PUNKTIŅŠ (B grupa) Kas kopīgs?

2.02.2018

Īsi risinājumi un komentāri

1. Izvēlies 3 secīgus naturālos skaitļus. Aprēķini to summu, izvietojot pie tiem "+" un "–" zīmes dažādos iespējamos veidos! Ko vari atklāt? Dari to pašu arī ar 4 secīgiem naturāliem skaitļiem!

Piezīme. Uzdevums domāts, lai skolēni mācās aprakstīt sakarības algebriski un veikt darbības vispārīgā veidā, tas ir, algebriski.

Risinājums. Apzīmēsim trīs secīgus skaitļus $n-1; n; n+1$. To zīmes var izvēlēties 8 dažādos veidos. Tabulā dotas arī to summas:

$n-1$	n	$n+1$	Summa
+	+	+	$n-1+n+n+1=3n$
+	+	-	$n-1+n-n-1=n-2$
+	-	+	$n-1-n+n+1=n$
+	-	-	$n-1-n-n-1=-n-2$
-	+	+	$-n+1+n+n+1=n+2$
-	+	-	$-n+1+n-n-1=-n$
-	-	+	$-n+1-n+n+1=-n+2$
-	-	-	$-n+1-n-n-1=-3n$

Var ievērot, ka pirmā un pēdējā skaitļu summas dalās ar 3. Pārējās sešas summas savstarpēji atšķiras par pāra skaitli. Summas ir "simetriskas" – katram skaitlim var atrast tā pretējo skaitli. Līdzīgi var darboties ar četru secīgu skaitļu summām.

2. Atrodi likumsakarību un ieraksti tabulā trūkstošos skaitļus!

2	4	
	12	18
18		54

Atrisinājums. Otrā rindā ir 3 reizes lielāki skaitļi, bet trešā rindā – 9 reizes lielāki skaitļi, nekā pirmajā rindā.

2	4	6
6	12	18
18	36	54

3. Pierādi, ka izvēloties jebkurus 4 skaitļus no katras rindas un katras kolonas, to summa vienmēr ir viena un tā pati!

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Atrisinājums. Četru izvēlēto skaitļu summa ir 34, piemēram, 1 + 6 + 11 + 16 = 34 vai

3 + 5 + 12 + 14 = 34. Apskatām skaitļus jebkurā vienā rindā - katrs nākamais skaitlis pieaug par 1. Jebkurā kolonā skaitļi pieaug par 4. Par iznākuma pamatu var kalpot pirmās rindas visu skaitļu summa

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \qquad (*)$$

Tā kā visiem skaitļiem ir jābūt no dažādām rindām, tad summā (*) skaitļus vajag aizvietot ar pārstāvjiem no atbilstošām rindām (jāievēro – ja, piemēram, aizvieto skaitli 3, tad aizvietojošais skaitlis jāizvēlas no kolonas 3). Kādu no šiem četriem skaitļiem (1, 2, 3, 4) aizvietojot ar skaitli no otrās rindas, summa palielinās par 4. Citu skaitli summā (*) aizvietojot ar skaitli no trešās rindas, summa palielināsies par 8, bet vēl vienu aizvietojot ar skaitli no 4. rindas, kopējā summa palielināsies jau par 12. Tāpēc jebkuru četru dotā veidā izvēlēto skaitļu summa būs

10 + 4 + 8 + 12 = 34.

4. Izsaki skaitli 54 kā vairāku secīgu skaitļu summu. Vai vari to izdarīt dažādos veidos?

Atrisinājums. 54 = 17 + 18 + 19 vai 54 = 12 + 13 + 14 + 15, vai arī 54 var izteikt kā skaitļu

