Punktiņš. (B grupa) Skaitļu virknītes

04.10.2019

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. **1.** Virknē pierakstīti vairāki skaitļi 10, 15, 21, 4, 5. Katru divu blakus esošo skaitļu summa ir kvadrāts: 25, 36, 25, 9. Uzraksti visas iespējamās piecu dažādu naturālu skaitļu virknītes, lai katru divu sekojošu skaitļu summa būtu tāda pati, kā piemērā!

Atrisinājums. Pēdējo divu virknes skaitļu summa ir 9, ko var sastādīt 8 veidos. Virkni konstruē, sākot no beigām. Piemēram, ja izvēlamies pēdējo skaitli 8, tad aprēķinām visus virknes skaitļus un iegūstam

13, 12, 24, 1, 8

Kopumā var iegūt 7 dažādas virknes, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem. Virkne, kas beidzas ar 2, neder (*pārbaudi*, kāpēc neder!).

2. Kādu garāko dažādu naturālu skaitļu virknīti vari izveidot, lai blakus esošo skaitļu summas atkārtotos 25, 36, 25, 36, 25, …? Pamato, ka virknīte ir garākā!

Atrisinājums. Ievērosim, ka virknes skaitļi nedrīkst pārsniegt 24. Katrs virknes skaitlis, izņemot pirmo un pēdējo, piedalās divu summu veidošanā – gan kā skaitļa 25 saskaitāmais, gan kā skaitļa 36 saskaitāmais. Apskatīsim visas divu skaitļu summas, kas ir 36 un atbilst minētajiem nosacījumiem:

$$36 = 24 + 12 = 23 + 13 = 22 + 14 = 21 + 15 = 20 + 16 = 19 + 17$$

Virknes skaitļiem jābūt dažādiem, tāpēc 18 + 18 neder. Ja virknē ir iekļauts kāds šo skaitļu pāris, tad tiem jāpieskaita skaitļi, kas mazāki par 12 (izņemot saskaitāmos 12 un 13), lai summā iegūtu 25. Līdz ar to no aplūkotajām summām var izvēlēties augstākais divus skaitļu pārus, lai iegūtu garāko virkni, kurā ir 7 skaitļi :

2, 23, 13, 12, 24, 1, 35

Otrs variants satur tos pašus skaitļus otrādā secībā.

3. Sakārto skaitļus no 1 līdz 17 virknē tā, lai katru divu blakus esošo skaitļu summa ir kāda skaitļa kvadrāts! Vai vari izveidot vairākas tādas virknes?

Atrisinājums. Lielāko divu skaitļu no dotajiem summa ir 16 + 17 = 33. Iespējamie skaitļu kvadrāti, kurus var iegūt, tad ir 4, 9, 16 un 25. Pierakstīsim visas iespējas, kā šos kvadrātus var iegūt:

$4 = 1 + 3$

$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$

$16 = 1 + 15 = 2 + 14 = 3 + 13 = 4 + 12 = 5 + 11 = 6 + 10 = 7 + 9$

$25 = 17 + 8 = 16 + 9 = 15 + 10 = 14 + 11 = 13 + 12$

Šajā sarakstā atrodam, ka skaitļi 16 un 17 katrs piedalās tikai vienā summā – tāpēc virkne sāksies ar 16 un beigsies ar 17 vai otrādi. Tikai skaitļi 1 un 3 katrs piedalās trijās summās, pārējie skaitļi piedalās katrs tieši divās summās – tas nozīmē, ka virkni var izveidot viennozīmīgi (*pamato,* kāpēc virknē nevar secīgi iekļaut skaitļus 1 un 3!):

17, 8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9, 16

4. Doti naturāli skaitļi no 1 līdz 10. Tiem aprēķinātas katru divu blakus esošo skaitļu summas. Vai vari dotos skaitļus sakārtot virknē tā, lai minētās blakus esošo skaitļu summas būtu visi skaitļi no 7 līdz 15? Izveido vismaz divas dažādas virknes!

