Punktiņš. (B grupa) Reiz kādā karaļvalstī … (Loģikas uzdevumi)

1.11.2019

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Dārzā rotaļājās princeses Mirdza, Anna, Roze un Zilga. Viņām līdzi bija lode, spieķis, riņķis un dambrete. Priekšmeti bija izgatavoti no sudraba, zelta, ziloņkaula un koka. Lode nebija no sudraba, bet riņķis mirdzēja saulē. Annai nepatika ne riņķis, ne lode, ne ziloņkauls. Toties Rozei vienmēr vajadzēja visdārgākās rotaļlietas. Mirdzai patika domāt stratēģiski. Zilgai patika vienkārši priekšmeti, ko var ielikt kabatā. Kādi priekšmeti bija princesēm un kāda veida tie bija?

Atrisinājums. Izveidosim tabulu, ko var aizpildīt pakāpeniski. Norādīsim, kādi priekšmeti var piederēt princesēm un no kāda materiāla tie ir pagatavoti. Ar zīmi + apzīmēsim atbilstību, ar – noliegumu, bet ar jautājuma zīmi atzīmēsim izvēles iespējas. Ja Rozei patīk visas visdārgākās lietas, tad viņai piederoša lieta bija no zelta. Ja Mirdzai patīk stratēģiski domāt, tad viņai līdzi bija dambrete. Ja Zilgai patīk vienkārši priekšmeti, tad tie varētu būt izgatavoti no vienkārša materiāla – no koka. Kabatā nevar ielikt ne spieķi, ne dambretes spēli, tāpēc Zilgas priekšmets varētu būt lode, vai varbūt neliels riņķis. Riņķis var būt gatavots no zelta vai sudraba:

	Mirdza	Anna	Roze	Zilga	lode	spieķis	riņķis	dambrete
lode		-		?				
spieķis								
riņķis		-		?				
dambrete	+							
zelts			+				?	
sudrabs					-		?	
ziloņkauls		-						
koks				+				

Tālāk šo tabulu aizpildām, pamatojoties uz loģiskiem spriedumiem. Ievērojot, ka riņķis ir no dārgmetāla, tas nevarētu būt Zilgas priekšmets. Tātad Zilgai pieder koka lode. No tā, ka Annai nevar būt dambrete un viņai nepatīk ne lode, ne riņķis, viņas priekšmets ir spieķis. Atliek rozes priekšmets – riņķis:

	Mirdza	Anna	Roze	Zilga	lode	spieķis	riņķis	dambrete
lode		-		+				
spieķis		+						
riņķis		-	+					
dambrete	+							
zelts			+				?	
sudrabs					-		?	
ziloņkauls		-						
koks				+				

Atliek noskaidrot materiālu, no kāda pagatavots katrs priekšmets. Lode ir no koka. Rozei patīk zelts, tāpēc riņķis ir no zelta. Annai nepatīk ziloņkauls, tad spieķis ir no sudraba, atliek – ziloņkaula dambrete:

	Mirdza	Anna	Roze	Zilga	lode	spieķis	riņķis	dambrete
lode		-		+				
spieķis		+						
riņķis		-	+					
dambrete	+							
zelts			+				+	
sudrabs		+			-	+		
ziloņkauls	+	-						+
koks				+	+			

2. **2.** Lielajā ballē visi dejoja polonēzi. Viens aiz otra gāja pieci prinči. Pērs nebija pēdējais un nebija blakus Jānim. Ādolfs nāca pirms Magnusa. Ruperts nebija blakus ne Magnusam, ne Pēram, ne Jānim. Kādā secībā nāca pieci ķēniņa dēli?

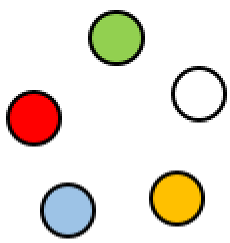
Atrisinājums. Ruperts bija vai nu pirmais, vai pēdējais (paskaidro, kāpēc!). Vienīgais princis, kas varēja būt blakus Rupertam, bija Ādolfs. Magnuss nāca virknē aiz Ādolfa, tāpēc Ruperts nevarēja būt pēdējais. Ja Ruperts bija pirmais, tad Ādolfs bija otrais. Pērs nebija pēdējais un viņam blakus varēja būt tikai Ādolfs un Magnuss. Tad prinči nāca šādā secībā:

Ruperts, Ādolfs, Pērs, Magnuss, Jānis.

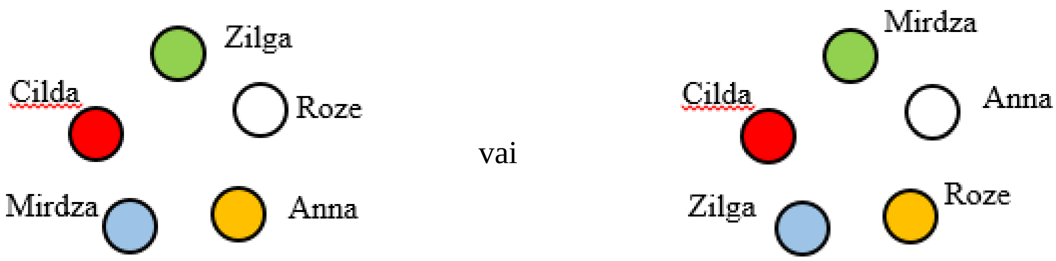
Piezīme. Uzdevumā nebija teikts, ka Magnuss nāca tieši aiz Ādolfa.

3. Pie princesēm (skat. 1. uzdevumu) viesos ieradās princese Cilda. Visas piecas meitenes sastājās aplī un salīdzināja savus tērpus. Viņu tērpi bija sārtā, zeltainā, baltā, zilā un zaļā krāsā. Pēc kārtas stāvēja princeses, kurām bija zaļš, balts un zeltains tērps. Zilgai vienā pusē blakus stāvēja Roze, bet otrā pusē – princese sārtā tērpā. Cildai blakus nebija ne Anna, ne Roze. Princeses tērptas zaļā un zilā tērpā nestāvēja blakus. Kā bija ietērptas princeses un kādā secībā viņas stāvēja aplī?

