Punktiņš. (B Grupa) **"**Kukaiņu" aritmētika

3.04. 2020

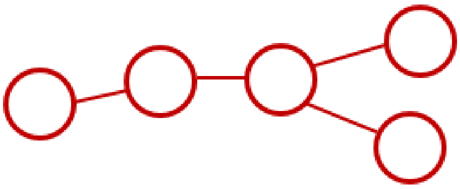
Īsi atrisinājumi un komentāri

"Punktiņa" dalībniece Diāna atsūtīja ļoti labus uzdevumu atrisinājumus. Te izmantošu dažus piemērus no viņas darba. Paldies, Diāna!

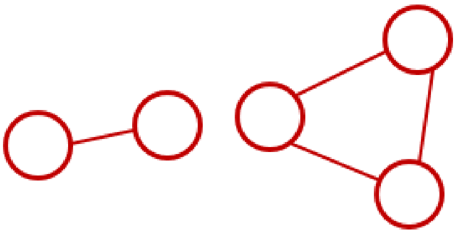
1. "Kukainis" ar radziņiem ir attēlots a) piemērā. Tas sastāv no 5 posmiem (aplīšiem) un 4 savienojumiem. Katrā aplītī jāieraksta viens nepāra skaitlis 1, 3, 5, 7 vai 9. Katram savienojumam pieraksta blakusesošo skaitļu starpību, no lielākā skaitļa atņemot mazāko. Skaitļi jāieraksta tā, lai visas starpības būtu dažādas. Aplūko piemēru!

Pēc tam tāpat risini arī gadījumus b) un c). Vai šajos gadījumos tas ir iespējams? Ja nē, tad pamato, kāpēc nē!

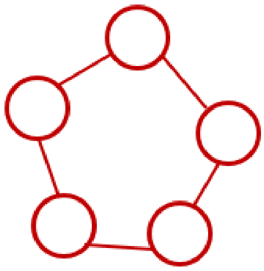
a)



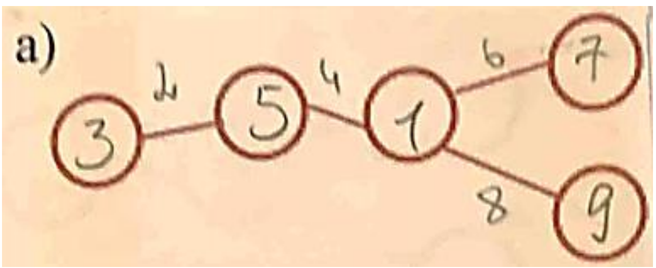
b)



c)



Atrisinājums. Zanes risinājums:



b) gadījums. Visas dažādās starpības, ko var iegūt no dotajiem skaitļiem ir 2, 4, 6 un 8. Pierakstīsim, kā var iegūt katru no starpībām:

$$8 = 9 - 1$$

$$6 = 9 - 3 = 7 - 1$$

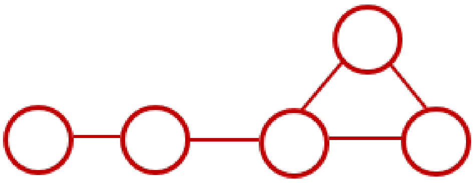
$$4 = 9 - 5 = 7 - 3 = 5 - 1$$

$$2 = 9 - 7 = 7 - 5 = 5 - 3 = 3 - 1$$

Ir četri savienojumi, tāpēc skaitļi 1 un 9 ir jāieraksta savienotajos aplīšos. Ja ieraksta tos divos atsevišķajos aplīšos, tad "trijstūra" aplīšos jāraksta 3, 5 un 7, bet diviem pāriem no tiem ir starpība 2. Ja 1 un 9 ieraksta “trijstūrī”, tad trešais skaitlis, ko tiem pievienot, ir jebkurš no atlikušajiem 3 skaitļiem. Tas nevar būt skaitlis 5, jo 5 veido vienādas starpības ar 1 un 9. Izvēloties skaitli 3, ievērojam, ka 5 un 7, kurus rakstīt divos atsevišķajos aplīšos, veido tādu pašu starpību kā 1 un 3. Līdzīgi var spriest par skaitli 7: $9-7=5-3=2$. Tāpēc doto uzdevumu izpildīt nav iespējams.

