Punktiņš. (B Grupa) Teksta uzdevumi

7.02.2020

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Alise domāja: “Pirms 3 stundām šīsdienas pagājušais laiks bija sešas astotās daļas no šī brīža šīsdienas atlikušā laika. Cik stundas šodien vēl atlikušas?” Cik rāda Alises pulkstenis?

Atrisinājums. Diennaktī ir 24 stundas. Apzīmēsim laika nogriezni “no šī brīža atlikušais dienas laiks” ar *x*. Tad var sastādīt vienādojumu:

$$\frac{6}{8}x + x + 3 = 24 \quad \text{jeb}$$

$$\frac{3}{4}x + x = 21,$$

no kā aprēķinām, ka $x = 12$. Alises pulkstenis rāda seši pēcpusdienā jeb 18.00.

Piezīme. Uzzīmējot laika nogriezni, uzdevumā aprakstītais gadījums ir uzskatāmāks.

2. Veikalā ir bilžu domino – viena kastīte maksā 1.20 eiro. Atlaižu laikā rotaļlietām un spēlēm samazināja cenu, bet ne vairāk par pusi. Kastītes ar domino pārdeva par 11.52 eiro. Kāda varēja būt jaunā domino kastīšu cena un cik kastītes pārdeva?

Atrisinājums. Jaunā domino kastītes cena ir ne mazāka par 60 centiem un mazāka par 120 centiem. Sadalīsim iegūto summu pirmreizinātājos:

$$1152 = 2^7 \cdot 3^2$$

Viens no skaitļa 1152 dalītājiem būs ne mazāks par 60. Jāatrod visi tādi pirmreizinātāju reizinājumi, kas atbilst minētajai prasībai. Tie ir skaitļi 64; 72 un 96. Par šādu cenu varēja būt pārdotas 18, 16 vai 12 kastītes atbilstoši.

3. Susuriņš kastītēs salicis mellenes un avenes – vienā kastītē ir 20 mellenes vai 15 avenes. Piekto daļu no visām ogām, tas ir, 2 kastītes viņš atdeva Snorkei, bet pusi no visām atlikušajām ogām viņš atdeva Zebiekstes kundzei, tas ir, 3 kastītes. Cik ogu iesākumā bija Susuriņam?

Atrisinājums. Mēģināsim noskaidrot, cik ogu varēja būt 3 kastītēs

$$3 \cdot 20 = 60$$

$$2 \cdot 20 + 15 = 55$$

$$20 + 2 \cdot 15 = 50$$

$$3 \cdot 15 = 45$$

Ja Susuriņš atdeva pusi no atlikušajām ogām, tad pirms tam viņam bija vai nu 120, vai 110, vai 100, vai 90 ogas. Tas ir 4/5 daļas no ogām, kas viņam bija sākumā. Aprēķinām, ka sākumā viņam varēja būt $120 : \frac{4}{5} = 150$ vai $100 : \frac{4}{5} = 125$ ogas (abi pārējie skaitļi nedalās ar 4). Pirmajā gadījumā viena piektā daļa no ogām ir 30, bet otrajā gadījumā – 25. Divas kastītes, kurās kopumā ir 25 ogas, nav nokomplektētas. Tātad Susuriņam bija 150 ogas. Divas kastītes ar avenēm viņš atdeva Snorkei, bet Zebiekstes kundzei iedeva 3 kastītes ar mellenēm.

4. Susuriņš ar motorlaivu brauc 3 stundas lejup pa upi no Lielā Ozola līdz Dambim, bet atpakaļ 5 stundas. Ezītis iekrita upē pie Lielā Ozola un ļāvās, lai straume viņu nes. Pēc cik ilga laika viņš būs pie Dambja?

