Decembra konkurss (B grupa)
7.12.2018

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Raitis aprēķināja 4 naturālu skaitļu visas iespējamās starpības, atņemot no lielākā skaitļa mazāko, un ieguva skaitļus 2, 4, 3, 5, 6, 6. “Kādi gan varētu būt šie skaitļi?” izbrīnījās Marija. Padomā arī tu!

Atrisinājums. Aplūkosim divus atrisinājumus. Pirmajā atrisinājumā galvenā uzmanība ir pievērsta diviem vienādajiem skaitļiem; otrais atrisinājums ir pamatots vispārīgākā veidā.

1) Starp dotajām starpībām ir divi vienādi skaitļi, kuri šajā virknē ir vislielākie. Tas nozīmē, ka ir divi skaitļu pāri, kuru starpības ir vienādas ar 6:

$$a - b = 6 \quad \text{un} \quad c - d = 6$$

Ievērojot, ka visi skaitļi ir dažādi (pretējā gadījumā starpību virknē būtu arī 0), viens no tiem ir vislielākais – vai nu a vai c. Pieņemsim, ka vislielākais ir a:

$$a > c = 6 + d, \quad \text{tad} \quad a - d > 6$$

No tā seko, ka starp starpībām ir jābūt kādai, kura ir lielāka par 6. Tas nesakrīt ar doto, tāpēc šādas skaitļu starpības nav iespējamas.

2) Aplūkosim doto starpību virkni. Starp skaitļiem ir gan pāra, gan nepāra skaitļi. Tas nozīmē, ka no dotajiem četriem skaitļiem ir vismaz viens pāra un vismaz viens nepāra skaitlis. Ja ir tieši 1 nepāra skaitlis, tad ar pārējiem 3 pāra skaitļiem tas veido 3 nepāra starpības, kas neatbilst dotajam. To pašu var teikt, ja ir tieši 1 pāra skaitlis. Tad varbūt ir 2 pāra un 2 nepāra skaitļi. Tādā gadījumā būtu tikai 2 pāra starpības, kas neatbilst dotajam.
Secinājums: dotā skaitļu virkne neatbilst 4 naturālu skaitļu visām iespējamām starpībām.

2. Paulis teica Mikum: „Es iedomājos 3 viencipara skaitļus, teiksim a, b, c. Tu nosauc citus trīs skaitļus P, R, S. Es sareizināšu un saskaitīšu: $aP + bR + cS$, un pateikšu tev rezultātu. Uzmini manus izvēlētos skaitļus!“ Kā Mikus var uzminēt Pauļa izvēlētos skaitļus?

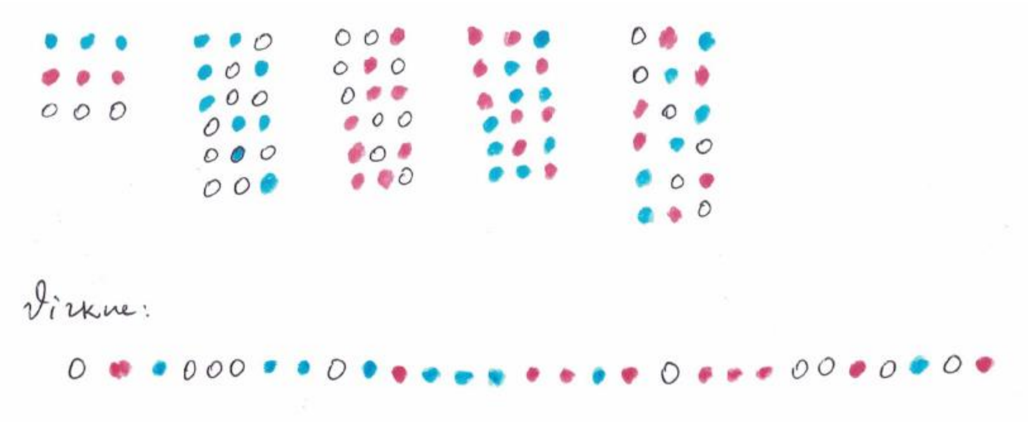
Atrisinājums. Šis ir atjautības uzdevums (balstīts uz skaitļa pierakstu). Mikum jāizvēlas skaitļi 100, 10 un 1. Piemēram, ja Paulis ir iedomājies skaitļus 3, 4, un 5, tad viņam jāaprēķina rezultāts:

$$3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 1 = 345$$

Te Pauļa izvēlētie skaitļi ir skaidri redzami vienu, desmitu un simtu pozīcijās.

3. Mazulīte Lulū rotaļājās ar sarkanām, zilām un baltām podziņām. Viņa salika tās vienā rindā un izrādījās, ka, skaitot podziņas no kreisās puses, katras 3 pēc kārtas ņemtas podziņas veido citādu krāsu kombināciju. Cik podziņu bija rindā, ja bija pārstāvētas visas iespējamās kombinācijas?