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 19 summu. Skaitli 54 nevar izteikt kā divu secīgu skaitļu summu, jo divu secīgu skaitļu n un $n + 1$ summa ir nepāra skaitlis $2n + 1$. Skaitļa 54 izteikšana kā secīgu skaitļu summa ir saistīta ar tā sadalījumu reizinātājos:

$$54 = 2 \cdot 27 = 3 \cdot 18 = 6 \cdot 9$$

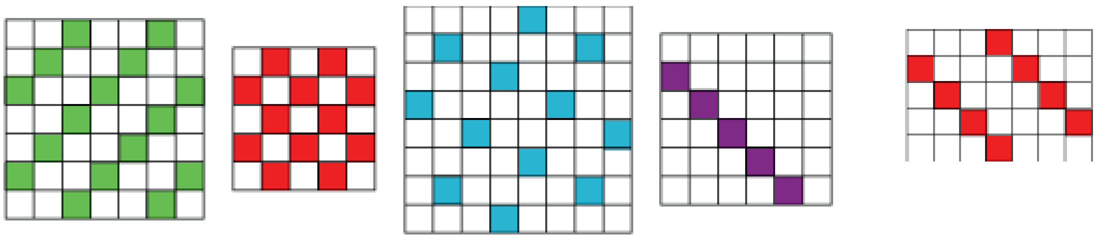
Apskatot summu 54 = 27 + 27 = 13 + 14 + 13 + 14, var ievērot, ka skaitli 13 var samazināt par 1 un skaitli 14 palielināt par 1, nemainot kopējo summas vērtību. Tad

54 = 12 + 13 + 14 + 15

Summu no sešiem secīgiem skaitļiem iegūt nevar. Pieņemsim pretējo – ir seši secīgi skaitļi, kuru summa ir 54. Apzīmēsim tos $n – 2, n – 1, n, n + 1, n + 2, n + 3$. To kopējā summa ir

$6n + 3$. Atrisināsim vienādojumu $6n + 3 = 54$. Tad $6n = 51$, bet 51 ar 6 nedalās. Pretruna.

5. Kā skaitliski aprakstīt šos rūtiņu attēlus?



Piemēri:

a) Kvadrātus n x n rūtiņas var aizpildīt ar skaitļiem 1, 2, 3, … n^2 . Iekrāsotās rūtiņas norāda skaitļus, kuri skaitļu virknē dalās ar 3, 2, 5, 7, 4.

b) Izpētes variants “apgrieztā” veidā – patvaļīga izmēra kvadrātu vai taisnstūri aizpilda ar skaitļiem un pēta, kādu rakstu veido skaitļi, kuri dalās ar noteiktu skaitli *n*.

c) Apskatīt diagonālo krāsojumu un katrai krāsotai diagonālei saskaitīt rūtiņu kolonas numurus. Tā, piemēram, pirmajam kvadrātam šie skaitļi ir 6; 21; 25 un 13.

d) Trešajā kvadrātā var atrast šaha zirdziņa gājienu ciklu.

e) Dotie krāsojumi var rosināt dažādu uzdevumu formulēšanu. Tā, piemēram, trešajam kvadrātam katru iekrāsoto rūtiņu var raksturot ar atbilstošās kolonas numuru:

				5			
	2					**7**	
			4				
1					**6**		
		3					**8**
				5			
	2					**7**	
			4				

Piecās rindās ir atšķirīgs rūtiņu krāsojums, pēc tam tas atkārtojas. Jautājums ir šāds – kādi var būt mazākie skaitļu dalītāji, kuri dod šādus atlikumus? Tā kā vislielākais atlikums ir 8, tad dalītāji nepārsniedz skaitli 9. Var formulēt šādu uzdevumu:

Uzdevums: katrai rindai atrast tādu skaitli, kurš dod norādītos atlikumus, to dalot ar diviem dažādiem skaitļiem.

Piemērs. Pirmajā rindā skaitļa atlikumi ir 0 un 5. Tas norāda, ka skaitlis dalās ar 5. Tāpēc var izvēlēties skaitli 5, kuru dalot ar 9 iegūst atlikumu 5. Otrajā rindā skaitļa atlikumi ir 2 un 7 – skaitlis var būt 7, tas tiek dalīts ar 5 un 9. Trešajā rindā atbilstošais skaitlis var būt 40, to dalot ar 5 un 9 atlikumā iegūst 0 un 4 atbilstoši. Ceturtā rindā der skaitlis 6, bet piektajā rindā der skaitlis 8. Var atrast dažādus skaitļus, kurus dalot ar 5 un 9 var iegūt te redzamos atlikumus.

PUNKTIŅŠ (B grupa) Zoo dārzā

9.02.2018

Īsi risinājumi un komentāri.

Piezīme. Pirmie četri uzdevumi ir "vienas minūtes" uzdevumi.

1. Pasaules smagākie dzīvnieki ir Baltā haizivs (11800 kg), Āfrikas zilonis (5000 kg), Indijas zilonis (4000 kg), Baltais degunradzis (2200 kg). Salīdzinoši – mājas peles svars ir 12 līdz 30 gramu; pieauguša cilvēka svars ir apmēram 70 kg. Cik reižu cilvēks ir smagāks par pelīti un cik reižu vieglāks parziloni?

Atbilde: Viena ziloņa svaram (5000 kg) atbilst apmēram 71 cilvēka kopējais svars. Viena cilvēka svaram atbilst apmēram 2333 peļu svars.

2. Āfrikas zilonis dienā apēd apmēram 300 kg barības. Vai cilvēks "ēd kā zilonis"?

Risinājums. Cilvēks dienas laikā apēd apmēram 1,2 līdz 1,5 kg pārtikas, neskaitot šķidrumu. Tas ir, apmēram 2 % no svara, rēķinot, ka cilvēks sver apmēram 70 kg. Savukārt zilonis apēd barību, kas sver apmēram 6% no viņa svara. Var teikt, ka cilvēks proporcionāli ēd 3 reizes mazāk nekā zilonis.

3. Pasaules ātrākie dzīvnieki ir medību piekūns (lidojumā var sasniegt ātrumu līdz 389 km/h); gepards (120 km/h), melnā buru zivs (129 km/h). Salīdzinoši lauva sasniedz ātrumu 80 km/h, bet antilope var sasniegt pat 56 km/h.

Antilope ganās 2 km attālumā no lauvas. Abi dzīvnieki vienlaikus sāk skriet. Lauvas ātrums ir 80 km/h, bet antilopes – 40 km/h. Pēc cik ilga laika lauva varētu panākt antilopi?

Atrisinājums. Antilope noskrien x kilometrus, bet lauva – $x + 2$ kilometrus līdz abi nonāk vienā punktā. Sastādīsim vienādojumu attiecībā pret skrējienā pavadīto laiku

$$\frac{x}{40} = \frac{x+2}{80}$$

Tad $2x = x+2$; $x = 2$ km. Patērētais laiks ir 1/20 no stundas, tātad lauva panāks antilopi pēc 3 minūtēm.

4. Salīdzini zaķa un bruņurupuča pārvietošanās ātrumu! Zaķis skrien ar ātrumu 36 km stundā. Ja bruņurupucis var 1 km pievārēt 2 stundās, tad cik daudz laika viņam būs nepieciešams, lai veiktu tikpat, cik zaķis 10 sekundēs?

Atrisinājums. Zaķa skriešanas ātrums ir 10 metri sekundē, noskrietais ceļš ir 100 metri 10 sekundēs. Bruņurupuča ātrums ir 1000 metru 120 minūtēs. 100 metrus viņš pieveiks 12 minūtēs.

5. Ieejas biļete Zooloģiskajā dārzā pieaugušam maksā 6 eiro, bet skolēnam 4 eiro. Grupas biļete ir 3 eiro katram, kur grupā var būt 10 līdz 15 apmeklētāji. Divu stundu laikā kases ieņēmums bija 343 eiro. Cik pieaugušo un skolēnu nopirka pieaugušo un skolēnu ieejas biļetes, ja skolēnu biļešu bija 4 reizes vairāk kā pieaugušo biļešu un cik grupas bija ieradušās, ja parasto apmeklētāju skaits bija par 9 lielāks?

Atrisinājums. Sagrupēsim "parastos" apmeklētājus: 1 0 pieaugušais un 4 skolēni. Šādas grupas biļešu kopējā cena ir 22 eiro. Pieņemsim, ka bija ieradušās *x* parasto apmeklētāju grupas - kopumā *5x* cilvēku. Ekskursiju grupās kopumā bija par 9 cilvēkiem mazāk, tas ir, ekskursiju grupās bija *5x – 9* cilvēki. Biļešu kopējā cena

$$22x + (5x - 9) \cdot 3 = 343 \text{ jeb } 37x = 370$$

No kurienes $x = 10$. Bija ieradušās 10 parasto apmeklētāju grupas, tas ir, 10 pieaugušie un 40 skolēni, un 41 ekskursiju grupu dalībnieks. Ja grupā var būt 10 līdz 15 cilvēki, tad iespējamais grupu skaits bija 3 (piemēram, 15, 15 un 11 cilvēki) vai 4 grupas (piemēram, 10, 10, 10 un 11 cilvēki). Mazāk grupu nevar būt, jo tad kādā grupā būtu vismaz 21 cilvēks, un vairāk grupu nevar būt, jo tad kādā grupā būtu ne vairāk kā 9 cilvēki.

6. Pēc izglītojošās nodarbības Zoo dārzā, *n* skolēni piedalījās konkursā. No katras skolas bija 3 pārstāvji. Konkursā tika iegūti visi dažādie punktu skaiti no 1 līdz *n*. Alise, Beta un Dace bija no vienas skolas. Alise ieguva tieši vidējo punktu skaitu, Beta ieguva 18 punktu, kas bija vairāk nekā Alisei, bet Dace ieguva 29 punktus. Cik skolas piedalījās konkursā?

Atrisinājums. Skolēnu skaits ir skaitlis *n*, kas dalās ar 3. Ja Alise ieguva pašu vidējo punktu skaitu, var secināt, ka *n* ir nepāra skaitlis. Alise ieguva mazāk punktu nekā Beta, tad viņa varēja iegūt 17, 16, 15, vai mazāk punktu. Ja Dace ieguva 29 punktus, tad Alise nevarēja iegūt mazāk par 15 punktiem (piemēram, ja Alises rezultāts ir 14 punkti, tad lielākais punktu skaits ir 27 punkti – mazāk nekā Dacei). Ja Alisei būtu 16 punkti, tad lielākais rezultāts būtu 16 + 15 = 31, kas nedalās ar 3. Secinām, ka Alise ieguva 17 punktus, tad lielākais rezultāts ir 17 + 16 = 33. Ievērojot, ka no katras skolas bija 3 pārstāvji, tie ieradās no 11 skolām.

7. Dekoratīvo zivtiņu gūpiju pāris pavairojas trīs reizes pēc kārtas ar starplaiku 1 mēnesis, katru reizi radot 20 mazuļus. Pēc tam tās nevairojas. Jaunās zivis sāk vairoties pēc 3 mēnešiem. No tām tikai ceturtā daļa zivtiņu ir zivtiņas – mātes, kuras rada mazuļus Pēc cik mēnešiem zivju skaits būs lielāks par 1000, ja iesākumā akvārijā bija viens gūpiju pāris?

Atrisinājums. No pirmā zivtiņu pāra 3 mēnešu laikā rodas 60 zivis, tad pirmais pāris atpūšas, bet ceturtajā mēnesī sāks vairoties tās zivtiņas, kuras radās 1. mēnesī. Ceturtā daļa no 20 ir 5 zivtiņas, kuras 4. mēnesī rada 100 jaunas zivtiņas. Piektajā mēnesī zivju skaits palielinās jau par 200, bet sestajā – vēl par 300. Sestajā mēnesī kopumā jau ir 662 zivtiņas. Tā kā 4. mēnesī radās 100 jaunas zivtiņas, tad 7. mēnesī no tām radīsies vēl 500 jaunas zivtiņas, tāpēc septītajā mēnesī zivtiņu skaits akvārijā pārsniegs 1000.

PUNKTIŅŠ (B grupa) Trijstūru raksti

16.02.2018

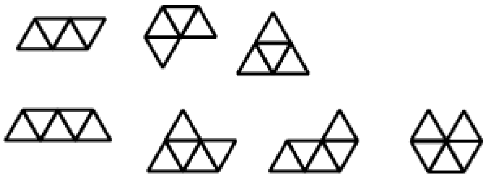
Īsi atrisinājumi un komentāri

Piezīme. Uzdevumu risināšanā ieteicams lietot papīru, kas sadalīts vienādos regulāros trijstūros

1. Uz trijstūru lapas uzzīmē visus "tetramondus" un "pentiamondus" – figūras, kuras saliktas no 4 un 5 trijstūrīšiem atbilstoši. Izvēlies vienu tetramondu un vienu pentiamondu un izveido no šīm figūrām tapešu raksta fragmentu!