Atrisinājums. Uzdevumā jāatrod upes straumes ātrums, to apzīmēsim ar v_s. Susuriņa laivas ātrumu apzīmēsim ar v_l. Braucot lejup pa straumi, upes straume paātrina kustību, bet, braucot otrā virzienā, tā pretdarbojas. Sastādīsim tabulu, upes posmu no Lielā Ozola līdz Dambim apzīmējot ar 1 vienību:

	Lejup pa upi	Augšup pa upi
Upes posms	1 vienība	1 vienība
Susuriņa brauciena ātrums	$v_l + v_s$	$v_l - v_s$
Ceļā pavadītais laiks	3 stundas	5 stundas

Izmantojot formulu “ceļš ir ātrums reiz laiks”, sastādām vienādojumu:

$$v_l + v_s = \frac{1}{3};$$
$$v_l - v_s = \frac{1}{5};$$
$$\frac{1}{3} - v_s = \frac{1}{5} + v_s$$

Aprēķinām, ka straumes ātrums ir 1/15 daļa no visa upes posma stundā. Straume Ezīti no Lielā Ozola līdz Dambim nesīs 15 stundas.

5. Stacija “Nora” atrodas 12 km attālumā no Susuriņa mājām. Viņš iziet no mājas pretī Zebiekstes kundzei, kura nupat iziet no stacijas. Susuriņš iet ar ātrumu 6 km/h, bet Zebiekstes kundze iet ar ātrumu 3 km/h. Līdz ar Susuriņu no mājas ir izskrējis arī viņa suns, kurš skrien pretī Zebiekstes kundzei, tad atpakaļ pie saimnieka un visu laiku skraida no viena pie otra. Cik kilometrus būs noskrējis suns līdz Susuriņš un Zebiekstes kundze satiksies, ja suns skrien ar ātrumu 15 km/h?

Atrisinājums. Aprēķināsim, pēc cik ilga laika satiksies Susuriņš un Zebiekstes kundze. Vispirms noteiksim, kur abi draugi satikās. Pieņemsim, ka satikšanās brīdī Zebiekstes kundze būs veikusi *x* km, bet Susuriņš 12 – *x* km. Izveidosim tabulu:

	Zebiekstes kundze	Susuriņš
Ceļa posms	x km	$12 - x$ km
Soļošanas ātrums	3 km/h	6 km/h
Ceļā pavadītais laiks	$\frac{x}{3}$ stundas	$\frac{12-x}{6}$ stundas

Abi draugi satikās vienlaikus, tāpēc

$$\frac{x}{3} = \frac{12 - x}{6}$$

Aprēķinām, ka $x = 4$ km. Tos Zebiekstes kundze bija veikusi vienā stundā un 20 minūtēs. Tātad Susuriņa suns bija skrējis 1 stundu un 20 minūtes ar ātrumu 15 km stundā un bija noskrējis 20 km.

6. Ostas krodziņā starp Pirātiem un Bandītiem notika kautiņš, kurā cieta visi kaušļi. Trīs ceturtdaļām kaušļu tika izsists zobs, divām trešdaļām kaušļu tika saplēstas drēbes, bet piecām sestdaļām tika uzsista zila acs. Kādai daļai no kaušļiem notika visas nelaimes?

Atrisinājums. Ievērosim, ka kaušļu skaits dalās ar 12. Vienkāršības pēc pieņemsim, ka bija tieši 12 kaušļi. Seko 9 kaušļiem tika izsists zobs, 8 kaušļiem – saplēstas drēbes, bet 10 kaušļiem – zila acs. No tā var pateikt, ka diviem kaušļiem nebija zila acs, 3 kaušļiem netika izsists zobs un 4 kaušļiem netika saplēstas drēbes. Ja bija tikai divi, kuriem nebija zila acs, tad vismaz 7 kaušļiem bija gan zila acs, gan izsists zobs, jo $9 - 2 = 7$, bet ne vairāk kā 5 kaušļiem varēja būt notikusi viena no šīm nelaimēm. No tā seko, ka visas 3 nelaimes notika vismaz $8 - 5 = 3$ kaušļiem. No otras puses, visas 3 nelaimes nevarēja notikt vairāk kā 7 kaušļiem, jo visi kaušļi bija cietuši.

Vispārinot atrisinājumu – bija $12n$ kaušļi, no tiem visas trīs nelaimes notika vismaz ceturtajai daļai no viņiem, bet ne vairāk kā 7/12 no visiem kaušļiem.