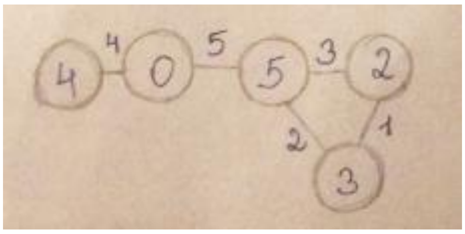
c) gadījums. Dotajam “kukainim” ir 5 savienojumi, bet dotajā uzdevumā ir iespējamas tikai 4 dažādas starpības. Lai kā arī neizvietotu piecus dotos skaitļu, vismaz divas starpības būs vienādas.

2. Dotajam “kukainim” aplīšos jāieraksta pieci dažādi skaitļi no dotajiem sešiem skaitļiem 0; 1; 2; 3; 4; 5 tā, lai starpības pie savienojumiem būtu visi skaitļi 1, 2, 3, 4, 5.

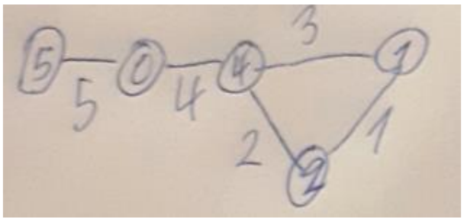


Atrisinājums. Ir iespējami vairāki uzdevuma atrisinājumi. Te daži no tiem:

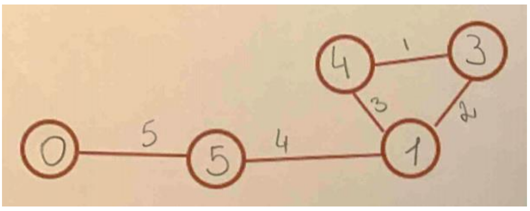
Diānas atrisinājums



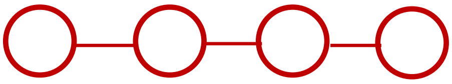
Krisa atrisinājums



Zanes atrisinājums



3. “Sliekai” ir 120 posmi. Katrā no aplīšiem jāieraksta visi secīgi nepāra skaitļi, sākot no 1; 3; 5; …. Skaitļi jāieraksta kaut kādā secībā tā, lai visas starpības būtu dažādas. Piemērā redzama “slieka”, kurai ir 4 posmi.



Atrisinājums. Vispirms aprēķināsim vislielāko skaitli, kāds jāieraksta aplīšos. Ja aplīšu skaits ir n, tad lielākais no nepāra skaitļiem ir

$$2n - 1$$

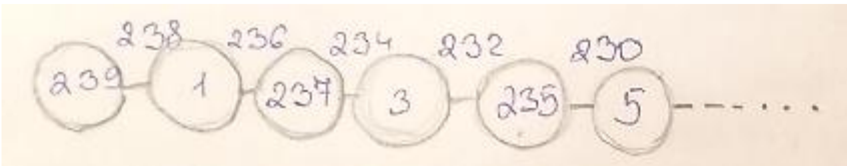
Te

$$2 \cdot 120 - 1 = 239$$

Kopumā būs jāaprēķina 119 starpības, kas ir arī visu pāra skaitļu skaits no 2 līdz 238. Vislielākā starpība ir 239 – 1 = 238. Tās nozīmē, ka skaitļi 1 un 238 jāieraksta blakus esošos aplīšos. Otra lielākā starpība ir 236, ko aprēķina 239 – 3 = 237 – 1. Tad te var veidot divas virknītes