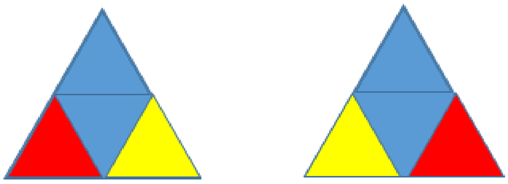
Komentārs. Šis ir ievaduzdevums, lai iepazītos ar "poliamondiem" – figūrām, kuras veidotas no vienādiem regulāriem trijstūriem. Uzdevuma radošajā daļā ir jāizdomā simetrijas veids, kā veidot tapešu raksta fragmentu.

Tetramondi un pentiamondi:



2. Vienādmalu trijstūris ir sadalīts 4 vienādos trijstūros (dots trijstūra veida tetramonds). Katrs mazais trijstūris ir nokrāsots vienā no 3 krāsām. Cik dažādu krāsojumu var iegūt?

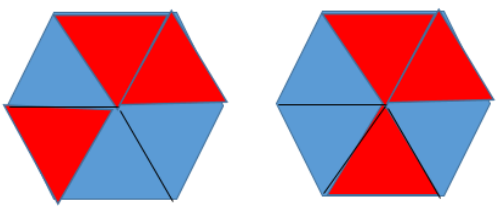
Atrisinājums. Iekšējo trijstūri var nokrāsot 3 veidos. Ārējos trīs trijstūrus atsevišķi aplūkojot kopumā var nokrāsot 11 veidos: visus vienādi – 3 veidos, divās krāsās – 6 veidos (ir 3 veidi kā izvēlēties krāsu pārus un katram pārim ir divi veidi, kā trīs trijstūrus krāsot divās krāsās). Katru trijstūri krāsojot cita krāsā, jāievēro pagrieziens, piemēram:



Līdz ar to trijstūrus var nokrāsot $3 \cdot 11 = 33$ veidos.

3. Regulārs sešstūris ir sadalīts 6 vienādos trijstūros. Katrs mazais trijstūris ir nokrāsots vienā no 3 krāsām. Cik dažādu krāsojumu var iegūt, ja katrā gadījumā ir lietotas visas 3 krāsas?

Risinājums. Ievērosim – divu sešstūru krāsojumi ir vienādi, ja abos sešstūros krāsoto trijstūru secība ir viena un tā pati, ejot pulksteņa rādītāja virzienā. Piemēram, sekojošo sešstūru krāsojumi divās krāsās ir atšķirīgi:



Novērtēsim 3 krāsu izvēles kombināciju skaitu:

abcccc - četri no sešiem trijstūriem nokrāsoti vienā krāsā. Te iespējami 3 krāsu komplekti, jo *c* var būt jebkura viena no trim krāsām;

abbccc - te iespējami 6 dažādi krāsu komplekti;

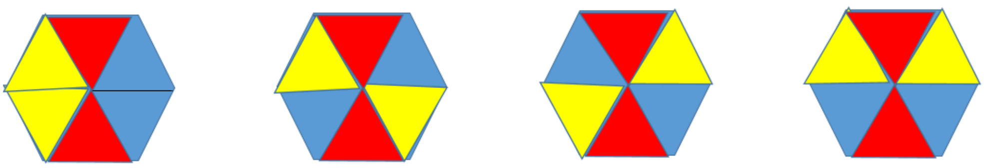
aabbcc - šādu komplektu var izvēlēties tikai vienā veidā.

Jāizpēta, kā krāsu kombinācijas tiek izvietotas sešstūrī.

Krāsu kombināciju *abcccc* var izkārtot 5 veidos, jo, ja kāds trijstūris ir nokrāsots krāsā a, tad trijstūri krāsā b var krāsot 5 pozīcijās (atlikušos trijstūrus krāso trešajā krāsā). Tad kopumā te ir $5 \cdot 3 = 15$ dažādi trijstūru krāsojumi.

Krāsu kombināciju *abbccc* var izkārtot 10 dažādos veidos: ja kāds trijstūris ir nokrāsots krāsā a, tad atliek kopumā 5 pozīcijas, kur izvietot divus b un b krāsas trijstūrus (c krāsā nokrāso atlikušos trijstūrus). No pieciem elementiem var izveidot 10 pārus, te, piecās pozīcijās var izvēlēties divus vienādi krāsotus trijstūrus. Kopumā te ir $10 \cdot 6 = 60$ trijstūru krāsojumi.