Piezīme. Situāciju vieglāk izprast, konstruējot diagrammu, piemēram, 12 rūtiņu joslu.

Punktiņš. (B Grupa) Cik tas ir “vidēji”?

14.02.2020

Īsi atrisinājumi un komentāri

Piezīme: Daļā no uzdevumu atrisinājumiem var izmantot sekojošas formulas:

n skaitļu vidējais aritmētiskais*:*

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} = A$$

Ja A ir n skaitļu vidējais aritmētiskais, tad šo skaitļu kopējā summa ir:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = nA$$

1. Artūra vidējā atzīme par četriem matemātikas kontroldarbiem ir 6,5. Šajā pusgadā viņam jāraksta vēl 6 kontroldarbi. Kādai ir jābūt šo sešu kontroldarbu vidējai atzīmei, lai gala atzīme būtu 8?

Atrisinājums. Lai Artūram pusgada vidējā atzīme būtu 8, tad par 10 kontroldarbiem kopumā jānopelna 80 punkti. Viņš jau ir nopelnījis $4 \cdot 6{,}5 = 26$ punktus. Vēl jānopelna 54 punkti sešos kontroldarbos, tātad vidēji 9 punkti par katru atlikušo kontroldarbu.

2. Septiņu dažādu naturālu skaitļu vidējais aritmētiskais ir 21. Kāds var būt lielākais šo skaitļu daudzums, kuri lielāki par vidējo aritmētisko?

Atrisinājums. Septiņu naturālo skaitļu summa ir $7 \cdot 21 = 147$. No šiem tādu skaitļu skaits, kas lielāki par vidējo aritmētisko, var būt ne vairāk kā 6. Ja aplūkojam dažādos mazākos iespējamos naturālos skaitļus, kas lielāki par 21, tie ir skaitļi no 22 līdz 27, to summa ir 147. Līdz ar to seši skaitļi neapmierina uzdevuma nosacījumus. Pieci skaitļi, kas lielāki par 21, šajā skaitļu kopā var būt. Piemēram, 13, 14, 22, 23, 24, 25, 26.

3. Fizikas studentu klubā bija 12 biedri. Viņu IQ koeficientu vidējais aritmētiskais lielums bija 150. Klubā tika uzņemti 4 jauni biedri, bet viņu vidējais aritmētiskais IQ bija vien 120. Daži no kluba biedriem apvainojās un pameta klubu. Izrādījās, ka vidējais IQ līmenis klubā nepamazinājās. Kāds bija vidējais aritmētiskais IQ koeficients tiem, kuri pameta klubu?

Atrisinājums. Aprēķināsim kluba biedru vidējo aritmētisko IQ pēc 4 jauno biedru uzņemšanas:

$$\frac{12 \cdot 150 + 4 \cdot 120}{16} = 142{,}5$$

Ja daži kluba biedri izstājās un no tā vidējais aritmētiskais kluba biedru IQ koeficients nemainījās, tad aizgājušo biedru vidējais aritmētiskai IQ koeficients bija 142,5.

4. Konfekšu fabrikā iepako kastītes, kurās ir 1, 5, 10 vai 25 marcipāna konfektes. Firmas veikalā ir kastītes ar šīm konfektēm. Veikalā šo konfekšu vidējais aritmētiskais skaits kastītēs ir 20. Ja veikalā būtu vēl viena kastīte ar 25 konfektēm, tad konfekšu vidējais aritmētiskais skaits kastītēs būtu 21. Cik un kādas kastītes varētu būt veikalā?

Atrisinājums. Veikalā kopumā ir x dotā veida kastītes ar marcipāna konfektēm. Konfekšu kopējais skaits ir $20x$. Ja veikalā būtu vēl viena kastīte ar marcipāna konfektēm, tad kastīšu skaits būtu $x + 1$, bet konfekšu skaits $20x + 25$. Sastādām vienādojumu, ievērojot, ka ar papildus kastīti vidējais konfekšu skaits kastītēs ir 21, un atrisinām to:

$$21 \cdot (x + 1) = 20x + 25$$

$$x = 25 - 21 = 4$$

Aprēķinājām, ka veikalā ir 4 marcipāna konfekšu kastītes un konfekšu kopējais skaits tajās ir 80. Atliek noskaidrot, kāda veida kastītes ir veikalā. Skaidrs, ka nav nevienas tādas kastītes, kurā ir 1 konfekte (pamato, kāpēc!). Nevar būt tikai tādas kastītes, kurās ir 10 konfektes (jo tad būtu 8 kastītes). Tad to kastīšu skaits, kur konfekšu skaits beidzas ar 5, ir pāra skaitā. Līdzīgi spriežot, atrodam, ka veikalā ir 1 kastīte ar 5 konfektēm un 3 kastītes ar 25 konfektēm. (Papildini spriedumu, lai būtu aplūkoti visi gadījumi!)

5. Dārzkopības izmēģinājumu dārzā novāktas 9 dažādas ābolu šķirnes un katra šķirne iepakota atsevišķā kastē. Kastu svars ir 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27 kilogrami. Vai pietiks ar 4 ratiņiem, lai kastes nogādātu noliktavā, ja ratiņos drīkst pārvest ne vairāk kā 52 kilogramus?

Atrisinājums. Ja ir 4 ratiņi, ar kuriem jāpārved 9 kastes, tad vismaz vienos ratiņos jāpārved 3 kastes, jo, 9 dalot ar 4, rodas atlikums. Aplūkosim 3 vieglākās kastes, to kopējais svars ir

$19 + 20 + 21 = 60 > 52$ kilogrami. Tātad ar 4 ratiņiem nepietiks, lai vienlaikus pārvestu kastes uz noliktavu.

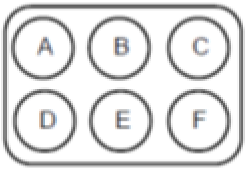
6. Ir doti septiņi dažāda garuma stienīši, kuru garums ir izsakāms veselos centimetros. Stienīšu vidējais aritmētiskais garums ir 7 cm. Vai var gadīties tā, ka ne no kādiem 3 stienīšiem nevar konstruēt trijstūri?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka ir tādi dažāda garuma stienīši, kuru vidējais aritmētiskais garums ir 7 cm un ne no kādiem trim stienīšiem nevar konstruēt trijstūri. Aplūkosim tādu pēc iespējas īsāko stienīšu komplektu, no kura nevarēs izvēlēties 3 stienīšus trijstūra konstruēšanai. Lai konstruētu trijstūri, nepieciešams, lai divu īsāko malu summa ir garāka par trijstūra garāko malu. Izvēlēsimies stienīšus ar tādu garumu, lai minētā īpašība nav izpildīta: 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21. Šo stienīšu kopējais garums ir 53 cm. Tas ir vairāk nekā uzdevumā aprakstīto stienīšu kopējais garums, kas, saskaņā ar doto, ir 49 cm. Iegūtā pretruna liecina, ka mūsu pieņēmums ir aplams.

Punktiņš. (B Grupa) Seifi un kodi
21.02.2020

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Zagļi ir iecerējuši ieiet kādā namā. Pie durvīm ir kodu plāksnīte. Ir jānoskaidro - cik dažādi varianti iespējami, ja vienlaikus jānospiež divi taustiņi? Trīs taustiņi?



Atrisinājums. Lai noskaidrotu, cik ir tādi varianti, lai vienlaikus nospiesti abi taustiņi, ir jāaprēķina burtu pāru skaits. Katrs burts ietilpst piecos pāros ar citiem burtiem, bet tādā gadījumā katrs pāris ir uzskaitīts divas reizes. Tāpēc visu pāru skaitu var aprēķināt:

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Lai vienlaikus nospiestu 3 taustiņus, jāveido burtu kombinācijas no trim burtiem. Pie katra burtu pāra jāpieliek viens no atlikušajiem 4 burtiem, kas veidos kombinācijas no trim burtiem. Ja šādi aplūko visus 15 burtu pārus, tad katra no trīs burtu kombinācijām ir apskatīta 3 reizes. Tad trīs burtu kombināciju skaitu var aprēķināt:

$$\frac{15 \cdot 4}{3} = 20$$

2. Seifa kods ir 4 – ciparu skaitlis, kas dalās gan ar 8, gan 9. Koda pirmie divi cipari, kā arī pēdējie divi ir izveidoti no secīgiem cipariem. Mēģini noskaidrot kodu!