Atrisinājums. Visu skaitļu no 7 līdz 15 skaitļu kopējā summa ir 99. Katrs virknes skaitlis šajā summā ietilpst divas reizes, izņemot pirmo skaitli a un pēdējo skaitli b. Skaitļu no 1 līdz 10 kopējā summa S = 55. No šejienes seko

$$2S - a - b = 99$$

$$a + b = 110 - 99 = 11$$

Virknes pirmā un pēdējā skaitļu summai ir jābūt 11. Tad šie skaitļi var būt (5; 6), (7; 4), (8; 3), (9; 2), (10; 1).

Virknes var izveidot, piemēram, šādas:

1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, 5, 10

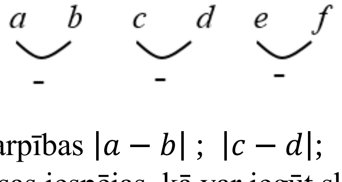
3, 9, 4, 10, 5, 6, 1, 7, 2, 8

Komentārs. Ievērosim, ka abi piemēri izveidoti, ievērojot zināmu skaitļu ciklisku kārtību. Pirmajā virknē katru divu skaitļu summas ir visi skaitļi no 7 līdz 15 pēc kārtas. Arī otrajā virknē ir ievērota zināma skaitļu secība (pirmo piecu skaitļu cikliskā kārtība ir izvietota nepāra pozīcijās - 3, 4, 5, 1, 2). Rodas jautājums, vai iespējams konstruēt tādus piemērus, kur skaitļi izvietoti bez cikliskas kārtības. Jā, to var izdarīt, piemēram:

1, 6, 8, 4, 9, 2, 7, 3, 5, 10

5. Virknē patvaļīgā secībā ir uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 6. Veic sekojošus aprēķinus: summē otro skaitli ar trešo; ceturto skaitli ar piekto; aprēķina starpības pirmajam un otrajam skaitlim; trešajam un ceturtajam; piektajam un sestajam skaitlim no lielākā skaitļa atņemot mazāko. Vai iespējams dotos sešus skaitļus izvietot virknē tā, lai rezultātā iegūtu visus dažādus skaitļus no 1 līdz 5? Varbūt no 3 līdz 7? Kādu secīgu skaitļu virkni var iegūt kā rezultātu?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka dotos skaitļus ir izdevies izvietot:



Skaitļu summas $b + c$ un $d + e$ un starpības $|a - b|$; $|c - d|$; $|e - f|$ pieņem vērtības 1, 2, 3, 4 un 5 kaut kādā secībā. Apskatīsim visas iespējas, kā var iegūt skaitļus 1, 2, 3, 4, 5:

5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 6 – 1

4 = 1 + 3 = 6 – 2 = 5 – 1

3 = 1 + 2 = 6 – 3 = 5 – 2 = 4 – 1

2 = 6 – 4 = 5 – 3 = 4 – 2 = 3 – 1

1 = 6 – 5 = 5 – 4 = 4 – 3 = 3 – 2 = 2 – 1

Kā summu var iegūt tikai skaitļus 3 un 4 (vienā veidā), un 5. Aplūkojot šīs summas secinām, ka divas dažādas summas $b + c$ un $d + e$ no četriem dažādiem skaitļiem nevar iegūt.

Otrs gadījums. Ja kā rezultātu ir jāiegūst visus skaitļu no 3 līdz 7, tad apskatīsim trīs dažādās starpības $|a-b|$, $|c-d|$ un $|e-f|$ no visiem dotajiem skaitļiem, kuras ir dažādi skaitļi. Kā starpību var iegūt tikai skaitļus 3, 4 un 5:

5 = 6 – 1

4 = 6 – 2= 5 – 1

3 = 6 – 3 = 5 – 2 = 4 – 1

Kā redzam, trīs dažādas starpības no visiem sešiem dažādiem skaitļiem iegūt nevar.