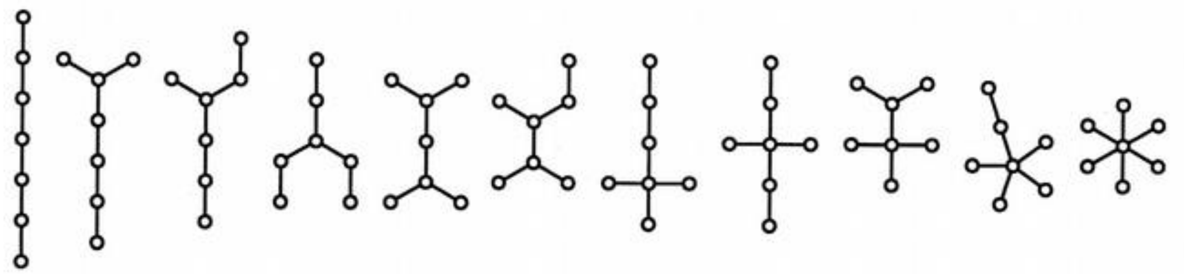
239 – 1 – 237   vai 1 – 239 – 3

Šīs virknītes var turpināt uz vienu vai otru pusi. Vienkāršākais veids ir katrā otrajā aplītī rakstīt secīgus skaitļus 1, 3, 5, 7, …. Un, sasniedzot virknes pēdējo aplīti, virzīties pretējā virzienā, turpinot aplīšos rakstīt secīgos skaitļus 61, 63, 65,… līdz pat otrajā aplītī ierakstam 239. Te Diānas risinājums



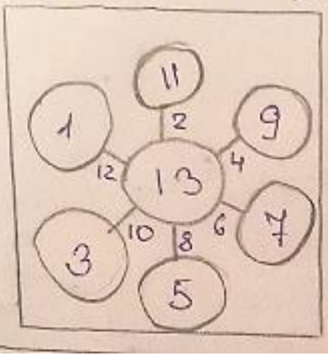
4. Uzzīmē kaut kādas formas "kukaini", kuram ir 7 posmi (jeb aplīši) un izvieto aplīšos visus skaitļus 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13 tā, lai pie savienojumiem visas starpības ir dažādas. Uzzīmē vismaz 4 veidus! Kā tu domā, vai jebkuram "kukainim", kuram ir 7 posmi, var dotos skaitļus ierakstīt prasītajā veidā? Vai vari pateikt, cik daudz dažāda veida 7 posmu kukaiņu pavisam ir?

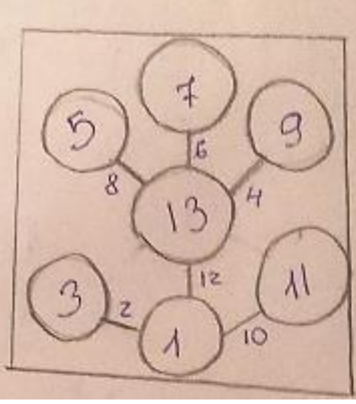
Atrisinājums. Iespējami ir pavisam 11 dažādi 7-posmu "kukaiņu" veidi:

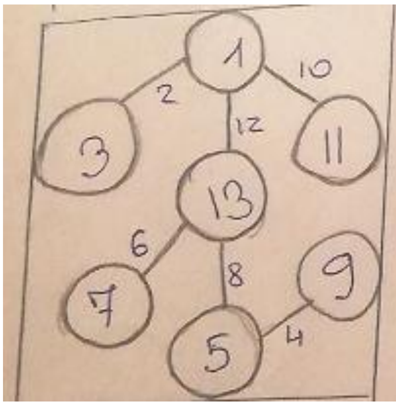


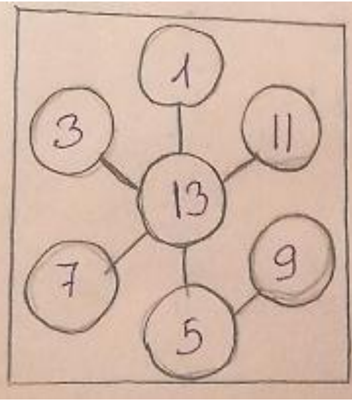
Pirmajai un pēdējai konstrukcijai aplīšos izvietot skaitļus ir ļoti vienkārši. "Slieku" aplūkojām 3. uzdevumā, bet "zvaigznītei" centrā ir jāliek skaitlis 1 vai 13. Katram no šiem "kukaiņiem" vari izdomāt vārdu, bet visas šīs konstrukcijas matemātikā sauc par *kokiem*. Te visi aplīši jeb *mezglu punkti* ir pievienoti kopējai konstrukcijai un kopējais savienojumu skaits (attēlā tās ir svītriņas) ir par viens mazāks nekā aplīšu skaits (konstrukcijā nav noslēgtu ciklu). Jebkuru no attēlā redzamajiem "kukaiņiem" var aizpildīt ar skaitļiem noteiktajā veidā. Te daži piemēri, ko iesūtīja Diāna:

4.uzdevums.


11
2
1
9
12
13
4
6
7
3
10
8
5


7
5
9
6
8
13
4
3
12
11
2
1
10


1
10
2
12
3
11
13
6
8
9
7
5
4


1
3
11
13
7
9
5

Punktiņa uzdevumi Lieldienām (B Grupa)

9.04.2020

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Lieldienu zaķu zemē Fidelandē ir naudas vienība *kraks*. Naudas zīmes ir 1, 3, 5, 10 un 23 kraku vērtībā. 23 kraku naudas zīmi samainīja 10 naudas zīmēs. Pierādi, ka vismaz viena no šīm naudas zīmēm ir ar nomināciju 10 kraki!

Atrisinājums. Apzīmēsim naudas zīmju skaitus sekojoši – ir m nauda zīmes ar vērtību 1; n naudas zīmes ar vērtību 3 un k naudas zīmes ar vērtību 5. Pieņemsim, ka nav lietotas naudas zīmes ar vērtību 10. Tad var sastādīt sekojošas vienādības:

$$1m + 3n + 5k = 23$$

$$m + n + k = 10$$

Maksimālā iespējamā k vērtība ir 4, tad

$$\begin{cases} m + 3n = 3 \\ m + n = 6 \end{cases}; \implies 2n = -3$$

Šai situācijai risinājuma nav. Ja $k = 3$

$$\begin{cases} m + 3n = 8 \\ m + n = 7 \end{cases}; \implies 2n = 1$$

Nav risinājuma veselos skaitļos. Ja $k = 2$

$$\begin{cases} m + 3n = 13 \\ m + n = 8 \end{cases}; \implies 2n = 5$$

Nav risinājuma veselos skaitļos. Ja $k = 1$

$$\begin{cases} m + 3n = 18 \\ m + n = 9 \end{cases}; \implies 2n = 9$$

Atliek izveidot naudas zīmju summu no 1 un 3 krakiem. Nevar būt tikai zīmes ar nomināciju 3, jo 23 nedalās ar 3.

$$\begin{cases} m + 3n = 23 \\ m + n = 10 \end{cases}; \implies 2n = 13$$

Arī tagad nav risinājuma veselos skaitļos. Nevar būt arī tikai kraki ar vērtību 1, jo tad vajadzētu 23 naudas zīmes. Tāpēc pieņēmums, ka 10 kraku šajā komplektā nav, ir aplams. Var būt

$$23 = 10 + 2 \cdot 3 + 7 \cdot 1$$

2. Zaķis Fibis groziņā ielika 9 krāsainas olas, vismaz viena no tām bija zila. Zaķis Fibis pastāstīja Zaķim Tibim, ka:

a) ja Tibis no groziņa paņems jebkuras 5 olas, starp tām nebūs vairāk kā triju krāsu olas;

b) bet, ja ņems jebkuras 4 olas, tad ne vairāk kā 3 olas būs vienā krāsā.

Cik no groziņā ieliktajām olām ir nokrāsotas zilā krāsā?

