Punktiņš. (B grupa) Savienojumu veidošana

18.01.2019

Īsi risinājumi un komentāri; iepazīšanās ar grafu teorijas elementiem, kurus var formulēt nodarbības sākumā: grafs, virsotne, šķautne, virsotnes pakāpe.

1. (ievaduzdevums) Apgabalā ir 25 ciemati, no katra ciemata uz citiem apgabala ciematiem iziet 4 ceļi. Par katra ceļa uzturēšanu katrs ciemats pašvaldībai maksā 300 eiro gadā. a) Cik naudas pašvaldība saņem kopumā? b) Iedzīvotāju trūkuma dēļ 5 ceļus slēdza. Cik tagad pašvaldība saņem?

Atrisinājums. Ja katrs ciemats maksā 300 eiro par katra ceļa uzturēšanu, tad pašvaldība saņem $25 \cdot 4 \cdot 300 = 30000$ eiro gadā. Ievērojot, ka par katru ceļu pašvaldība saņem 600 eiro, tad pēc ceļu slēgšanas tā saņem par 3000 eiro mazāk. Tas ir, pašvaldība saņem 27000 eiro gadā.

2. Reiz dzīvoja karalis, kuram bija 3 dēli, arī turpmāk karaļa dinastijā dzima tikai dēli. Cik daudz pēcnācēju kopumā karalim bija, ja 100 viņa pēcnācējiem katram bija 3 dēli, bet visiem pārējiem bērnu nebija?

Atrisinājums. Kopumā bija 101 cilvēks, ieskaitot karali, kuriem bija dēli. Tāpēc karaļa kopējais pēcnācēju skaits ir $101 \cdot 3 = 303$.
Piezīme. Ir ieteicams uzzīmēt arī kādu karaļa dzimtas koku un pārrunāt dinastijas veidošanās iespējas.

3. Kādā jautrā pasākumā ieradās liels draugu pulks. Katrs zēns te draudzējās tieši ar trim meitenēm, bet katra meitene draudzējās tieši ar pieciem zēniem. Cik bērnu bija šajā pulkā, ja viņu skaits bija vismaz 30, bet ne vairāk kā 40?

Atrisinājums. Draudzība ir divpusēja attiecība. Iedomāsimies, ka meitenes var nostādīt vienā rindā, bet zēnus – otrā, atzīmēsim to kā punktiņu (*virsotņu*) sistēmu. Pretējo rindu punktiņus var savienot ar nogriezni (*šķautni*), ja zēns un meitene draudzējas. Kad visas draudzības ir atzīmētas, var saskaitīt kopējo katram punktiņam pievienoto nogriežņu skaitu vienā rindā (*rindas virsotņu pakāpju summu*). Tas sakrīt ar atbilstošo pievienoto nogriežņu skaitu otrā rindā. Tāpēc visu meiteņu *m* kopējais draudzību skaits sakrīt ar visu zēnu *z* kopējo draudzību skaitu, jeb 3*m* = 5*z*. Ievērojot uzdevuma nosacījumus, ir jāatrisina sistēma:

$$\begin{cases} 3m = 5z \\ 30 \leq m + z \leq 40 \end{cases}$$

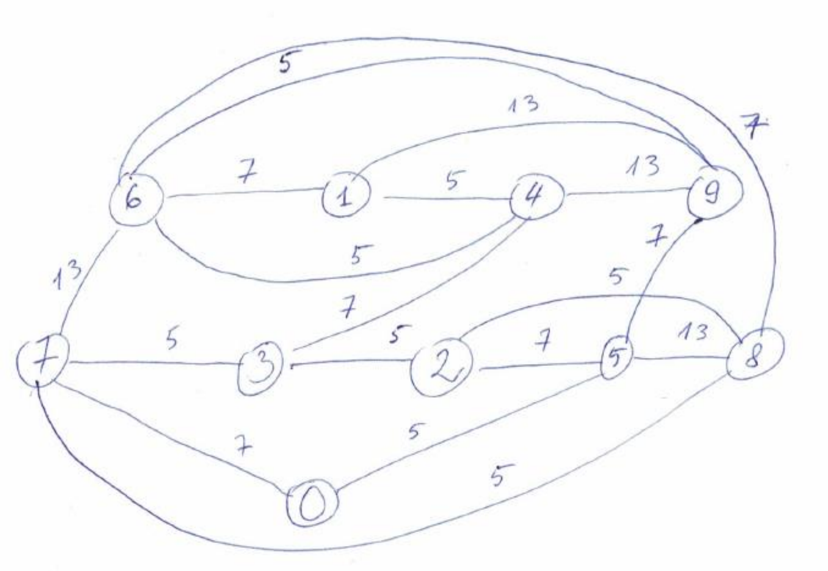
Ievērosim, ka meiteņu skaits *m* dalās ar 5. Meitenēm ir jābūt vismaz 20, lai izpildītu nosacījumus. Iespējamas ir 2 atbildes – 20 meitenes un 12 zēni, kopā 32 bērni. Vai 25 meitenes un 15 zēni, kopā 40 bērni.
Piezīme. Iekavās slīpā rakstā norādīti atbilstošie grafu teorijas jēdzieni.

4. Bibliotēkā satikās 9 sirmi bibliotekāri un gribēja savā starpā sarokoties. Bet diviem bibliotekāriem bija pilnas rokas ar grāmatām, tāpēc viņi tikai pamāja ar galvu. Visi pārējie sarokojās vienādu skaitu reižu. Ar cik draugiem katrs bibliotekārs sarokojās?

Atrisinājums. Ja diviem bibliotekāriem bija aizņemtas rokas, tad sarokoties varēja tikai septiņi. Ir iespējams, ka kolēģi katrs ir sarokojušies tieši ar diviem kolēģiem, vai ar 4, vai katrs ar katru (ar sešiem). Nepāra sarokošanās skaits nav iespējams. Ja saskaita katra bibliotekāra izdarīto rokas spiedienu skaitu un tie visi katram ir vienādi ar *n,* tad kopējais katra bibliotekāra izdarīto rokas spiedienu skaits ir $7 \cdot n$. Ievērojot, ka vienā sveicienā piedalās 2 dalībnieki, tad katra šāda sarokošanās ir ieskaitīta 2 reizes. Tāpēc skaitlim *n* ir jābūt pāra skaitlim.

5. Vai var rindā izrakstīt visus veselos skaitļus no 0 līdz 9 tā, lai katru divu blakus stāvošo skaitļu summa dalītos ar 5, 7 vai 13?

Atrisinājums. Var shematiski attēlot, kurus skaitļus rindā rakstīt blakus. Piemēram, šādi:



Te viegli ir ieraudzīt "ceļu", kā atbilstošos skaitļus izrakstīt rindā. Piemēram,

0; 7; 3; 2; 5; 8; 6; 1; 4; 9 .

6. (*)[1] Kādā kalnu apgabalā ir 100 rūķu ciemi starp kuriem ir ceļi. Tomēr pa šiem ceļiem no Čuņčiņu ciema uz Čāpiņu ciemu nevar tikt. Kāds lielākais ceļu skaits te ir iespējams?

Atrisinājums. Vislielākais ceļu skaits būtu tādā gadījumā, ja katrs ciems būtu savienots ar katru citu ciemu. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka, pieņemsim, Čāpiņu ciems atrodas no citiem ciemiem savrup, vai varbūt ir vairāki tādi ciemi, vai varbūt ir divas atsevišķas ciemu grupas. Pieņemsim, ka ir 2 grupas, kura katrā grupā ir izveidoti visi iespējamie ceļi. Apzīmēsim vienas grupas ciemu skaitu ar n, tad otras grupas ciemu skaits ir *100 – n*.
Vienas grupas visu iespējamo ceļu skaits ir

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Abu grupu kopējais lielākais iespējamais ceļu skaits ir

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(100-n)(100-n-1)}{2}$$

[1] Grūts uzdevums, domāts tiem skolēniem, kuri pārzina algebriskas metodes

Mūs interesē, kādā gadījumā šis skaitlis būs lielākais iespējamais. Novērtēsim izteiksmi:

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(100-n)(100-n-1)}{2}=$$

$$=\frac{n^2-n}{2}+\frac{9900-199n+n^2}{2}=$$

$$=\frac{2n^2-200n+9900}{2}=$$
$$=n^2-100n+4950=(n-50)^2+2450$$

Aplūkojot iznākumu, secinām, ka izteiksmes vismazākā vērtība ir, kad n = 50. Izteiksmes vērtība būs vislielākā, ja ciemu skaits n būs vislielākais iespējamais, tas ir 99 ciemi, bet Čāpiņu ciemam nepienāk neviens ceļš. Lielākais iespējamais ceļu skaits te ir 4851. Ja ciemi veido vairāk kā divas savstarpēji nesavienotas grupas, tad iespējamais lielākais ceļu skaits būs mazāks.

Punktiņš. (B grupa) Ķer zaķi! (*Tēma: Dirihlē princips*)
25.01.2019

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Klasē ir 30 skolēni. Tomass matemātikas kontroldarbā ielaida 13 kļūdas. Nevienam citam skolēnam nebija tik daudz kļūdu. Pierādi, ka vismaz trim skolēniem bija vienāds kļūdu skaits (varbūt nebija nevienas kļūdas)!