Vai vispār var iegūt secīgu skaitļu virkni kā minēto darbību rezultātu? Jā, var iegūt visus skaitļus no 2 līdz 6:

6, 2, 3, 5, 1, 4

Te 6 – 2 = 4; 2 + 3 = 5; 5 – 3 = 2; 5 + 1 = 6; 4 – 1 = 3

Punktiņš. (B grupa) Pelīte un siers

11.10.2019

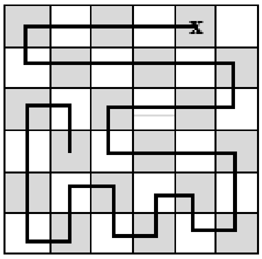
Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Pelīte dzīvo pagrabā, kurā ir 6 x 6 kambari, kur starp katriem diviem blakus esošiem kambariem ir durvis. Kāds ir garākais ceļš no pelītes kambara līdz kambarim, kur glabājas siers, ja viņa jebkurā kambarī ieies ne vairāk kā vienu reizi? Uzzīmē šādu ceļu un pamato, ka tas ir garākais iespējamais ceļš!

				x	
	P				

Atrisinājums.

Iekrāsosim rūtiņu kvadrātu kā šaha dēlīti un konstruēsim kādu garākā ceļa piemēru:



Ceļš secīgi iet caur melnu – baltu – melnu – baltu - … rūtiņām un beidzas atkal ar melnu rūtiņu. Kopumā ceļā ir 18 melnas rūtiņas un tikai 17 baltas, jo ceļš sākas un beidzas ar melnajām rūtiņām. Tāpēc kaut kāda balta rūtiņa šajā ceļā netiks iekļauta. Garākais ceļš satur 34 soļus jeb pelīte izies caur 34 durvīm.

2. Kāds ir īsākais ceļš no kambara, kur atrodas pelīte līdz kambarim, kurā ir siers (skat. 1. uzdevuma attēlu)? Cik ir tādu īsāko ceļu?

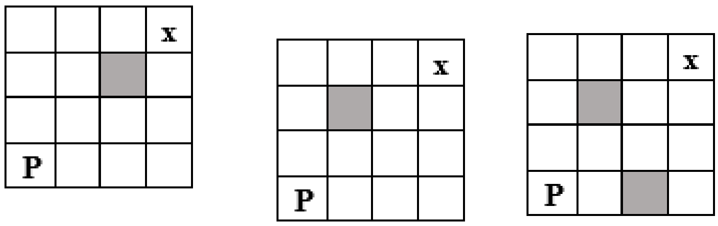
Atrisinājums. Pelīte visātrāk sasniegs siera kambari, ja pēc dotās kartes virzīsies tikai pa labi un uz augšu. Noteiksim dažādo ceļu skaitu, pa kuriem pelīte var nokļūt kādā no kambariem. Skatoties pēc kartes, kādā kambarī jeb rūtiņā viņa var iekļūt vai nu no apakšējās rūtiņas, vai no rūtiņas pa kreisi. Tāpēc ceļu skaits, pa kuriem var nokļūt kādā rūtiņā, ir summa no ceļu skaita minētajās blakus rūtiņās (kreisajā un apakšējā).

Katrā rūtiņā ierakstīsim ceļu skaitu, kā tur var nokļūt:

	1	4	10	**20**	
	1	3	6	10	
	1	2	3	4	
	P	1	1	1	

Pavisam ir 20 dažādi ceļi, kā pelīte visātrāk var nokļūt pie siera.

3. Iezīmētais kambaris ir aizslēgts, pelīte tajā iekļūt nevar. Cik tagad ir īsāko ceļu līdz sieram?



Atrisinājums. Pelīte pie siera var atbilstoši nokļūt pa 8; pa 11; pa 7 dažādiem ceļiem:

1	4	4	**8**
1	3		4
1	2	3	4
P	1	1	1

1	1	4	**11**
1		3	7
1	2	3	4
P	1	1	1

1	1	3	7
1		2	4
1	2	2	2
P	1		

4. Pie ieejas pagrabā ir 6 pakāpieni. Pelīte ir izdomājusi šādu rotaļu – uzlekt pa pakāpieniem dažādos veidos – vai nu uzlecot uz katra pakāpiena pēc kārtas, vai pārlecot uzreiz visiem pakāpieniem pāri, vai arī citādi. Cik veidos pelīte var uzlekt pa šiem 6 pakāpieniem?