Atrisinājums. Pirmkārt var noteikt tērpu krāsu izvietojuma secību. Secīgi princeses tērptas zaļā, baltā, zeltainā, zilā un sārtā tērpos, jo zilā un zaļā tērpā tērptās princeses nebija blakus (pieņemsim, ka šī secība bija pretēja pulksteņa rādītāja virzienam):



Princese Zilga stāvēja blakus princesei, kas tērpta sārtā tērpā. Tātad Zilgai varēja būt zils vai zaļš tērps. Izpētot arī citus nosacījumus, atrodam, ka varēja būt divi principiāli atšķirīgi princešu izvietojumi:



Kā redzam, tikai Cildas tērpa krāsu varēja noteikt viennozīmīgi.

Līdzīgs risinājums ir, ja pieņem, ka tērpu krāsu izvietojuma secība ir pulksteņa rādītāja virzienā.

4. Karaliskajā ģimenē ir karalis Artūrs, karaliene Beatrise, princis Edmunds, princese Cilda un princis Daniels. Pusdienās tiek pasniegts medījuma cepetis:

a) Ja karalis Artūrs ēd cepeti, tad cepeti ēd arī karaliene;
b) Vismaz viens no prinčiem ēd cepeti;
c) Tieši viena - karaliene vai princese ēd cepeti;
d) Cilda un Daniels vai nu abi ēd cepeti, vai abi neēd cepeti;
e) Ja princis Edmunds ēd cepeti, tad arī viņa tēvs un brālis ēd cepeti.

Kurš šajā ģimenē ēd un kurš neēd cepeti?

Atrisinājums. Sāksim spriedumu ar apgalvojumu d). Pieņemsim, ka Cilda un Daniels neēd cepeti. Apgalvojumā b) teikts, ka vismaz viens princis ēd, tātad cepeti ēd Edmunds. No e) seko, ka cepeti ēd arī karalis un Daniels – pretruna.

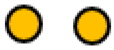
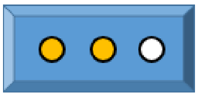
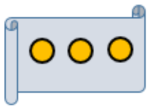
Tātad Cilda un Daniels ēd cepeti. Karaliene, saskaņā ar apgalvojumu c), cepeti neēd. Ja Edmunds ēd cepeti, tad cepeti ēd arī karalis (apgalvojums e)) un arī karaliene (apgalvojums a). Bet tā ir pretruna apgalvojumam, ka karaliene cepeti neēd. Tāpēc cepeti neēd ne Edmunds , ne karalis, ne karaliene.

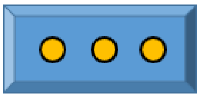
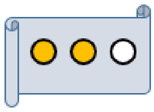
Atbilde: cepeti ēd tikai Cilda un Daniels.

5. Četrās aizvērtās kastītēs bija zelta un sudraba lodītes. Vienā kastītē bija 3 zelta lodītes, otrā 3 sudraba lodītes, trešajā viena zelta un divas sudraba lodītes, bet ceturtajā kastītē bija divas zelta un viena sudraba lodīte. Burve Asnate samainīja uzrakstus uz kastītēm tā, ka visi bija nepatiesi. Četri gudrie centās noskaidrot, kurā kastītē kādas lodītes atrodas. Pirmais gudrais no vienas kastītes neskatoties izņēma divas zelta lodītes un teica, ka zina, kāda lodīte palikusi kastē. Otrs gudrais no otras kastītes neskatoties izņēma vienu zelta un otru sudraba lodīti un arī teica, ka zina, kāda ir trešā lodīte kastē. Trešais gudrais no trešās kastītes neskatoties izņēma divas sudraba lodītes un teica, ka nezina, kāda ir trešā lodīte. Ceturtais gudrais teica, ka nu viņš zina, kādi lodīšu komplekti ir kurās kastēs. Paskaidro, kā viņš to izdomāja.

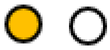
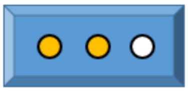
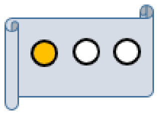
Atrisinājums. Pirmais gudrais no pirmās kastītes izņēma divas zelta lodītes un zināja, kāda ir kastē palikusī lodīte. Tas nozīmē, ka uz zīmītes sakrita uzraksts par divām lodītēm, bet uzraksts par trešo lodīti bija nepatiess. Te iespējami divi gadījumi: ja uzraksts vēstīja, ka kastītē ir 3 zelta lodītes, tad atlikusī lodīte bija no sudraba. Ja uzraksts vēstīja, ka kastītē ir 2 zelta un viena sudraba lodīte, tad kastītē palika zelta lodīte. Attēlosim gadījumus shematiski:

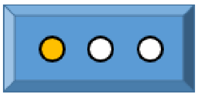
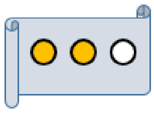
Pirmais gudrais:

Izņēma  a) kastītē bija  ; uzraksts 

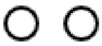
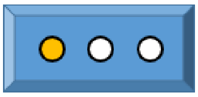
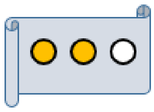
b) kastītē bija  ; uzraksts 

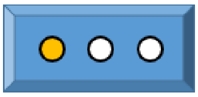
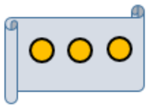
Otrais gudrais:

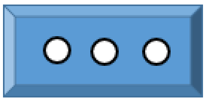
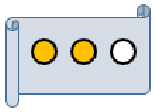
Izņēma  a) kastītē bija  ; uzraksts 

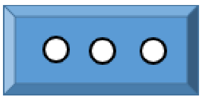
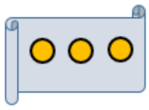
b) kastītē bija  ; uzraksts 

Trešais gudrais:

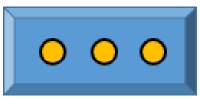
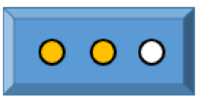
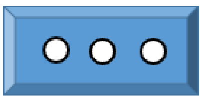
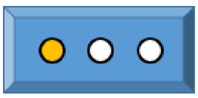
Izņēma  a) kastītē bija  ; uzraksts 