Atrisinājums. Iespējamais skolēnu kļūdu skaits ir 13 – neviena kļūda, viena kļūda, divas,…. 12 kļūdas. Neskaitot Tomasu, klasē bija 29 skolēni. Ja pieņemsim, ka katras vienāda skaita kļūdas vienlaikus pieļāvuši ne vairāk kā 2 skolēni, tad skolēnu skaits būtu ne lielāks kā $13 \cdot 2 = 26$. Tā ir pretruna dotajam. Tātad klasē būs vismaz 3 skolēni, kuri kontroldarbā pielaiduši vienādu skaitu kļūdu (varbūt nevienu).

2. Kādu vakaru Sniegbaltīte cienāja rūķus ar tikko ceptiem pīrādziņiem. Visi 10 rūķi kopumā apēda 35 pīrādziņus. Pamato, ka vismaz viens rūķis apēda vismaz 5 pīrādziņus, ja zināms, ka tieši viens rūķis apēda 1 pīrādziņu, otrs rūķis – tieši divus, bet vēl trešais rūķis – 3 pīrādziņus!

Atrisinājums. Pirmie trīs rūķi apēda 6 pīrādziņus. Septiņiem rūķiem atlika 29 pīrādziņi. Ja katrs rūķis būtu apēdis ne vairāk kā 4 pīrādziņus, tad kopumā būtu apēsti ne vairāk kā 28 pīrādziņi. Tātad vismaz viens rūķis apēdis vismaz 5 pīrādziņus.

3. Doti 12 divciparu skaitļi. Pierādi, ka starp tiem var izvēlēties divus tādus skaitļus, ka to starpība ir tāds divciparu skaitlis, kurā abi cipari vienādi!

Atrisinājums. Skaitlis, kurā abi cipari ir vienādi, dalās ar 11. Dalot skaitļus ar skaitli 11, var rasties 11 dažādi atlikumi. Piemēram, ja dalīsim skaitļus 12; 13; 1; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21 un 22, iegūsim atlikumus: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 un 0, jo skaitlis 22 dalās ar 11.
Tātad ir iespējamas 11 atlikumu grupas, dotos skaitļus dalot ar 11. Tā kā ir doti 12 skaitļi, tad vismaz diviem skaitļiem būs vienādi atlikumi, tos dalot ar skaitli 11. Tāpēc to starpība dalīsies ar 11 – vienādie atlikumi saīsināsies.
Algebriski: viens skaitlis ir $A = 11k + b$, otrs skaitlis ir $B = 11n + b$.

Starpība $A – B = 11k + b – (11n + b) = 11k – 11n = 11(k – n)$ dalās ar 11.

4. Pierādi, ja izvēlas 51 dažādus naturālus skaitļus, kas mazāki par 100, var atrast divus tādus, kuru summa ir vienāda ar 100.

Atrisinājums. No skaitļiem 1 līdz 99 izveidosim visus tādus skaitļu pārus, kuru summa ir 100: (1; 99); (2; 98); (3; 97); ….. (49; 51). Bez pāra paliek skaitlis 50. Ievērojot, ka pāru ir 49, izvēloties 51 skaitli, kuri ir mazāki par 100, noteikti atradīsies divi skaitļi, kuri ir no viena pāra, tātad to summa ir 100.

5. Vai tabulā, kurā ir 6 x 6 rūtiņas, katrā no rūtiņām var ierakstīt skaitli 0, 1 vai -1 tā, lai visās tabulas rindās, kolonās un abās diagonālēs skaitļu summas būtu dažādas?

Atrisinājums. Iespējamās skaitļu summas ir -6; -5; ….4; 5; 6. Kopumā ir iespējamas 13 dažādas doto skaitļu summas. Tabulas līniju - rindu, kolonu un abu diagonāļu - kopējais skaits ir 14. Tāpēc, izvietojot tabulā dotos skaitļus, vismaz divās līnijās skaitļu summas būs vienādas.

6. Galdnieka plauktā ir dažāda garuma dēlīši, kuru garumi ir 1, 2, 3, … 15 dm. Galdnieks izvēlējās kaut kādus 8 dēlīšus, kuri visi bija dažāda garuma. Vai starp izvēlētajiem dēlīšiem noteikti var atrast 3 tādus, ka divas no to garumu starpībām ir vienādas?

Atrisinājums. Dēlīšu garumu vietā var aplūkot skaitļu virkni 1; 2; 3; . 15. Uzdevuma jautājums ir par to, vai jebkurā 8 skaitļu izlasē no dotajiem skaitļiem noteikti atradīsies 3 skaitļu aritmētiskā progresija. Aplūkojot variantus, **var** atrast tādu 8 skaitļu virkni, kas **nesatur** 3 skaitļu aritmētisko progresiju:

1; 2; 4; 5; 10; 11; 13; 14.