Atrisinājums. Pelītes pēdējais lēciens vienmēr ir uz sesto pakāpienu. Uz katra no pirmajiem pieciem pakāpieniem viņa var uzlekt vai neuzlekt. Ir divi varianti, vai pelīte uz kāda pakāpiena uzleks vai neuzleks, tie kombinējas savā starpā. Tāpēc dažādo lēcienu variantu skaitu var aprēķināt sekojoši:

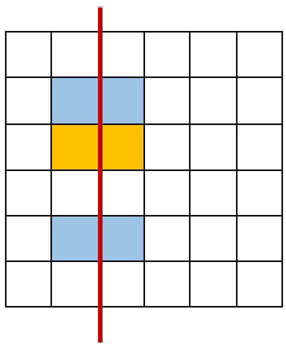
$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

Ir 32 dažādi veido, kā pelīte var uzlekt augšā.

5. (*) Pelītei ir pagraba karte – kvadrāts ar 6 x 6 rūtiņām. Viņa noklāj karti ar atbilstoša izmēra domino kauliņiem (domino noklāj tieši 2 rūtiņas, visas rūtiņas pārklātas, domino nekur nepārklājas). Pelīte pamanīja, ka lai arī kā viņa izvieto domino kauliņus, uz kartes vienmēr paliek vismaz viena taisna līnija no vienas kartes malas līdz otrai, kas nav pārklāta ne ar vienu domino kauliņu. Paskaidro, kāpēc tā ir!

Atrisinājums. Pelīte var noklāt karti ar 18 domino kauliņiem. Apskatīsim taišņu nogriežņus, jeb līnijas, kas sadala karti rūtiņās - ir 5 vertikālas un 5 horizontālas līnijas. Pieņemsim, ka ir tāds pārklājums, kurā ir atrodama līnija, kuru pārklāj nepāra skaits domino kauliņu.

Piemēram:



Piemērā otrā vertikālā līnija ir pārklāta ar 3 domino.

Līnija, kura pārklāta ar nepāra skaitu domino, sadala kvadrātu divās daļās, kur katrā daļā ir pāra skaits rūtiņu. Nepāra skaita domino uz šīs līnijas katrā no daļām pārklāj nepāra skaitu rūtiņu. Atlikušās rūtiņas katrā daļā arī ir nepāra skaitā – tās nevar pilnībā pārklāt ar domino, jo katrs domino pārklāj tieši divas rūtiņas.

Tāpēc nav tādas līnijas, kuru pārklāj nepāra skaits domino. Katru vertikālo vai horizontālo līniju pārklāj 2 vai 4, vai 6 , vai neviens domino.

Pieņemsim, ka katra līnija pārklāta vismaz ar diviem domino kauliņiem. Ir 10 līnijas, kuru pārklāšanai ir nepieciešami vismaz 20 domino kauliņi, bet kvadrātu var pārklāt ar 18 kauliņiem. Tātad pieņēmums ir nepareizs – ir vismaz viena taisna līnija, kas nav pārklāta ar domino kauliņiem.

(*) Uzdevums no grāmatas: Andras Szilard. Elementary combinatorial geometry. GIL Publishing House, 2007

Punktiņš. (B grupa) Skaitļa pieraksts

18.10.2019

Īsi atrisinājumi un komentāri.

1. Desmitciparu skaitļi ir sastādīti tikai no cipariem 1, 2, 3. Cik starp tiem ir tādu skaitļu, kur katri divi blakusesošie cipari atšķiras par 1?