Atrisinājums. Šo uzdevumu var iedalīt divās daļās. Vispirms ir jānoskaidro, cik dažādas 3 krāsu variācijas pa trim var izveidot. Te ieteicams darboties sistemātiski. Vispirms noskaidrojam, ka ir 3 varianti, kur ir 3 vienas krāsas podziņas. Tad noskaidrojam, ka ir 6 iespējas, kur izvietot divu krāsu podziņas. No 3 krāsām var izvēlēties 3 krāsu pārus. Tad šādu variantu kopējais skaits, kur saliktas divas krāsas, ir 18. Vēl atliek 6 varianti, kurus var izveidot no 3 krāsu podziņām. Kopā ir 27 dažādi varianti.
Kad pirmā kombinācija ir izvietota (3 podziņas), tad katras nākamās podziņas pielikšana realizēs jaunu krāsu salikumu. Tāpēc pie trim podziņām būs jāpieliek vēl 26 podziņas, lai visas krāsu kombinācijas (skaitot no kreisās puses) būtu pārstāvētas. Rindā jāizvieto 29 podziņas. Vēl atliek jautājums, vai tas vispār ir iespējams? Podziņu izvietošanu būt ieteicams sākt ar kombinācijām, kur ir 3 vienādas krāsas podziņas un tad tām pievienot nākamās podziņas, atzīmējot jau realizētos variantus.



4. Trīsciparu skaitlis sākas ar 4. Ja ciparu 4 pārnes uz skaitļa beigām, tad iegūst trīsciparu skaitli, kurš ir ¾ no dotā skaitļa. Atrodi šo skaitli!

Komentārs. Pirmais atrisinājums ir algebrisks, vairāk piemērots 7. un 8. klašu skolēniem. Otrs atrisinājums balstās uz skaitļu dalāmību, bet pārlases kopa tiek samazināta ar loģisko spriedumu palīdzību (šāds risinājums ir piemērots 5. – 6. klašu, un, protams, arī vecāku klašu skolēniem). Trešo - intuitīvo risinājumu – ir sniedzis kāds no pulciņa skolēniem.

1) *Atrisinājums.* Doto skaitli var pierakstīt kā 400 + A, bet iegūto skaitli kā 10A + 4. No šejienes seko vienādojums, kuru atrisinām:

$$10A + 4 = {}^{3}\!/_{4}\,(400 + A)$$

$$40A = 16 = 3 \cdot 400 + 3A$$

$$37A = 122 - 16 = 1184$$

$$A = 32$$

Dotais skaitlis ir 432.

2) *Atrisinājums.* Ir dots skaitlis M. Ar cipara 4 pārvietošanu iegūst skaitli B. Ja B ir ¾ no skaitļa M, tad seko, ka B dalās ar 3:

3M = 4B.

Tātad skaitļa B ciparu summa arī dalās ar 3 un tāpat arī skaitļa M ciparu summa dalās ar 3. No dotā seko arī, ka skaitlis M dalās ar 4.

Pierakstīsim: M = 400 + A; B = 10A + 4.

Saskaņā ar dalāmības pazīmi ar 4, arī skaitlis A dalās ar 4. Var aplūkot iespējamos divciparu skaitļus, kuri dalās ar 4 un kuru desmitu cipars ir mazāks par 4 (jo iegūtais skaitlis B ir mazāks par M; aplūkojot lielāko trīsciparu skaitli, kurš sākas ar 4, konstatējam, ka tā trīs ceturtās daļas ir skaitlis, kas mazāks par 400). A var būt sakitlis 12, 16, 20, 24, 28, 32 vai 36. Šo skaitļu ciparu summai pieskaitot 4, iegūstam 7, 11, 6, 10, 14, 9, 13. No šīs izlases derīgie skaitļi ir 20 un 32. Pārbaudām abas iespējas
M = 420 un M = 432 (abi skaitļi dalās ar 4 un 3):
Ja M = 420, tad ¾ M = 315 , kas neder, jo rezultāts satur citus ciparus.
Ja M = 432, tad ¾ M =324, kas ir meklētā atbilde.

3) *Atrisinājums.* Aplūkosim skaitli ¾ un pakāpeniski reizināsim tā skaitītāju un saucēju ar 3, līdz kāda skaitļa pēdējais cipars būs 4:

$$\frac{3}{4}=\frac{9}{12}=\frac{27}{36}=\frac{81}{108}=\frac{243}{324}$$

Ieguvām saucējā skaitli 324. Dalīsim to ar 3 un tad reizināsim ar 4

$$324:3=108;\quad 108\cdot 4=432$$

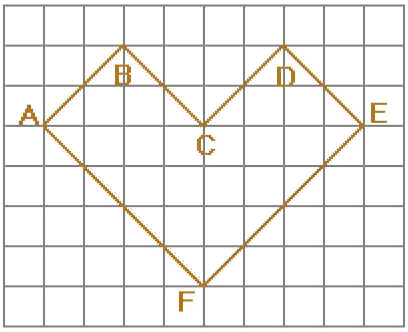
Meklētais skaitli ir 432.

Komentārs par risinājumu. Risinājumā nav doti visi paskaidrojumi. Acīm redzami, te ir ievērots, ka dotais skaitlis M dalās gan ar 3, gan ar 4, tāpat arī rezultāts B = 10A + 4. Tad var izteikt ¾ M = 10A + 4 jeb $\frac{3}{4}\cdot 3\cdot 4\cdot n=10A+4$, no kurienes secinām, ka skaitlis B dalās vismaz ar 9. Vispārīgi var izteikt

$$\frac{3n}{4n}\cdot M=\frac{3n}{4n}\cdot\frac{4}{3}\cdot B$$

Skolēns (domājams, intuitīvi) ir izvēlējies skaitli *n* kā skaitļa 3 daudzkārtni, līdz pamanījis tādu skaitli *4n*, kura pēdējais cipars ir 4. To tad arī izvēlējies kā skaitli B.

5. Sadali šo “leņķi” 8 vienādās figūrās!



Skolēnu atrisinājumi: