

Punktiņa uzdevumi patstāvīgai risināšanai. (B Grupa) Skaitļošana

13.03.2020

Īsi atrisinājumi un komentāri

- 1. uzdevums.** Konstruktors Baits konstruēja vairākus divu veidu blokus. A bloka darbība ir reizināt skaitli ar 2, bet B bloka darbība ir dalīt skaitli ar 3. Viņš salika mašīnā blokus secībā A, B, A, B, A, B. Kādu vismazāko naturālo skaitli jāievada mašīnā, lai rezultātā tiktu iegūts naturāls skaitlis, kas dalās ar 7?

Atrisinājums. Ja rezultāts dalās ar 7, tad arī dotais skaitlis dalās ar 7. Ja dotais skaitlis "iet" caur blokiem B 3 reizes, tad tas dalās ar 27. Mazākais šāds skaitlis ir $27 \cdot 7 = 189$. Rezultātā iegūst skaitli 56.

- 2. uzdevums.** Konstruktors Bits izgudroja mašīnu, kura ar naturālu skaitli x veic šādas darbības: pieskaita 6; ja tas ir pāra skaitlis, daļa ar 2; maina ciparus vietām. Mašīna veic darbības jauktā secībā, tās izpildot vairākas reizes. Vai mašīna var rezultātā izdot skaitli 1, ja skaitlis x ir a) 43; b) 56; c) 15?

Atrisinājums. a) Ar skaitli 43 veic sekojošus pārveidojumus:

$$43 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 23 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

b) Ar skaitli 56 veic sekojošus pārveidojumus:

$$56 \rightarrow 62 \rightarrow 31 \rightarrow 37 \rightarrow 43 \rightarrow \dots$$

Tālāk turpina kā a) piemērā.

c) Skaitlis 15 dalās ar 3. Minēto darbību rezultātā šī skaitļa īpašība nemainās, tāpēc skaitli 1 rezultātā iegūt nevar. Mazākais skaitlis, ko var iegūt ir 3.

- 3. uzdevums.** Baits izgudroja trīs bloku veidus: a) skaitli pareizināt ar 6; b) skaitli izdalīt ar 3; c) pierakstīt skaitlim labajā pusē 1. Kā šādus blokus salikt secībā, lai no skaitļa 1 iegūtu visus skaitļus no 1 līdz 10?

Atrisinājums. Aplūkosim sekojošo darbību virkni:

$$1 \cdot 6 = 6; \quad 6:3 = 2; \quad 2 \cdot 6 = 12; \quad 12:3 = 4; \quad 4 \cdot 6 = 24; \quad 24:3 = 8; \quad 8 \rightarrow 81;$$

$$81:3 = 27; \quad 27:3 = 9; \quad 9:3 = 3; \quad 3:3 = 1$$

Ievērosim, ka šajā darbību virknē var atrast gandrīz visus prasītos rezultātus, izņemot 5, 7 un 10. Uzraksti darbību virkni, kā iegūt skaitli 7!

Skaitļus 5 un 10 minēto darbību rezultātā iegūt nevar. Ja skaitlim pieraksta 1 labajā pusē, šāds skaitlis nedalās ar 5. Lai, kādu skaitli dalot ar 3, iegūtu 5, dalāmajam ir jādalās ar 5.

- 4. uzdevums.** Bits uzrakstīja mašīnai programmu: dotajam naturālam skaitlim atrast secīgus skaitļus, kuru summa ir vienāda ar doto skaitli. Viņš pārbaudīja programmu ar skaitli 130

un rezultātā mašīna izdeva 5 secīgus skaitļus. Vai mašīna var atrast arī citus secīgus skaitļus, kuru summa ir 130?

Komentārs. Var izmantot vidējo aritmētisko vērtību: $130:5 = 26$. Virkne ir 24; 25; 26; 27; 28. Ja pieņem, ka ir arī 4 secīgu skaitļu virkne, aplūko vidējo aritmētisko $130:4 = 42,5$. Tad virkne ir 41; 42; 43; 44. Lai atrastu citas virknes, doto skaitli var sadalīt pirmskaitļu reizinātājos:

$$130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$$

Tas norāda, ka ir iespējams atrast 13 secīgu skaitļu virkni, kuru summa ir 130.

Paskaidro, kāpēc nevar izveidot 2 vai 3 šādu secīgu skaitļu virkni!

- 5. uzdevums.** Konstruktors Baits nolēma sastādīt citādu programmu – ievadītajam skaitlim atrast visas secīgu nepāra skaitļu virknes, kur virknes skaitļu summa vienāda ar doto skaitli. (piemēram, $3 + 5 + 7 = 15$) Cik dažādas virknes mašīna atrastu, ja tai ievadītu skaitli 480?