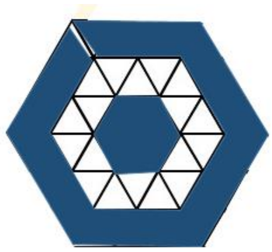
Gadījumā, ja ir komplekts *aabbcc*, tad sāksim ar krāsu pāri aa. Divus trijstūrus nokrāsot vienā krāsā var 3 principiāli atšķirīgos veidos – blakus, vienu trijstūri izlaižot, divus trijstūrus izlaižot. Atlikušajās 4 pozīcijās divus trijstūrus b krāsā var izvēlēties 6 veidos. Jāievēro, ka izveidojas simetriska pozīcija tad, ja starp diviem a krāsas trijstūriem starpā ir divi trijstūri, no kā seko, ka, aplūkojot krāsojumus b krāsā, ir divi krāsojumi, kas ieskaitīti katrs divas reizes. Tāpēc šajā gadījumā ir tikai 4 dažādi krāsojumi:



Tad kopumā te ir $3 \cdot 6 - 2 = 16$ dažādi trijstūru krāsojumi. Kopējais krāsojumu skaits ir 15 + 60 + 16 = 91.

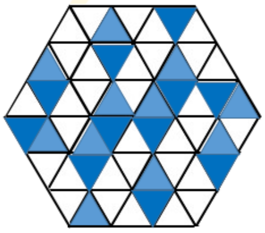
4. Uz trijstūru lapas novelc tāda regulāra sešstūra kontūras, kura malas garums ir 3. Vai ir iespējams šīs figūras trijstūrīšus nokrāsot divās krāsās tā, lai nevienam trijstūrim ar malas garumu 2 tā virsotnēs esošie trijstūri nebūtu vienā krāsā?

Atbilde. Ir iespējami vairāki krāsojumi, piemēram:



5. Vai ir iespējams regulārajā sešstūri ar malas garumu 3 nokrāsot sešstūra trijstūrīšus divās krāsās tā, lai nevienam trijstūrim ar malas garumu 2 un 3 tā virsotnēs esošie trijstūri nebūtu vienā krāsā?

Atbilde. Jā, var izkrāsot. Piemēram:



Piezīme. Var ievērot, ka sešstūrī var izveidot "šaha krāsojumu", tas ir, te ir divu veidu trijstūru kopas – attiecībā pret sešstūra apakšējo malu ir trijstūri ar virsotni uz augšu un trijstūri ar virsotni uz leju. Pietiek aplūkot vienas kopas trijstūrus, atrast šiem trijstūriem piemērotu krāsojumu. Tad otrai kopai var simetriski izmantot šo pašu krāsojumu (atsevišķo kopu trijstūri izkrāsoti tumšāk un gaišāk).

PUNKTIŅŠ (B grupa) Irstošās konfigurācijas
23.02.2018

Īsi atrisinājumi un komentāri

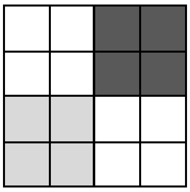
Noteikumi: Spēles pamats ir rūtiņu laukums. Uz rūtiņām ir izvietoti kauliņi. Spēles gājiens ir sekojošais: kauliņš var pārlēkt blakus stāvošam kauliņam, ja nākamā pozīcija ir brīva (kauliņi atrodas blakus, ja rūtiņām ir kopīga mala). Ja kauliņam pārlec, to noņem no spēles laukuma. Viens kauliņš gājiena laikā drīkst izdarīt vairākus lēcienus, ja to atļauj kauliņu konfigurācija. Spēle ir 1 – reducējama, ja spēles beigās uz laukuma paliek tikai viens kauliņš.

1. Uz spēles laukuma 4 x 4 rūtiņas stūros kvadrātiskā formā novietoti 4 balti un pretējā stūrī 4 melni kauliņi. Divi spēlētāji izdara gājienus pēc kārtas, viens pārvieto baltos kauliņus, otrs – melnos. Gājiena laikā drīkst kaut gan melnos, gan baltos kauliņus. Vienā gājienā viens kauliņš drīkst izdarīt vairākus lēcienus, nokaujot vairākus kauliņus. Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienus. Kurš no spēlētājiem vienmēr var uzvarēt?