Atrisinājums. Apgalvojums a) nosaka, ka visas olas nokrāsotas ne vairāk kā 3 krāsās. Ja būtu vismaz 4 krāsas, tad var gadīties, ka, ņemot no groziņa 5 olas, četras olas būtu katra citā krāsā. Ja pieņemsim, ka ir vismaz 4 olas, kas nokrāsotas vienā krāsā, tad nebūtu izpildīts nosacījums b), ka ne vairāk kā 3 olas ir vienā krāsā. Secinām - ja tieši 3 olas ir vienā krāsā un izmantotas 3 krāsas, tad 3 olas ir zilā krāsā, 3 olas otrā krāsā (varbūt sarkanā), 3 olas ir trešajā krāsā (varbūt zaļas).

3. Lieldienu zaķis Tomam atnesa diezgan daudz konfekšu. Toms negribēja tās visas apēst uzreiz, tāpēc salika tās visas 16 kastītēs. Tajās bija attiecīgi 1; 2; 3; ...; 15; 16 konfektes. Toms nolēma, ka katru dienu izvēlēsies dažas kastītes un no tām visām apēdīs vienādu daudzumu konfekšu. Zaķis Zibis padomāja, vai Toms var šādā veidā apēst visas konfektes piecās dienās?

Atrisinājums. Toms konfektes sadalīja 16 kastītēs:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Viņš izvēlējās kastītes, kurās bija 9 un vairāk konfektes un no katras kastītes apēda 8 konfektes. Tagad konfekšu skaits kastītēs bija sekojošs

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8

Otrā dienā Toms izvēlējās kastītes, kurās bija vismaz 4 konfektes un no katras apēda tieši 3:

1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4

Trešajā dienā viņš izvēlējās kastītes, kurās bija vismaz 3 konfektes un apēda 2 no katras:

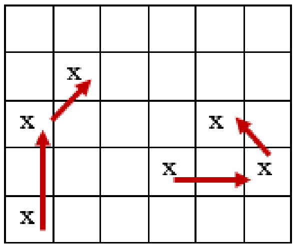
1	2	1	2
1	2	1	2
1	2	1	2
1	2	1	2

Tagad, domājams, ir skaidrs, ko Toms darīja ceturtajā un piektajā dienā.

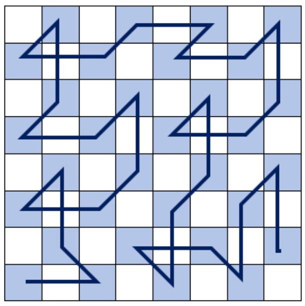
Piezīme. Ir iespējami arī cita veida rīcības plāni, kā apēst konfektes 5 dienās, ievērojot uzdevuma nosacījumus.

4. Ir zināms, ka zaķi skrien cilpām vien, cilpām vien. Zaķis Fiksis cilpoja pa rūtiņu kvadrātu. Vienu lēcienu viņš izdarīja, pārlecot pāri kaimiņu rūtiņai, ar kuru dotajai rūtiņai bija kopīga mala, bet otru lēcienu viņš izdarīja uz rūtiņu, kurai ar šo rūtiņu bija tikai kopīgs stūris (skaties piemēru!). Tā viņš cilpoja taisni, slīpi, taisni, slīpi. Katrā rūtiņā Fiksis ielēca ne vairāk kā vienu reizi un katrā rūtiņā, kurā viņš bijis, viņš atstāja konfekti. Kāds ir lielākais konfekšu skaits, ko Fiksis atstāja rūtiņu kvadrātā, ja kvadrāta izmērs ir 8 x 8 rūtiņas, un Fiksis sāka cilpot no kvadrāta apakšējās kreisās rūtiņas?