Atrisinājums. Aplūkosim skaitļa 480 sadalījumu pirmreizinātājos:

$$480 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Var izvēlēties skaitļu virknes garumā 2; 4; 6; 8; 12; 16; 20; 24. Piemēram, 12 skaitļu virkne būs no skaitļiem 29; 31; 33; 35; 37; 39; 41; 43; 45; 47; 49; 51. Nav iespējams izveidot virkni no 3 vai 5, vai 15 skaitļiem. Tā, piemēram, piecu skaitļu vidējā aritmētiskā vērtība ir 96. Var izvēlēties vai nu 3 secīgus nepāra skaitļus, kas mazāki par 96 vai lielāki par 96 – abos gadījumos secīgo nepāra skaitļu summa nesakrīt ar 480. Nevar arī izveidot secīgo nepāra skaitļu virkni, kurā ir vairāk kā 24 locekļi. Piemēram, ja mēs gribētu izveidot šādu virkni, kurā ir 30 locekļi, tad tādu skaitļu vidējā aritmētiskā vērtība ir $480:30 = 16$. Lai tādu virkni sastādītu, nepieciešami 15 nepāra skaitļi, kas mazāki par 16 un 15, kas lielāki. Bet ir tikai 8 nepāra skaitļi, kas mazāki par 16.

- 6. uzdevums.** Bits uzrakstīja programmu, kas jebkuriem diviem virknes skaitļiem vienlaikus pieskaita skaitli 1. Šādas darbības tiek atkārtotas tik ilgi, līdz visi virknes skaitļi ir vienādi. Bits ievadīja skaitļus 1, 2, 3, 4, 5 un 6. Pēc cik ilga laika mašīna panāks, ka visi ievadītie skaitļi kļūs vienādi?

Atrisinājums. Šī mašīna apstāsies tikai tad, kad sabojāsies, jo no dotajiem skaitļiem nevar iegūt visus vienādus skaitļus. Sešu skaitļu kopējā summa ir 21, kas ir nepāra skaitlis. Diviem skaitļiem vienlaikus pieskaitot 1, kopējā skaitļu summa palielināsies par 2, tātad joprojām tas būs nepāra skaitlis. Sešu vienādu skaitļu summa ir pāra skaitlis. Tāpēc prasītais nav iespējams.

Punktiņš Tevi uzaicina attālināti. (B grupa) Šodien konkurss par nesen aplūkotajām tēmām

27.03.2020

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Atrodi tādu vismazāko piecciparu skaitli, kurš dalās gan ar 9, gan ar 4. Vai, samainot šī skaitļa ciparus, var iegūt skaitli, kurš dalās ne tikai ar 4 un 9, bet arī ar 7?

Atrisinājums. Skaitļa ciparu summa dalās ar 9. Skaitļa divi pēdējie cipari veido skaitli, kas dalās ar 4. Vismazākā ciparu summa ir 9. Tad vismazākais skaitlis, kas dalās ar 9 un 4 ir 10008. Ja pēdējos 2 ciparus samaina vietām, tad skaitlis dalās arī ar 7

$$10008 : 7 = 1440.$$

2. Divciparu skaitlim A galā pierakstīja tā ciparus otrādā secībā, iegūstot 4 – ciparu skaitli B (piemēram, ja $A = 37$; ieguva $B = 3773$). Vai skaitlis B dalās ar 11? Paskaidro, kāpēc tas nedalās vai dalās ar 11!

Atrisinājums. Skaitli B izteiksim decimālajā pierakstā

$$B = \overline{abba} = 1000a + 100b + 10b + a$$

Savilksim līdzīgos locekļus

$$B = 1001a + 110b$$

Abi saskaitāmie dalās ar 11 (pārbaudi!). Tāpēc jebkurš uzdevumā noteiktais skaitlis B dalās ar 11.

Te arī cita veida risinājums, ko iesūtījis Raivis. Risinājums balstīts uz skaitļa dalāmības ar 11 īpašību

2. uzdev.
Šis dalās ar 11, jo dalāmības pazīme skaitlim 11 ir, ~~skaitlis~~ skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, ~~starpība~~ un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība ir 0, vai arī dalās ar 11, piemēram 9483 dalās, jo $(9+8+1) - (4+3) = 18-7 = 11$, kas dalās ar 11, un šajā gadījumā B vienmēr dalīsies ar 11, jo tā nepāra pozīciju ciparu summa vienmēr būs vienāda ar pāra pozīciju ciparu summu, tādēļ to starpība būs 0, un tad skaitlis dalās ar 11, tātad skaitlis B vienmēr dalīsies ar 11.

3. Koka kuba katru skaldni nokrāsoja vienā no divām krāsām – sarkanu vai zilu. Tad kuba sazāģēja 27 vienādos kubiņos. Cik dažāda veida kubiņus ieguva? Cik starp šiem kubiņiem bija vienādi krāsoti kubiņi?