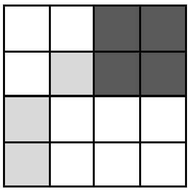
Atbilde. Uzvarēs otrais spēlētājs, pareizi spēlējot.

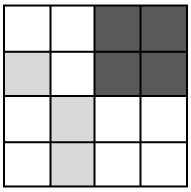
Lai varētu pierakstīt gājienus, kvadrāta lauciņus apzīmēsim ar burtiem un pieņemsim, ka baltie kauliņi ir izvietoti pozīcijās I, J, M, N, bet melnie C, D, G, H:

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P



Baltajiem ir 2 principiāli atšķirīgi gājieni – no N uz F vai no M uz E:

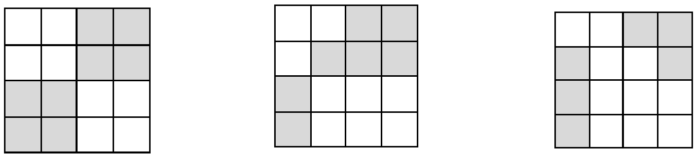




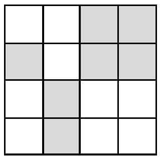
Melnie izdara gājienu no G uz E pirmajā gadījumā vai no C gājienu C – K – I – A. Abos gadījumos baltajiem vairs nav gājienu.

2. Iepriekšējās spēles variants: katrs spēlētājs drīkst izdarīt gājienus gan ar saviem, gan pretinieka kauliņiem. Kurš no spēlētājiem var uzvarēt?

Atrisinājums. Te visi kauliņi ir līdzvērtīgi, tāpēc var izvēlēties vienas krāsas kauliņus. Ja pirmais izdara gājienu no N uz F, tad otrais spēlētājs paiet G uz E, tad 2 gājienos pirmais spēlētājs ir zaudējis:



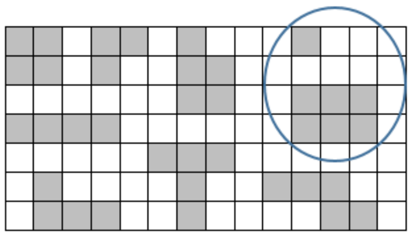
Ja pirmais spēlētājs paiet no M uz E:



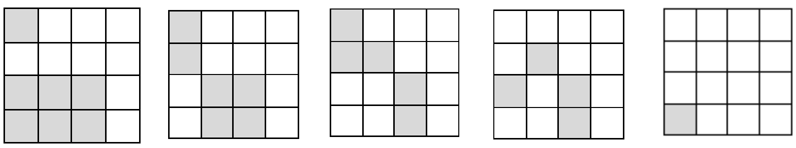
tad otram spēlētājam iespējami 7 dažādi gājieni:

N – F vai D – B, vai D – L, vai H – F, vai C – K, vai C – K – I , vai C – K – I – A. Jebkurā no gadījumiem pirmais spēlētājs var atrast uzvarošo gājienu, lai otrais spēlētājs zaudētu. Izpēti šīs iespējas!

3. Izpēti kauliņu konfigurācijas, nosakot, kuras no tām ir reducējamas līdz vienam kauliņam (ar apli atzīmētā konfigurācijā viens kauliņš novietots atstatu):

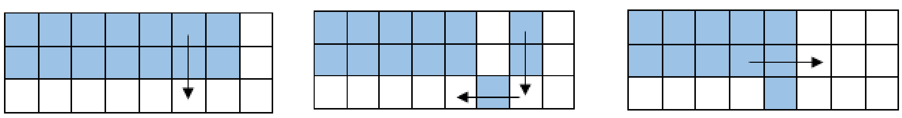


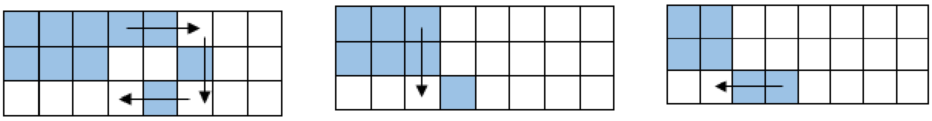
Atrisinājums. Reducēt nevar tikai 3 kauliņu stūrīti un 4 kauliņu stienīti. Visus pārējos gadījumus reducēt var, piemēram:



4. Taisnstūra *3 x (n+1)* iekšpusē aplūko taisnstūra konfigurāciju *2 x n* kauliņi, kur *n* > 1. Kuras no konfigurācijām var reducēt līdz 1 kauliņam?