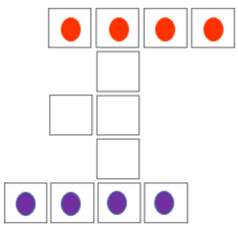
Te parādīti divu iespējamo lēcienu varianti:



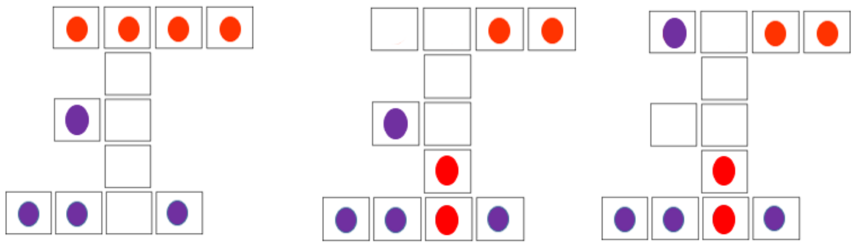
Atrisinājums. Izpētīsim zaķa lēcienus. Ja kvadrātu 8 x 8 rūtiņas iekrāso kā šaha dēlīti, var ievērot, ka zaķis pārvietojas tikai pa vienas krāsas rūtiņām, pa melnajām. Tad maksimālais konfekšu skaits, ko viņš var atstāt katrā apmeklētajā rūtiņā, ir 32. To izdarīt viņš var:



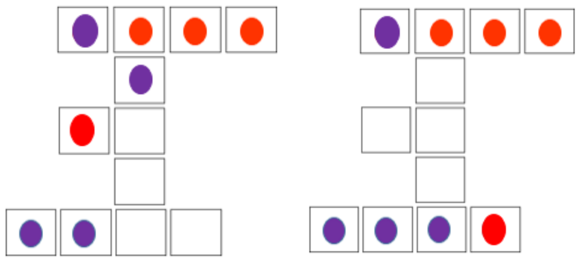
5. Zaķis Zibis krāsoja olas sīpolu mizās, bet zaķis Tibis olas krāsoja melleņu ievārījumā. Zibim izdevās marmorainas brūnīgas olas, bet Tibim izdevās iegūt mākoņaini violetas olas. Zaķi Tev uzdod šādu uzdevumu (skaties attēlu). Augšējā rindā novietotas četras sīpolu krāsas olas, bet apakšējā rindā 4 melleņu krāsas olas. Ar ripināšanas palīdzību olas ir jāsamaina vietām – apakšējā ar augšējo rindu. Vienā laika momentā drīkst pārvelt tieši vienu olu uz tukšo blakus kvadrātu.



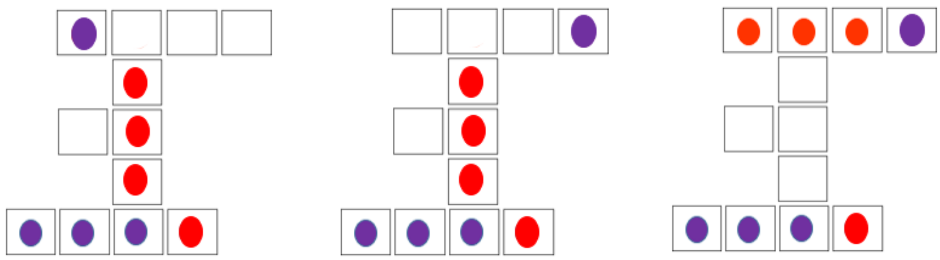
Atrisinājums. Risinājums principā sastāv no divām gājienu kombinācijām. Vispirms pārvietosim violeto olu



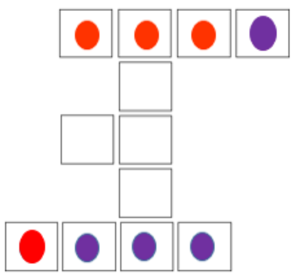
Līdzīgi arī brūno olu pārvietosim uz leju



Tagad pārvietosim violeto olu augšā uz labējo pozīciju



Līdzīgi pārvieto arī apakšējo brūno olu pa kreisi



Tad veic līdzīgus gājienus kā sākumā, līdz visas olas pārvietotas.