Atrisinājums. Skaitlī blakus var atrasties cipari 1 un 2 vai cipari 2 un 3. Tāpēc skaitļa nepāra pozīcijās ir visi cipari 2 vai arī cipari 2 izvietoti pāra pozīcijās. Starp cipariem 2 atliek 5 brīvas pozīcijas, kurās izvieto ciparus 1 un 3. Katrā no piecām pozīcijām var atrasties vai nu cipars 1, vai 3. Kopumā tie ir 32 varianti. Vadoties no ciparu 2 izvietojuma, variantu skaits ir 64. Ja pieņemam, ka katrā skaitlī ir vismaz viens cipars 1 un vismaz viens cipars 3, tad meklēto skaitļu skaits ir 62.

2. Katrā kvadrāta 2 x 2 rūtiņā ir ierakstīts viens no skaitļiem no 1 līdz 9. Tā ieguva četrus divciparu skaitļus, kurus saskaitīja 52 + 19 + 51 + 29 = 151. Kādus skaitļus jāieraksta rūtiņās, lai to divciparu skaitļu summa būtu 100?

5	2
1	9

Atrisinājums. Kvadrātā izvietotos ciparus apzīmēsim *a, b, c, d*:

a	b
c	d

No šim cipariem izveido divciparu skaitļus, kurus summē:

$$\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ac} + \overline{bd}$$

Izvēršot darbības decimālajā pierakstā, mums ir jāatrisina sekojošais vienādojums:

$$10a + b + 10c + d + 10a + c + 10b + d = 100$$

Saīsinot

$$20a + 11(b + c) + 2d = 100$$

Ievērosim, ka summa $b + c$ ir pāra skaitlis, kas var pieņemt vērtības 2; 4; 6; 8. Lielāka par 8 šī summa nevar būt, jo tad kreisās puses izteiksme būtu lielāka par 100. Arī ar 8 šī izteiksme nevar būt vienāda, jo tad

$$20a + 2d > 100 - 88 = 12$$

Pieņemsim, ka $b + c = 2$, tad $b = c = 1$ tad

$$20a + 2d = 78 \quad jeb \quad 10\,a + d \ = \ 39$$

Tad $a = 3$ un $d = 9$.

Līdzīgi apskata pārējos gadījumus, kad summa $b + c$ ir 4 vai 6.

Kopumā ir 9 dažādas atbildes:

3	1		1	1		1	5		1	2		1	4
1	9		5	7		1	7		4	7		2	7

1	3		2	1		2	3		2	2
3	7		3	8		1	8		2	8

3. Atrisini ABC + AB + C = 300!

Atrisinājums. Pierakstīsim doto izteiksmi decimālajā pierakstā un vienkāršosim to

$$100A + 10B + C + 10A + B + C = 300$$

$$110A + 11B + 2C = 300$$

Cipars *A* nevar būt 3 vai lielāks, jo tad vienādības kreisā puse būtu lielāka par 300. Tāpēc *A* ir 1 vai 2.

Ja *A* = 1, tad $11B + C = 190$.

Bet lielākā iespējamā *11B* + *C* summa nepārsniedz 108 (108 = 99 + 9).

Ja *A* = 2, tad $11B + C = 80$. Ievērojam, ka B ir pāra skaitlis (skat. iepriekšējo vienādojumu ar A, B, C), bet *C* ir viencipara skaitlis. Te ir tikai viens atrisinājums *B* = 6, bet *C* = 7. Skaitlis *ABC* = 267.

4. Atrisini ABC = AB + BC + CA!

Atrisinājums. Risina līdzīgi kā iepriekšējo uzdevumu:

$$100A + 10B + C = 10A + B + 10B + C + 10C + A$$

$$89A = 10C + B$$

Seko *A* = 1, *B* = 9, *C* = 8

5. Atrodi 4 dažādus ciparus, lai AB + CD = DC + BA! Kāds ir vispārīgs likums, lai šādu piemēru sastādītu?

Atrisinājums. Sastādām vienādojumu

$$10A + B + 10C + D = 10D + C + 10B + A$$

$$9A + 9C = 9D + 9B$$

$$A + C = D + B$$

Te var būt dažādi atrisinājumi. Vismazākā iespējamā skaitļu summa var būt 5, tad četri dažādie cipari ir 1, 4, 2 un 3. Vislielākā skaitļu summa var būt 15, tad cipari A, B, C, D var būt 7, 8, 9, 6. Ir iespējami arī citi atrisinājumi, kur kādu skaitli no 5 līdz 15 var izteikt kā divu viencipara skaitļu summu divos dažādos veidos.