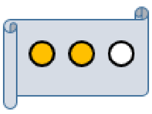
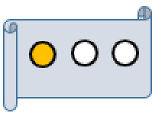
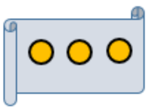
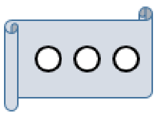
b) kastītē bija  ; uzraksts 

c) kastītē bija  ; uzraksts 

d) kastītē bija  ; uzraksts 

Ceturtais gudrais saprata, ka trešajai kastītei pievienotais uzraksts vēstī nepatiesu informāciju par divām vai par trīs lodītēm. Visi uzraksti pie kastītēm ir dažādi. Ar loģisku spriedumu metodi ceturtais gudrais izdomāja, ka pirmajā kastītē bija 3 zelta lodītes; otrajā 2 zelta un viena sudraba, trešajā kastītē bija visas sudraba lodītes, bet pēdējā kastītē – divas sudraba un viena zelta lodīte. Atrisinājumu var attēlot shematiski:

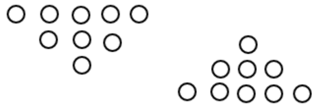
   

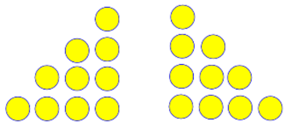
Punktiņš. (B grupa) Podziņas
8.11.2019

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Doti divi zīmējumi. Katra zīmējuma a) un b) kreisajā trijstūra izvietojumā pārliec 3 kauliņus tā, lai iegūtu izvietojumu, kas redzams labajā trijstūrī.



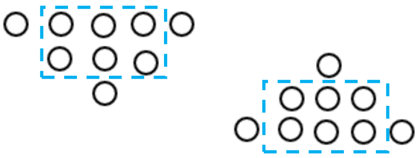
a)



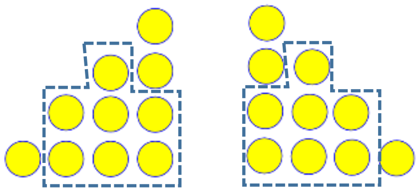
b)

Atrisinājums. Abās konfigurācijās atrodam lielāko kopīgo daļu:

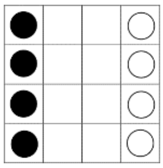
a) Sakrītošā daļa:



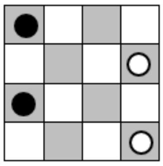
b) Sakrītošā daļa:



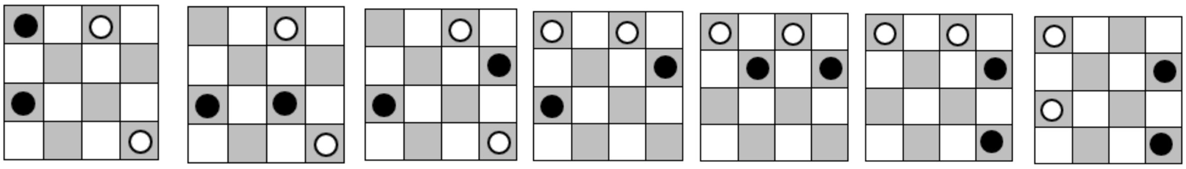
2. Vienā gājienā kauliņu var pārvietot diagonālā virzienā par vienu, divām vai trim rūtiņām. Kauliņu nevar nolikt pozīcijā, kura ir aizņemta. Kauliņi nelec viens otram pāri. Kauliņi netiek kauti. Kāds ir mazākais gājienu skaits, lai melnos un baltos kauliņus samainītu vietām?



Atrisinājums. Ja kvadrāta rūtiņas nokrāso šaha galdiņa veidā, var ievērot, ka 4 kauliņi pārvietojami tikai pa melnajām rūtiņam, bet citi četri - tikai pa baltajām. Tāpēc pietiek aplūkot četru kauliņu pārvietošanos:

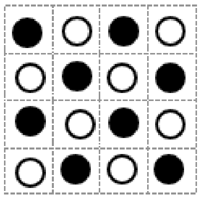


Tikai tas kauliņš, kurš atrodas stūrī, var pārvietoties uz pretējo stūri vienā gājienā. Te ir divi kauliņi pretējos stūros, tāpēc stūri vispirms ir jāatbrīvo, lai tur novietotu pretējās krāsas kauliņu. Tāpēc tikai vienam stūra kauliņam ir iespēja aizņemt pozīciju vienā gājienā. Pārejiem 3 kauliņiem ir jāveic vismaz 2 gājieni katram. Minimālais gājienu skaits līdz ar to ir 7:



Līdzīgā veidā pārvieto kauliņus, kuri ir uz baltajām rūtiņam. Mazākais gājienu skaits ir 14.

3. Kvadrāta formā izvietotas *n x n* pogas šaha rakstā. Izvēloties kādu rindu vai kolonu, ir atļauts visām pogām šajā rindā mainīt krāsu uz pretējo. Kāds ir mazākais gājienu skaits, lai iegūtu visas baltas (vai melnas) pogas?



Kā konstruēt atrisinājumu. Ja *n* ir pāra skaitlis, tad puse ir baltas un puse melnas pogas. Katra no baltajām pogām ir jāpārkrāso vismaz vienu reizi. Krāsosim tā, lai katra baltā poga tiktu pārkrāsota ne vairāk kā vienu reizi. Iesākumā pārkrāsojam katru otro kolonu. Ievērosim, ka vienā gājienā tiek pārkrāsotas tieši n/2 baltās pogas. Pārkrāsojot visas minētās kolonas tiek nokrāsota puse no baltajām pogām – visas tās baltās pogas, kuras ir nepāra rindās. Iegūst pogu rindas – melna, balta, melna… Tad krāso katru otro rindu. Katra baltā poga tika nokrāsota tieši vienu reizi, bet katra melnā poga – tieši 2 reizes. Kopumā tika izmantoti *n* gājieni.

Ja *n* ir nepāra skaitlis, tad, lai pārkrāsotu baltās pogas, nepieciešami *n* -1 gājieni. Savukārt, lai pārkrāsotu visas melnās pogas, nepieciešami *n*+1 gājieni. Rīkojas līdzīgi kā iepriekš.

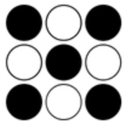
4. Astoņas melnas un astoņas baltas pogas ir izvietotas šaha rakstā kvadrāta veidā. Vai ar trešajā uzdevumā aprakstītajiem gājieniem var iegūt izvietojumu, kur ir tieši viena balta poga?