Punktiņš. (B Grupa) Lielākais kopīgais dalītājs un mazākais kopīgais dalāmais
24.04.2020

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Trīs auklas garumā 448, 504 un 616 dm ir jāsagriež vienāda garuma aukliņās, kuru garums arī ir izteikts veselos dm. Kāds būs vismazākais aukliņu skaits?

Atrisinājums. Te jāatrod trīs doto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs – visgarākais mērs, kādā var sagriezt visas auklas vienādos gabalos. Ievērojot, ka skaitļus var sadalīt sekojošos reizinātājos

$$448 = 8 \cdot 7 \cdot 8; \quad 504 = 8 \cdot 7 \cdot 9; \quad 616 = 8 \cdot 7 \cdot 11,$$

auklas var sagriezt 56 dm garos gabalos. Auklu kopīgais skaits ir 8 + 9 + 11 = 28.

2. Emīlija uz papīra lapas līmē krāsainus vienāda izmēra kvadrātus. Lapas izmērs ir 72 x 90 cm. Kvadrāti pilnībā noklāj lapu un nekur nepārklājas. Kāds var būt vislielākais iespējamais kvadrāta izmērs?

Atrisinājums. Skaitļus sadalām reizinātājos $72 = 18 \cdot 4$; $90 = 18 \cdot 5$. Krāsaino kvadrātu izmērs ir 18 x 18 cm. Lapu var pārklāt ar $4 \cdot 5 = 20$ šādiem kvadrātiem.

3. Notika četru radio vadāmu auto modeļu sacensības trekā. Auto modelis A trekam apkārt var apbraukt 24 sekundēs, modelis B 28, modelis C 32, bet auto modelis D 40 sekundēs. Pēc 3 minūtēm modelis B sabojājās un izstājās no sacensībām.

   1) Pēc cik ilga laika modeļi A, C un D atkal satiksies starta pozīcijā, ja visi modeļi vienlaikus uzsāka braucienu?

   2) Cik pilnus apļus bija veicis katrs no šiem modeļiem līdz satikšanās brīdim starta pozīcijā?

   3) Vai modelim B gadījās tāda situācija, ka ar kādu no modeļiem A, C vai D tas bija vienlaikus nonācis starta pozīcijā?

Atrisinājums. 1) Pēc kāda laika modeļi A, C un D būs veikuši vairākus apļus, līdz tie atkal satiksies starta pozīcijā. Aprēķināsim, cik ilgs laiks paies, tas ir, meklēsim skaitļu 24, 32 un 40 mazāko kopīgo dalāmo. Vispirms katru skaitli sadalīsim pirmreizinātājos

$$24 = 2^3 \cdot 3; \quad 32 = 2^5; \quad 40 = 2^3 \cdot 5$$

Šo skaitļu mazākais kopīgais dalāmais ir $2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480$. Modeļi vienlaikus satiksies pēc 480 sekundēm jeb 8 minūtēm.

2) Modelis A būs veicis 20 apļus, modelis C 15 apļus, bet D 12 apļus.

3) Lai noteiktu, vai modelim B gadījies vienlaikus atkal būt pie starta ar kādu citu modeli, jāaplūko skaitļa 28 sadalījums pirmskaitļu reizinātājos $28 = 2^2 \cdot 7$. Skaitļu 28 un 24 mazākais kopīgais dalāmais ir 168. Modeļi A un B satikās pēc 168 sekundēm jeb 2 minūtēm un 48 sekundēm. Ar pārējiem modeļiem modelis B varētu satikties vēlāk nekā pēc 3 minūtēm, tātad šajā braucienā pie starta nesatikās.

4. Vai pastāv tādi naturāli skaitļi x, y un z, ka x un y lielākais kopīgais dalītājs ir 104, y un z lielākais kopīgais dalītājs ir 106 un x un z lielākais kopīgais dalītājs ir 108?

Atrisinājums. Saskaņā ar doto, visi trīs meklējamie skaitļi dalās ar 4, jo x un y dalās ar 4 tāpēc, ka 104 dalās ar 4, un x un z dalās ar 4, jo 108 dalās ar 4. Tāpēc skaitlis 106 nevar būt skaitļu y un z lielākais kopīgais dalītājs, jo 106 nedalās ar 4. Nav tādi naturāli skaitļi, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem.