Atrisinājums. Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējie 3 cipari veido trīsciparu skaitli, kurš dalās ar 8. Koda pēdējie divi cipari veido pārskaitli no diviem secīgiem cipariem. Apskatām secīgo ciparu pārus: (0; 1), (1; 2), (2; 3), (3; 4), (4; 5); (5; 6); (6; 7), (7; 8), (8; 9). Kopumā ir 9 pāri, tātad no tiem var izveidot 9 dažādus divciparu pārskaitļus, kas būs koda pēdējie divi cipari. Otrs skaitļu pāris ir jāatrod tāds, lai koda ciparu summa dalās ar 9. Pakāpeniski sākam pārbaudīt katru skaitļu pāri. Ievērosim, ka ciparu summai abos skaitļu pāros kopumā ir jābūt 18, jo katra skaitļu pāra summa ir nepāra skaitlis.

No pāriem (0; 1) un (8; 9) var izveidot 3 kodus: 8910; 9810; 1098. Katrs no šiem skaitļiem dalās ar 9, bet nedalās ar 8.

Apskatām pārus (1; 2) un (7; 8). Var izveidot 4 kodus: 7812; 8712; 1278; 2178. No šiem skaitļiem tikai viens skaitlis dalās ar 8. Kods varētu būt 8712.

Līdzīgi atrodam arī citus iespējamos četrciparu kodus. Iespējamie kodi ir

8712; 2376; 7632; 3456.

3. Seifa atslēga sastāv no 3 cipariem, katrs no kuriem var būt no 0 līdz 7. Seifs ir sabojāts un tādēļ tas atveras tad, ja vismaz 2 cipari sakrīt ar pareizajiem. Kāds ir mazākais ciparu kombināciju skaits, kas jāizmēģina, lai noteikti atvērtu seifu?

Atrisinājums. Pietiek atrast divus pareizos koda ciparus. Pieņemsim, ka tie ir zināmi, taču nav noteikts, kurās koda pozīcijās tie jāieraksta – kā pirmais un otrais, vai kā pirmais un trešais, vai kā otrais un trešais cipari. Ja abi cipari vienādi, tad ir 3 izvietojuma varianti, bet, ja abi cipari dažādi – seši izvietojuma varianti, jo ir svarīga arī abu ciparu secība. Tad kopumā visi varianti, kā pārbaudīt sešus dotos ciparus ir:

$$3 \cdot 6 + 6 \cdot 15 = 108$$

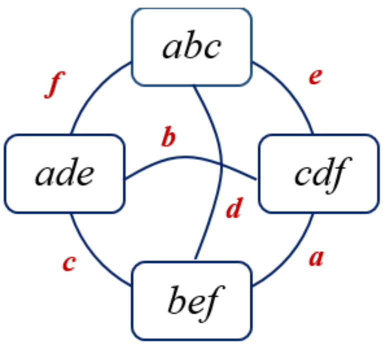
108 varianti, jo no 6 cipariem var izveidot 15 ciparu pārus (skat. 1. uzdevumu).

4. Mafijas krusttēvs pieķēris 4 savus gangsterus, kuri iespējams nozaguši naudu no seifa. Maksis, teica, ka tas bijis Ruperts, bet Ruperts teica, ka naudu paņēmis Antons. Antons atbildēja, ka Ruperts melo, bet Džeks teica, ka neko nav ņēmis. Tikai viens no viņiem teicis taisnību. Kurš paņēma naudu no seifa?

Atrisinājums. Ja Džeks ir teicis patiesību, tad Ruperts melo un Antonam ir taisnība. Tad ir divi gangsteri, kas teikuši patiesību, bet tas neatbilst uzdevuma nosacījumiem. Tātad Džeks melo un **ir** paņēmis naudu. Vienīgais, kurš teicis patiesību ir Antons.

