, kādi aplūkoti iepriekšējā uzdevumā. Tad A konstrukcijas klucīšu skaits vispārīgā veidā aprēķināms

$$S(1)+S(2)+S(3)+....S(n), kur \quad S(n)=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1) \text{ jeb sīkāk izrakstot:}$$

$$1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+...=\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)(n+2)$$

Piezīme. Lai pamatotu pēdējo formulu, nepieciešamas dziļākas algebras zināšanas (formulu var pierādīt, grupējot saskaitāmos citā veidā un lietojot arī kvadrātu summas formulu[2], vai arī ar matemātiskās indukcijas palīdzību).

A veida konstrukcijai augstumā 10 nepieciešami ir $\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 12 = 220$ klucīši.

Viegli redzēt, ka konstrukcija B ir veidota no stabiņiem – viens stabiņš no 1 klucīša, 2 stabiņi katrs no 2 klucīšiem, 3 stabiņi katrs no 3 klucīšiem. B konfigurācijas klucīšu skaits ir aprēķināms pēc kvadrātu summas formulas[3]:

$$1^2+2^2+3^2+...=\frac{1}{6}n\cdot(n+1)(2n+1)$$

B veida konstrukcijai augstumā 10 ir nepieciešami $\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 21 = 385$ klucīši.

Salīdzinot dotās A un B konstrukcijas, var ievērot, ka B konstrukciju var papildināt ar A konstrukcijas augšējiem diviem slāņiem, pagriežot tos otrādi. Te veidosies 6 stabiņi augstumā 3. Vispārīgā veidā:

$$S_B(n)+S_A(n-1)=n\cdot S(n)=n\cdot\frac{1}{2}\cdot n(n+1)=\frac{1}{2}\cdot n^2(n+1),$$

kur $S_B(n)$ apzīmē konfigurācijas B augstumā n izmantoto klucīšu skaitu, bet $S_A(n-1)$ ir nepieciešamo klucīšu skaits, lai konstruētu konfigurāciju A augstumā $n-1$.

---

[2] Skat, piemēram: https://www.meritnation.com/ask-answer/question/1-1-2-1-2-3-1-2-3-4-find-the-sum-of-the-series/sequences-and-series/6804233
[3] Skat. dažādi pamatojumi: https://brilliant.org/wiki/sum-of-n-n2-or-n3/