Atrisinājums. Melno pogu skaits ir pāra skaitlis – astoņas. Apskatīsim visas iespējas, kādas var būt pēc vairākiem gājieniem, tas ir, cik melno pogu var būt vienā rindā: neviena, viena, divas, trīs vai četras. Atzīmēsim, kas notiks šajā rindā pēc pārkrāsošanas:

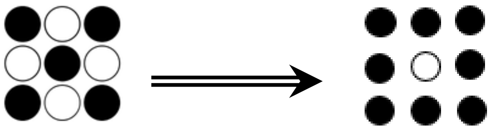
Melno pogu skaits rindā	**Melno pogu skaits rindā pēc pārkrāsošanas**	**Kopīgā melno pogu skaita izmaiņas**
0	+ 4	+4
1	-1 + 3	+2
2	-2 + 2	0
3	-3 + 1	-2
4	-4	-4

Te redzams, ka melno pogu skaita izmaiņas notiek tikai par pāra skaitli. Tāpēc no sākotnējā pāra skaitļa skaitli 7 iegūt nevar.

5. Deviņas melnas un baltas pogas ir izvietotas kvadrāta veidā šaha rakstā. Vai ar trešajā uzdevumā aprakstītajiem gājieniem var iegūt izvietojumu, kur ir tieši viena balta poga pašā centrā?



Atrisinājums. No dotās konfigurācijas ir jāiegūst sekojoša:



Atzīmēsim, cik reižu katru no pogām ir jāpārkrāso, lai iegūtu vēlamo situāciju – vai tas būs pāra skaitu reižu (p) vai nepāra skaitu reižu (n):

p	n	p
n	n	n
p	n	p

Apzīmēsim dotās pogas ar burtiem

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Centrālo pogu E var pārkrāsot tikai ar otrās rindas un/vai otrās kolonas palīdzību. Pieņemsim, ka rindas atbilstoši pārkrāso r_1, r_2 un r_3 reizes, bet kolonas k_1, k_2, k_3 reizes. Lai panāktu vēlamo situāciju ir jāizpildās:

$r_2 + k_2$ ir nepāra skaitlis. Pieņemsim, ka k_2 ir nepāra skaitlis, bet r_2 – pāra skaitlis. Tā kā otrajā rindā katra pogu ir jāpārkrāso nepāra skaitu reižu, tad tas nozīmē, ka visi skaitļi k_1, k_2 un k_3 ir nepāra skaitļi. Savukārt pogas A, C, G un I jāpārkrāso pāra skaitu reižu, tāpēc arī r_1 un r_3 ir nepāra skaitļi. No tā izriet, ka B un H pogas tiks pārkrāsotas pāra skaitu reižu, kas ir pretruna.

Punktiņš. (B Grupa) Lauku saimniecības grāmatvedība

15.11.2019

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Anna gatavoja pasūtījumu - pārtikas groziņus pircējiem. Ja viņa lika 2 bietes katrā paciņā, tad 1 biete palika pāri. Ja lika 3 bietes, tad 2 palika pāri. Ja lika 4 – pāri palika 3; ja lika 5 – palika 4; ja lika 6 – palika 5. Annai izdevās sadalīt visas bietes, ja katrā paciņā ielika 7 bietes. Kāds varēja būt mazākais kopējais biešu skaits, ko varēja iedalīt pārtikas grozos?

Atrisinājums. No pirmā apgalvojuma izriet, ka biešu skaits ir nepāra skaitlis (dalot pa divi, atliek 1 biete). Dalot pa 5, atliek 4 bietes. Tā kā biešu skaits ir nepāra skaitlis, tad tas būs skaitlis, kas beidzas ar 9: 9; 19; 29; 39; 49;…. No otras puses, tas ir skaitlis, kurš dalās ar 7. Tātad tie var būt skaitļi 49; 119; 189; … Pārbaudām mazākos iespējamos: 49 neder, jo atlikums, dalot ar 4, ir 1 nevis 3. Pārbaudām 119:

$$119 = 17 \cdot 7 = 59 \cdot 2 + 1 = 39 \cdot 3 + 2 = 29 \cdot 4 + 3 = 23 \cdot 5 + 4 = 19 \cdot 6 + 5$$

Mazākais iespējamais biešu skaits, kas bija jāsadala pa groziņiem, ir 119.

2. Jāzeps pasmējās par Annu un uzdeva viņai jautājumu: “Cik šorīt bija svaigu olu, ja tās saliku kastītēs pa 7, bet, jebkuru mazāku skaitu olu vienādi saliekot pa kastītēm, vienmēr viena ola palika pāri?” Cik tad tur bija to olu?

Atrisinājums. Ja olu skaitu nevar sadalīt ar 2, 3, 4, 5 un 6, vienmēr viena ola paliek pāri, tad šo olu skaitu var apzīmēt A + 1. Saprotams, ka skaitlis A dalās ar 2, 3, 4, 5 un 6. Mazākais tāds skaitlis ir 60. Tad jāaplūko visi tādi skaitļi, kas ir skaitļa 60 daudzkārtņi un starp tiem ir jāatrod tāds, lai A + 1 dalās ar 7:

Skaitļa 60 daudzkārtņi	A + 1	Atlikums, dalot ar 7
60	61	5
120	121	2
180	181	6
240	241	3
300	301	0

Esam atraduši, ka mazākais iespējamais olu skaits ir 301 ola.

3. Vienas zoss cena ir divciparu skaitlis. Katru mēnesi pārdeva tieši tādu skaitu zosu, kas sakrīt ar cenas desmitu ciparu. Savukārt mēnešu skaits sakrita ar zoss cenas vienu ciparu. Kopējā summa, ko ieguva, bija trīsciparu skaitlis, kurā visi cipari vienādi. Noskaidro, cik maksāja zoss, cik zosis pārdeva un kādu naudas summu nopelnīja Anna un Jāzeps!

Atrisinājums. Vienas zoss cenu apzīmēsim $\overline{ab}$. Katru mēnesi pārdeva a zosis un mēnešu skaits bija b. Nopelnīto naudu var aprēķināt sekojoši:

$$ab(10a + b) = 111n$$

Ievērosim, ka skaitli 111 var sadalīt reizinātājos:

$$ab(10a + b) = 3 \cdot 37 \cdot n$$

Vienīgais divciparu skaitlis šajā vienādībā var būt tikai 37. Tātad zoss cena ir 37, kur $a = 3$, bet $b = 7$. Katru mēnesi pārdeva 3 zosis, tās pārdeva 7 mēnešus, un nopelnīja 777 eiro.