5. Mafijas krusttēvam radusies sarežģīta problēma. Viņš grib uzticēt sava seifa kodu četriem saviem tuvākajiem palīgiem, bet tā, lai neviens no viņiem vienatnē, bet arī nekādi divi no viņiem divatā nevarētu zināt pilnu kodu, bet kodu zinātu jebkuri 3 palīgi. Kāds varētu būt visīsākais koda garums?

Atbilde. Krusttēvs nodomu var izpildīt, ja izvēlas 6-ciparu kodu un katram palīgam pasaka 3 burtus. Shematiski to var attēlot šādi (sarkanie ir tie burti, kurus nezina atbilstošie divi gangsteri):



Komentārs. Atsevišķi jāpaskaidro, kāpēc nevar sastādīt kodu no 3, 4, un 5 burtiem. Sīkāku atrisinājumu var paskatīties jaunākās grupas uzdevumu atrisinājumos (A grupa, seifi un kodi, 5. uzdevums).

6. Mafijas krusttēvs pēc ilgas slimības bija aizmirsis sava seifa piecciparu kodu. Viņš atcerējās, ka katrs nākamais koda cipars nav mazāks par iepriekšējo. Tad rakstāmgalda atvilktnē viņš atrada lapiņu, kurā kods bija pierakstīts šifrētā veidā:

> "Jebkuru 3 koda ciparu summa ir lielāka par atlikušo divu ciparu summu. Pirmie divi cipari veido skaitli, kas dalās ar 8. Pirmie 3 cipari veido trīsciparu skaitli, kas dalās ar 7. Pēdējie 3 cipari veido skaitli, kas dalās ar 9." Vai krusttēvam izdosies kodu atrast?

Atrisinājums. Koda skaitļi ir sakārtoti sekojošā secībā:

$$a \leq b \leq c \leq d \leq e$$

Teikums par to, ka jebkuru trīs ciparu summa lielāka par pārējo divu ciparu summu, liecina par to, ka trīs mazāko skaitļu summa $a + b + c$ ir lielāka nekā divu lielāko skaitļu $d + e$ summa. No tā seko, ka pirmais cipars a nevar būt 0 un līdz ar to neviens koda cipars nav 0. Nosacījums būtu izpildīts, ja visi koda cipari būtu vienādi un atšķirīgi no 0.

Sāksim ar pirmajiem diviem cipariem ab, kuri veido tādu divciparu skaitli $\overline{ab}$, kas dalās ar 8. Tie varētu būt 16; 24; 56; 88 (citiem skaitļiem, kuri dalās ar 8, vienu cipars mazāks par desmitu ciparu). Izveidosim no tiem nosacījumiem atbilstošus trīsciparu skaitļus $\overline{abc}$, kuri dalās ar 7: 168; 245; 567; 889.

Aplūkojam skaitli 168. Tas jāpapildina ar vēl diviem cipariem tā, lai pēdējie divi cipari nav mazāki par pirmajiem trim. Tādi skaitļi varētu būt 16888; 16889; 16899, bet nevienam no šiem skaitļiem pēdējo 3 ciparu veidotais skaitlis nedalās ar 9, kā arī pirmo 3 ciparu summa mazāka par pēdējo divu ciparu summu.

Aplūkojam skaitli 245. Tam jāpievieno cipari, kuri ir ne mazāki par 5. Mazākais no šādiem skaitļiem, kur pēdējie 3 cipari dalās ar 9, ir 24558. Bet šim skaitlim pirmo 3 ciparu summa mazāka par pēdējo divu ciparu summu.

Aplūkojam skaitli 567. Lai pēdējo divu ciparu summa būtu mazāka par pirmo 3 ciparu summu, tiem jābūt ne lielākiem par 8 un 9. Taču neviens no skaitļiem, kuri varētu būt koda pēdējie 3 cipari, (777; 778; 788; 789) nedalās ar 9.

Atliek cipari 889. Tos var papildināt vienā vienīgā veidā – 88999. Šis skaitlis atbilst visām prasībām.