5. No 9 dažādiem nenulles cipariem, katru izmantojot tieši vienu reizi, izveidoti 5 naturāli skaitļi. Mazākais no tiem ir visu četru pārējo skaitļu dalītājs. Kāds var būt šis mazākais skaitlis? Vai iespējami vairāki varianti?

Atrisinājums. Te iespējami dažādi atrisinājumi. Triviālais atrisinājums ir, ja mazākais skaitlis ir 1, jo jebkurš skaitlis dalās ar 1. Bet ir arī citi atrisinājumi.

Mazākais no pieciem skaitļiem nevar būt pāra skaitlis. No dotajiem cipariem nevar izveidot piecus pāra skaitļus, jo doti tikai 4 pāra skaitļu cipari (2, 4, 6, 8). Tad mazākais skaitlis var būt 3. Izveidojam skaitļu izlasi

3; 12; 45; 69; 78

Katrs no skaitļiem dalās ar 3, jo to ciparu summas dalās ar 3. Citas skaitļu izlases var iegūt, ja dotajiem skaitļiem ciparus maina vietām. Var būt arī, piemēram, šādas izlases:

3; 6; 21; 54; 798 vai

3; 6; 9; 87; 5142

Principiāli citu skaitļu izlasi var izveidot no skaitļiem, kas dalās ar 9, piemēram,

9; 18; 27; 45; 63

Šo skaitļu ciparu summa dalās ar 9.

Mazākais no skaitļiem, kas dala visus četrus atlikušos skaitļus, nevar būt divciparu skaitlis (ir tikai 9 cipari, nevar izveidot piecus skaitļus, kuri visi satur ne mazāk kā divus ciparus).

Aplūkosim vēl dažus citus variantus, kur mazākais no pieciem skaitļiem var būt visu pārējo skaitļu dalītājs. Mazākais no pieciem skaitļiem nevar būt 5 (paskaidro, kāpēc!). Mazākais no skaitļiem nevar būt arī 7. Ja skaitlis 7 būtu mazākais no pieciem skaitļiem, tad pārējie četri būtu divciparu skaitļi (no 8 cipariem var izveidot 4 divciparu skaitļus. Ja kāds no četriem skaitļiem saturētu vismaz 3 ciparus, tad kādam citam skaitlim būtu mazāk par diviem cipariem, bet ar 7 nedalās neviens cits viencipara skaitlis.). No cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 nevar izveidot četrus divciparu skaitļus, kuri dalās ar 7. Cipari 3, 5 un 6 veido tikai trīs skaitļus 35, 56 un 63, kuri dalās ar 7. Katrs no cipariem 3, 5 un 6 ietilpst divos no minētajiem. Ja vienu no šiem trim skaitļiem iekļaus to skaitļu izlasē, kas dalās ar 7, tad viens no cipariem paliek lieks. Piemēram, izvēloties skaitli 63 nevar izveidot ne 35, ne 56, tāpēc no atlikušajiem cipariem varēs izveidot ne vairāk kā divus divciparu skaitļus, kas dalās ar 7.

6. Apskatām naturālos skaitļus no 1 līdz 50 ieskaitot. Kādu lielāko daudzumu no tiem var izvēlēties tā, lai nekādi divi izvēlētie skaitļi nedalītos viens ar otru un katriem diviem izvēlētajiem skaitļiem lielākais kopīgais dalītājs būtu lielāks par 1?

Atrisinājuma ideja.

1) Aplūko visus 25 pārskaitļus, jo tiem ir vismazākais kopīgais dalītājs – skaitlis 2.

2) Visi pārskaitļi no 2 līdz 24 ir kāda pārskaitļa kas lielāks par 25, dalītājs.
3) Izvēlas visus pārskaitļus, kas lielāki par 25. To skaits ir 14.