Atrisinājuma ideja. Var reducēt visas tādas konfigurācijas, kur n ir 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, ….. Reducēšanas princips ir, piemēram, sekojošais:

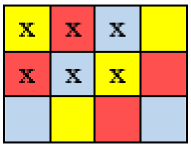




Pēdējo iegūto konfigurāciju ir viegli pārveidot. Ir iespējami arī citi reducēšanas algoritmi.

Var pierādīt, ka reducējama ir jebkura taisnstūrveida konfigurācija, kuras kauliņu skaits nedalās ar 3.

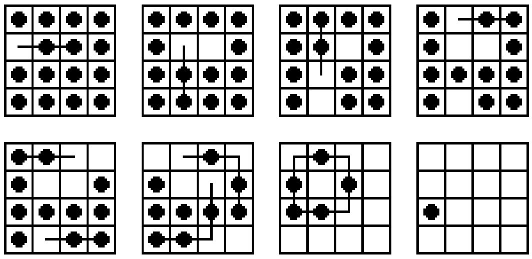
Apskatīsim konfigurāciju 3 x 2 kauliņi, un nokrāsosim taisnstūra 4 x 3 diagonāles 3 krāsās, kauliņus apzīmēsim ar **x:**



Uz dzelteniem luciņiem atrodas 2 kauliņi, divi citi uz sarkaniem un 2 citi uz ziliem. Viena gājiena rezultātā mainīsies visu kauliņu novietojumu krāsa. Piemēram, ja gājienu veiks kauliņš no sarkanā luciņa, tad būs 3 kauliņi uz dzeltenajiem, 1 uz sarkanā un 1 uz zilā luciņa. Ievērosim, ka aizņemto krāsaino luciņu skaita paritātes ir vienādas! (Bija pāra paritāte, kas gājiena rezultātā mainījās uz nepāra.) Katrs lēciens izmaina šo visu 3 skaitu paritāti par 1. Nepieciešamais nosacījums, lai konfigurāciju varētu reducēt līdz vienam kauliņam, ir tāds, ka kauliņu skaita paritāte uz dažādu krāsu luciņiem ir atšķirīga.

5. Izvieto 15 kauliņus kvadrāta 4 x 4 iekšpusē, tukšo luciņu izvēloties pie ārējās malas, bet ne stūrī. Atrodi spēles atrisinājumu! Kauliņu drīkst pārvietot tikai kvadrāta iekšpusē.

Spēles atrisinājums:

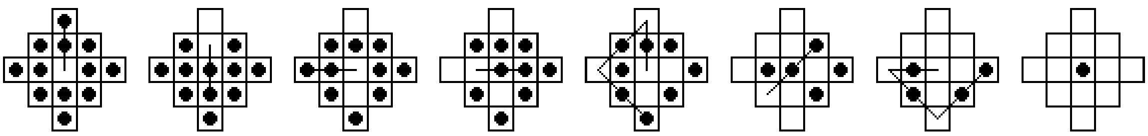


Pamēģini atrast atrisinājumu, ja pirmais malējais gājiens ir M – E.

Izpēti, kas notiks, ja tukšais luciņš ir kvadrāta stūrī vai tukšais luciņš atrodas kvadrāta iekšpusē!

6. Dēlītim 5 x 5 luciņi ir izgriezti stūrīši (3 stūra luciņi katrā stūrī). Izvietoti 12 kauliņi, centrālais luciņš tukšs. Gājieni atļauti arī diagonālā virzienā. Atrodi spēles atrisinājumu!

Atrisinājums:



Ir iespējami arī citi reducēšanas gadījumi.

Piezīme. Reducējamās konfigurācijas ir iespējams atrast ar datorprogrammu palīdzību, izstrādājot atbilstošus algoritmus. Pēdējo divu uzdevumu atrisinājumi (autors Georgs Bells) ir kopēti no mājas lapas:

http://recmath.org/pegsolitaire/index.html#gridless

Šeit var iegūt vēl daudz interesantas informācijas.