4. Darba dienas beigās Anna skaitīja kastes, kurās strādnieki bija salikuši ābolus, burkānus un cukīni kabačus. Jāzeps apskatīja pierakstus un pamanīja, ka ābolu un burkānu kastu kopējais skaits dalās ar cukīni kastu skaitu; ābolu un cukīni kastu kopējais skaits dalās ar burkānu kastu skaitu, bet burkānu un cukīni kastu skaits dalās ar ābolu kastu skaitu. Cik kastu tur varēja būt?

Atrisinājums. Kastu skaitu apzīmēsim sekojoši:

a – ābolu kastu skaits; b – burkānu kastu skaits; c – cukīni kastu skaits.

Viegli redzēt, ka uzdevuma nosacījumi ir izpildīti, ja kastu skaiti ir vienādi:

$$a = b = c$$

Varētu būt, ka divu veidu kastu skaits ir vienāds, bet trešā veida – atšķirīgs. Arī tas ir iespējams, piemēram, $a = b = 2$; $c = 4$.

Pieņemsim, ka visi skaitļi dažādi $a < b < c$. Tad

$$a + b = c \cdot n$$

$$b + c = a \cdot m$$

$$a + c = b \cdot k$$

Sasummēsim

$$2(a + b + c) = c \cdot n + a \cdot m + b \cdot k$$

Ja visi a, b, c ir nepāra skaitļi, tad visi koeficienti n, m un k ir pāra skaitļi:

$$2(a + b + c) = c \cdot 2n_1 + a \cdot 2m_1 + b \cdot 2k_1$$

$$2(a + b + c) = 2(c \cdot n_1 + a \cdot m_1 + b \cdot k_1)$$

No kurienes seko

$$a + b + c = c \cdot n_1 + a \cdot m_1 + b \cdot k_1$$

Pēdējā vienādība iespējama tikai tad, ja visi a, b, c vienādi skaitļi. Tātad, saskaņā ar pieņēmumu, vismaz viens no skaitļiem ir pāra skaitlis. Pārbaudīsim trīs mazākos naturālos skaitļus 1, 2, 3.

Summa 1 + 2 dalās ar 3; summa 1 + 3 dalās ar 2; summa 2 + 3 dalās ar 1. No šejienes var vispārināt

$a = n$; $b = 2n$; $c = 3n$, kur n var būt jebkurš naturāls skaitlis.

Piezīme. Šis ir izpētes uzdevums, kurā nav atrodama viennozīmīga atbilde, nav arī jānoskaidro visas iespējamās atbilžu kopas. Tomēr ieteicams pamatot, ja visi a, b un c ir dažādi skaitļi, tad nevar būt, ka divi no tiem ir pārskaitļi un 1 ir nepāra skaitlis, kā arī der izpētīt tādu situāciju, kur $a < b$ un $b = c$.

5. Anna un Jāzeps nolēma gadatirgū nopirkt kazas. Annai makā bija tikai 5 eiro naudas zīmes un vēl viena monēta 1 eiro. Jāzepam bija tikai 10 eiro naudas zīmes un viena monēta 2 eiro. Anna būtu varējusi nopirkt kazu, ja viņai būtu vēl viena 5 eiro naudaszīme, bet viņa nevarētu samaksāt precīzu naudu. Arī Jāzeps nevarēja samaksāt precīzu kazas cenu, lai gan viņam bija vairāk naudas. Tad abi nopirka divas kazas, samaksājot precīzu cenu, dodot monētas un 20 naudas zīmes. Cik maksāja viena kaza un cik naudas bija Annai? *Piezīme.* Ņemiet vērā, ka kazas cena ir izteikta eiro naudas vienībās.

Atrisinājums. Apzīmēsim Annas naudu $5n + 1$; Jāzepa naudu, ko viņš samaksāja par abām kazām tieši $10m + 2$; vienas kazas cenu ar k. Annai nepietika naudas, lai nopirktu kazu:

$$5n + 1 < k$$

Ja viņai būtu vēl 5 eiro, tad naudas būtu vairāk, nekā maksā viena kaza:

$$5n + 6 > k$$

Novērtēsim kazas cenu:

$$5n + 1 < k < 5n + 6, \text{ jeb}$$

$$1 < k - 5n < 6$$

No šejienes seko, ka $k - 5n = 2$ vai $k - 5n = 3$, vai $k - 5n = 4$, vai $k - 5n = 5$ jeb te ir četras iespējamās kazas cenas:

$$k = 5n + 2$$

$$k = 5n + 3$$

$$k = 5n + 4$$

$$k = 5n + 5$$

Pēdējais variants neder, jo tad Anna ar papildus 5 eiro naudas zīmi varētu samaksāt kazas cenu.

Aprēķināsim, cik Anna un Jāzeps kopā samaksāja par 2 kazām:

$$10m + 5n + 3 = 2k$$

Šeit var aplūkot trīs iepriekšminētās iespējas:

$$10m + 5n + 3 = 10n + 4$$

$$10m + 5n + 3 = 10n + 6$$

$$10m + 5n + 3 = 10n + 8$$

Pirmais un otrais gadījums neatbilst uzdevuma nosacījumiem, ka samaksa par kazām tika veikta bez atlikuma.

Tad mums ir divu vienādojumu sistēma:

$$\begin{cases} 10m + 5n + 3 = 10n + 8 \\ m + n = 20 \end{cases}$$

Atrisinot sistēmu, iegūstam $n = 13$, $m = 7$. Tad aprēķinam, ka viena kaza maksā 69 eiro; Annai bija 66 eiro, bet Jāzepam – vismaz 72 eiro. Pērkot kazas, Jāzeps samaksāja 70 eiro ar 10 eiro naudas zīmēm un vēl 2 eiro monētu; Anna samaksāja visu savu naudu.

Punktiņš. (B Grupa) Izmēģini savus spēkus!
22.11.2019

Atrisinājumi

1. Vai var uzrakstīt tādu skaitļu virkni no 7 dažādiem naturāliem skaitļiem, kuri neviens nedalās ne ar 4, ne ar 7; katru divu blakus stāvošu skaitļu summa nedalās ne ar 4, ne ar 7; katru trīs viens otram sekojošu virknes skaitļu summa nedalās ar 4, bet trīs viens otram sekojošu virknes skaitļu summa dalās ar 7?