6. Jana, Ina un Andris katrs paņēma vienu kartiņu ar naturālu skaitli, visi skaitļi uz kartiņām bija dažādi. Izrādījās, ka Janas un Inas skaitļu summa ir kvadrāts, arī Janas un Andra skaitļu summa bija kvadrāts, bet Inas un Andra skaitļu summa nebija kvadrāts. Inas un Andra skaitļu summa bija vienāda ar skaitli, ko iegūst kādu kvadrātu palielinot par 5, un vienāda ar skaitli, ko iegūst kādu kvadrātu pamazinot par 6. Kādi bija skaitļi uz bērnu kartiņām?

Atrisinājums. Tikai divu skaitļu kvadrātu starpība ir 11 – tie ir skaitļi 36 un 25.

Pieņemsim, ka bērnu izvēlētie skaitļi ir a, b un c. Tad $a + b = k^2$ ir kāda skaitļa kvadrāts un arī $a + c = t^2$ ir kāda skaitļa kvadrāts, bet $b + c = 30$.

Aplūkosim vairākas šī gadījuma īpašības.

$b + c$ ir pārskaitlis, tāpēc skaitļiem b un c ir vienāda paritāte.

Atņemot vienādojumus $a + b = k^2$ un $a + c = t^2$ vienu no otra iegūsim

$$b - c = k^2 - t^2 \quad \text{jeb} \quad (k - t)(k + t) = b - c$$

Ievērojot, ka skaitļiem b un c ir vienāda paritāte, starpība $b - c$ ir pārskaitlis.

Reizinātāji $(k - t)$ un $(k + t)$ ir dažādi skaitļi un tiem arī ir vienāda paritāte – abi ir pārskaitļi.

Katra no skaitļiem k un t kvadrāti ir divu naturālu skaitļu summa, tāpēc ne k, ne t nevar būt vienāds ar 1.

Izveidosim tabulu, ievērojot, ka b un c summa ir 30 un b nav vienāds ar c, atzīmēsim, kādos reizinātājos var sadalīt starpību b - c:

b	***c***	***b - c***	**reizinātāji**
29	1	28	$2 \cdot 14 = 4 \cdot 7$
28	2	26	$2 \cdot 13$
27	3	24	$2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$
26	4	22	$2 \cdot 11$
25	5	20	$2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$
24	6	18	$2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$
23	7	16	$2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$
22	8	14	$2 \cdot 7$
21	9	12	$2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$
20	10	10	$2 \cdot 5$
19	11	8	$2 \cdot 4$
18	12	6	$2 \cdot 3$
17	13	4	$2 \cdot 2$
16	14	2	$2 \cdot 1$

Saskaņā ar šīs tabulas pirmo rindu

$$b - c = 2 \cdot 14 \quad \text{jeb} \quad (k - t)(k + t) = 2 \cdot 14$$

Iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} k - t = 2 \\ k + t = 14 \end{cases}$$

Saskaitot vienādojumus, iegūst $2k = 16$ un $k = 8$, tad $t = 6$. Seko

$a + b = k^2$ jeb $a + 29 = 64$ un

$a + c = t^2$ jeb $a + 1 = 36$.

Bērni varēja izvilkt kartiņas

$a = 35$; $b = 29$; $c = 1$

Līdzīgi aplūko pārējos gadījumus. (Tabulā iekrāsotie reizinājumi neder.)

Vēl ir divi atrisinājumi:

$a = 11$; $b = 25$; $c = 5$

$a = 2$; $b = 23$; $c = 7$