Atrisinājums. Vispirms naturālos skaitļus iedalīsim atlikumu grupās pēc 7:

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

No šiem ir jāizvēlas tādi skaitļi, kur 3 skaitļu atlikumu summa dalās ar 7. Piemēram, atlikumi var būt 1; 3; 3; 1; 3; 3; 1; 3… (var izvēlēties arī citādas atlikumu virknes). Lai meklētajā virknē neviens skaitlis, ne divu blakus esošo divu vai 3 skaitļu summa nedalītos ar 4, jāaplūko arī atlikumu grupas pēc 4. Derīgi būs skaitļi, kuri virknē dos atlikumus 1, dalot ar 4, 1; 1; 1; 1; … (var izvēlēties arī citādas atlikumu grupas: 3; 3; 3; 3; 3; … vai 1; 2; 3; 1; 2; 3; 1…) Tad no tabulas izvēlamies skaitļus, kuri dod atlikumus 1 pēc dalījuma ar 4 un atbilstoši dod atlikumus 1 un 3 pēc dalījuma ar 7. Viens no meklētās virknes variantiem ir:

1; 17; 45; 29; 73; 101; 57

2. Skaitlim nodzisuši cipari, kuri aizvietoti ar zvaigznītēm: 2**1. Aizvieto abas zvaigznītes tā, lai skaitlis dalītos ar 7! Atrodi tādu vismazāko skaitli un noskaidro, cik pavisam ir atbilžu! Pamato!

Atrisinājums. Robežās no 2001 līdz 2991 kopumā ir 990 četrciparu skaitļu. No šiem tādi skaitļi, kuri beidzas ar ciparu 1 un dalās ar 7, atkārtojas ik pēc 70. Varam aprēķināt to kopējo skaitu:

$$990:70 = 14\frac{1}{7}$$

To kopējais skaits ir 14.
Atradīsim mazāko šādu skaitli

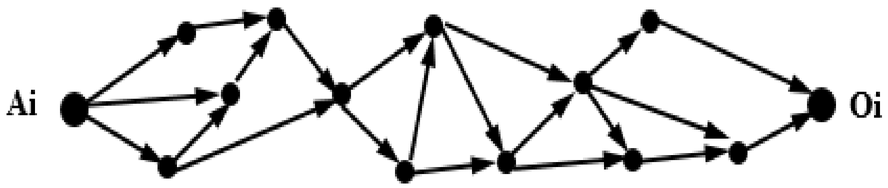
$$\overline{20a1} = 2000 + 10a + 1 = 7n$$
$$2001 + 10a = 285 \cdot 7 + 6 + 10a$$

Lai skaitlis dalītos ar 7, izteiksmei $6 + 10a$ arī jādalās ar 7. Tas iespējams tikai tad, ja $a = 5$. Tātad mazākais meklētais skaitlis ir 2051.

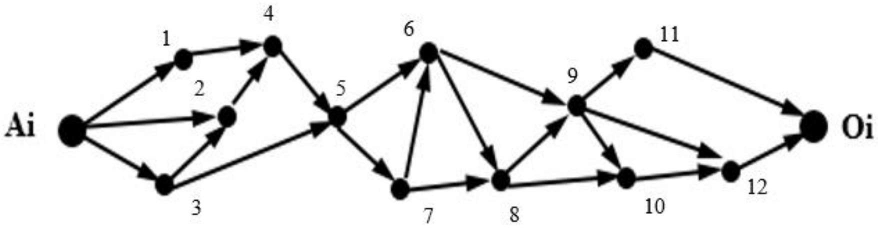
3. Artūram kabatā ir vairākas eiro centu monētas. Viņš teica, ka var samaksāt jebkuru summu mazāku par 1 eiro. Kāds varētu būt vismazākais monētu skaits Artūra kabatā? Atbildi paskaidro!

Atrisinājums. Artūrs var samaksāt 1, 2, 3, 4, un 5 centus. Tad viņam var būt 4 monētas 1 centa vērtībā vai divas monētas 1 centa vērtībā un viena divu centu vērtībā, vai arī 1 centa monēta un divas 2 centu monētas. Tad ir arī 5 centu monēta. Ar monētām 1, 1, 2, 5 var samaksāt jebkuru summu no 1 līdz 9 centiem. Kopā ar 10 centu monētu – līdz pat 19 centiem. Ja ir 20 centu monēta, tad var samaksāt līdz pat 39 centiem. Pievienojot vēl 2 monētas 10 un 50 centu vērtībā – var samaksāt no 1 līdz 99 centiem. Kopā pietiek ar 8 monētām: 1; 1; 2; 5; 10; 10; 20; 50 centu vērtībā.

4. Pilsētas savieno vienvirziena ceļi. Cik dažādos veidos no pilsētas **Ai** var nokļūt uz pilsētu **Oi**? Kāds ir lielākais ceļu skaits, kurus var slēgt, lai joprojām no **Ai** varētu nokļūt uz jebkuru pilsētu, un no jebkuras pilsētas varētu nokļūt uz **Oi**! Cik tagad dažādos veidos no **Ai** var nokļūt uz **Oi**?

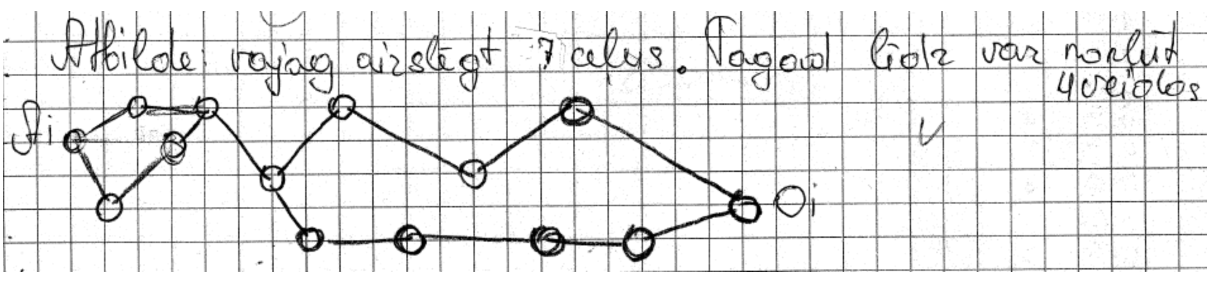


Atrisinājums. Katrā pilsētā summē tajā ienākošo ceļu skaitu. Lai šī summēšana būtu labāk saprotama, sanumurēsim pilsētas:



Pilsētās 1 un 3 no Ai var nokļūt 1 veidā, bet pilsētā 2 – divos veidos (tieši no Ai vai caur 3 pilsētu). Pilsētā 4 var nokļūt 1 + 2, tātad 3 veidos. Pilsētā 5 var nokļūt no pilsētām 3 vai 4, tātad 1 + 3 = 4 veidos. Pilsētā 7 arī var nokļūt 4 veidos, bet pilsētā 6 – 8 veidos. Tā turpinām skaitīšanu. Pilsētā 8 var nokļūt 12 veidos. Pilsētā 9 var nokļūt 20 veidos. Pilsētā 10 var nokļūt 32 veidos. Pilsētā 11 var nokļūt 20 veidos. Pilsētā 12 var nokļūt 52 veidos. Pilsētā Oi var nokļūt 72 veidos.

Var slēgt 7 ceļus. Diānas atrisinājums:



5. Uz Rīgas svētkiem no Liepājas, Ventspils un Cēsīm bija atbraukuši trīs draugi Emīls, Raitis un Aleksis. Viņu profesijas bija zobārsts, pavārs un skolotājs. Emīls nestrādā Liepājā, Aleksis nestrādā Ventspilī. Skolotājs strādā Liepājā, ventspilnieks nav zobārsts, Emīls nav pavārs. Kurš no draugiem dzīvo kurā pilsētā un kāda katram ir profesija?

Anetes atrisinājums:

Emīls ir zobārsts
Emīls strādā ventspilī cēsis
Aleksis strādā liepājā
Raitis strādā ventspilī
Aleksis ir skolotājs

Liepājas Ventspils Cēsis
Emīls Raitis Aleksis
zobārsts pavārs skolotājs

6. Uz kvadrāta ar izmēru 4 x 4 rūtiņas ir uzliktas viena zila podziņa, bet parējās 15 baltas. Vienā gājienā ir atļauts kādā rindā vai kolonā visas zilās podziņas aizvietot ar baltām, bet visas baltās – ar zilajām. Vai pēc vairākiem gājieniem ir iespējams panākt, ka visas rūtiņas noklātas tikai ar zilajām podziņām?

Atrisinājums. Atrisinājumā var pielietot podziņu skaita pāra un nepāra īpašības. Vienā rindā var būt neviena, viena, divas, trīs vai četras zilas podziņas. Pēc viena gājiena zilo podziņu skaits mainās par pāra skaitli (atbilstoši iegūst +4; +2; 0; -2; -4 zilās podziņas). Pēc katra gājiena zilo podziņu kopējais skaits joprojām ir nepāra skaitlis (iesākumā bija viena). Tāpēc visas zilas podziņas iegūt nevar, jo 16 ir pāra skaitlis.

Punktiņš. (B Grupa) Figūru pārsvītrošana

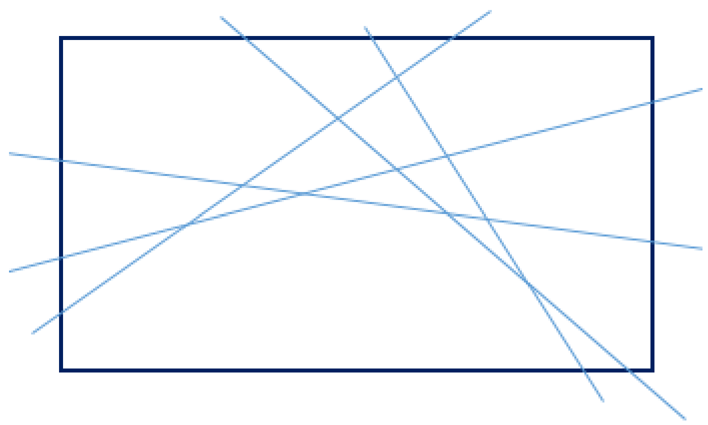
29.11.2019

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. **1.** Ar zīmuli un lineālu papīra lapu pārsvītroja ar 5 taisnām līnijām. Tad lapu sagrieza daļās pa griezuma līnijām. Cik atsevišķas daļas varēja iegūt? a) Kāds ir vislielākais iespējamais daļu skaits? b) Kāda veida figūras tā varēja iegūt?

Atrisinājums. Ja lapu pārsvītro ar nogriežņiem, kuri uz lapas nekrustojas, tad, sagriežot lapu, var iegūt 6 figūras. Vairāk figūru var iegūt, ja taisnās līnijas uz lapas krustojas.

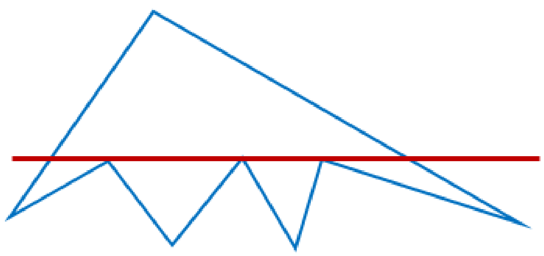
a) Vislielāko figūru skaitu var iegūt, ja katra no 5 līnijām krusto visas citas līnijas un nekādām trim līnijām nav kopīgs krustpunkts. Divas krustiskas līnijas sadala lapu četrās daļās. Trešā līnija krusto divas iepriekšējās – tā maksimāli var krustot 3 apgabalus no iepriekšējiem četriem, katru no tiem sadalot divās daļās. Tā rodas vēl 3 apgabali. Tā turpinot, apgabalu skaits veidojas: 2 + 2 + 3 + 4 + 5 = 16. Piemēram:



b) Taisnās līnijas krustojoties var veidot trijstūrus, četrstūrus, piecstūrus. Izgriežot tos no lapas, var rasties arī sešstūri un septiņstūri. Atrodi, kādas figūras ir dotajā piemērā! Kāpēc nevar būt figūras ar lielāku malu skaitu kā 7?

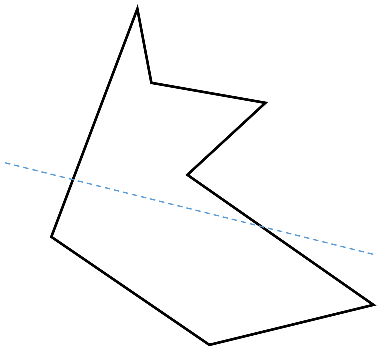
2. **2.** Konstruē tādu 8-stūri, kuru ar vienu taisnu līniju var sadalīt 5 trijstūros.

Atrisinājums. Ar vienu taisnu griezienu var iegūt 5 trijstūrus, piemēram, šādā veidā:

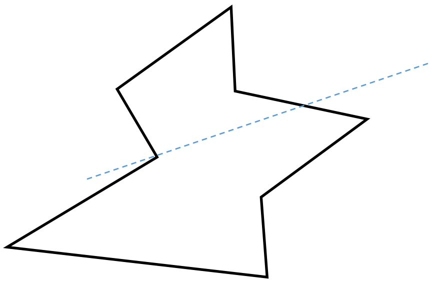


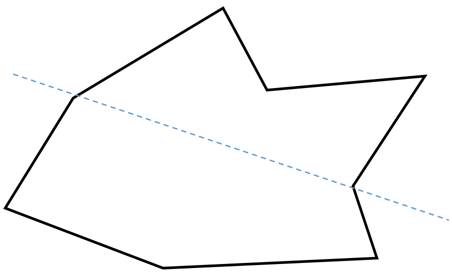
3. Figūru ar vienu taisnu griezienu sagrieza 5-stūrī un 6-stūrī. Kāda varēja būt sākotnējā figūra?

Atrisinājums. Dotā figūra var būt 7-stūris, 8-stūris vai 9-stūris. Pirmajā gadījumā figūru griež caur divām malām, vienā pusē atstājot 3 virsotnes, bet otrā 4.



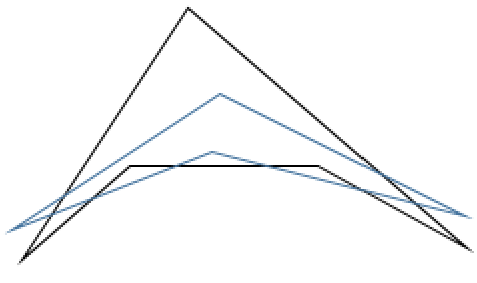
Otrā gadījumā griež caur virsotni un malu, bet trešajā gadījumā caur 2 virsotnēm:





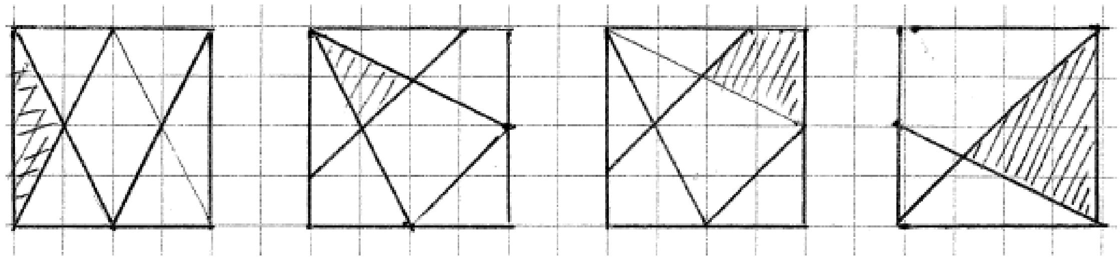
4. Četrstūri uzlika uz piecstūra. Kopīgā daļa bija 12 – stūris. Uzzīmē, kādas bija šīs figūras![1]

Atrisinājums:

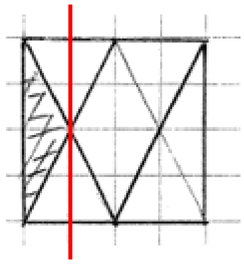


[1] 20 Atklātā Matemātikas olimpiāde, 6. klase

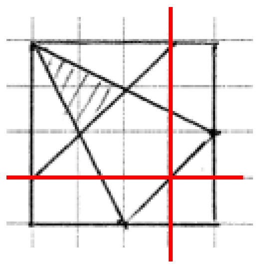
5. Kvadrātu ar taisniem griezieniem sagrieza vairākās daļās. Kāda daļa no kvadrāta laukuma ir iezīmētajām figūrām?



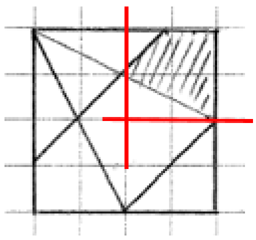
Atrisinājums. Ievērosim ka pirmajā zīmējumā ir iekrāsota puse no kvadrāta ceturtās daļas:



Otrajā zīmējumā var aplūkot mazāku kvadrātu ar izmēru 3 x 3 rūtiņas. "Nogriežot" no šī kvadrāta lieko daļu, aprēķinām iesvītrotās figūras laukumu: $9 - 4{,}5 - 2 \cdot 1{,}5 = 1{,}5$. Iesvītrotais laukums ir $1{,}5 : 16 = \frac{3}{32}$ daļas no kvadrāta laukuma.



Līdzīgi trešajā zīmējumā var applūkot labo augšējo kvadrātu ar izmēru 2 x 2 rūtiņas un "nogriezt" lieko daļu: $2 \cdot 2 - 0{,}5 - 1 = 2{,}5$. Iesvītrotais laukums ir $2{,}5 : 16 = \frac{5}{32}$ daļas no kvadrāta laukuma.



Lai labāk izprastu ceturtajā kvadrātā iesvītroto laukumu, kvadrāta malu palielināsim 3 reizes. Palielinot izmēru, iesvītrotās daļas un kvadrāta laukuma attiecība saglabājas. Iesvītroto laukumu var sadalīt divos trijstūros, kur viens ir puse no kvadrāta ar izmēru 8 x 8 rūtiņas, bet otrs ir puse no taisnstūra ar izmēru 8 x 4 rūtiņas. Tad laukumu attiecība ir

$$\frac{64+32}{2} : 144 = \frac{48}{144} = \frac{1}{3}$$