Piezīme. Dotais uzdevums ir izpētes uzdevums, kur jānoskaidro dažādie gadījumi.

Atrisinājums. Vispirms ir jāpadomā par to, kādā veidā doto koka kuba var nokrāsot divās krāsās. Cik ir tādu gadījumu? Katrs no tiem tad jāaplūko atsevišķi. Varbūt visiem gadījumiem ir arī kas kopīgs?

Krāsojumi var atšķirties sekojošā veidā:

- 1) tieši viena skaldne ir zilā krasā, piecas sarkanā; 2) 2 skaldnes zilā krāsā, 4 sarkanā. Var būt divi atšķirīgi gadījumi: 2.a) zilām skaldnēm kopīga šķautne; 2.b) zilās skaldnes ir kuba pretējās skaldnes; 3.a) 3 zilās skaldnes ar kopīgu kuba virsotni; 3.b) 3 zilās skaldnes novietotas tā, ka divas no tām ir kuba pretējās skaldnes. Vēl līdzīgi gadījumi, ja ir 4 zilās skaldnes un 5 zilās skaldnes.

Kopumā kubam iespējami 8 dažādi krāsojumi divās krāsās.

Aplūkosim vienu no šiem gadījumiem. Ja viena skaldne ir nokrāsota zilā krāsā un piecas sarkanā, tad, sazāģējot kuba 27 kubiņos ir 1 centrālais, iekšējais kubiņš, kura skaldnes nav nokrāsotas; kubiņi ar 1 nokrāsotu skaldni ir 6, kur vienam krāsotā skaldne ir zilā krāsā, bet citiem pieciem – sarkanā. Ir 12 kubiņi, kuriem krāsotas divas skaldnes ar kopīgu šķautni. No tiem četriem kubiņiem abas krāsotās skaldnes ir divās krāsās, bet pārējiem 8 kubiņiem abas krāsotās skaldnes ir sarkanas. Tad vēl ir 8 kubiņi, kuriem ir nokrāsotas 3 skaldnes ar kopīgu virsotni. Četriem kubiņiem ir viena zila un divas sarkanas skaldnes, otriem četriem krāsotās skaldnes ir sarkanas.

Līdzīgi var aplūkot pārējos 7 gadījumus. Visos gadījumos centrālais kubiņš ir nenokrāsots. Katrā no gadījumiem var atrast kubiņus, kuriem ir 2 krāsotas skaldnes, kur viena ir zilā krāsā un otra sarkanā.

Noskaidro, cik visos gadījumos ir vienāds vienādi krāsoto kubiņu skaits!

4. Tabulā 5 x 5 rūtiņas katrā rūtiņā ierakstīja vienu skaitli 1 vai 2. Vai iespējams ierakstīt šos skaitļus tabulā tā, lai katrā rindā, katrā kolonā un abās diagonālēs ir a) tieši viens skaitlis 1; b) tieši trīs skaitļi 1?

Atrisinājums. a) gadījumu atrast ir vienkārši. Te, piemēram, ir Miķeļa atrisinājums:

2	2	2	1	2
1	2	2	2	2
2	2	1	2	2
2	2	2	2	1
2	1	2	2	2

b) arī otrā gadījumā ir iespējams atrisinājums. Ieteicams vispirms izvietot uz katras diagonāles trīs vieniniekus. Pēc tam apdomīgi aizpildīt tabulu. Piemēram:

2	1	1	1	2
1	1	2	2	1
1	2	1	2	1
2	1	2	1	1
1	2	1	1	2

5. Trīs brāļi apēda visas konfektes, kuras bija konfekšu trauciņā. Bruno apēda par 3 konfektēm mazāk, nekā trešā daļa no visām konfektēm, kas bija trauciņā. Arnis apēda par 4 konfektēm mazāk nekā Bruno. Bet Dainis apēda divas reizes vairāk konfekšu nekā Arnis. Konfekšu skaits, ko apēda Dainis, bija par 10 konfektēm vairāk nekā trešā daļa no visām konfektēm. Cik konfekšu apēda katrs no brāļiem?

Atrisinājums. Apzīmēsim trešo daļu no visām konfektēm ar x . Tad

Bruno apēda $x - 3$ konfektes.

Arnis apēda $(x - 3) - 4 = x - 7$ konfektes.

Dainis apēda $2(x - 7) = 2x - 14$ konfektes, kas ir tikpat daudz kā $x + 10$ konfektes.

Vienādojums, kas jārisina, ir noteikts ar to konfekšu skaitu, ko apēda Dainis, kas izteikts divos dažādos veidos

$$2x - 14 = x + 10$$

$$x = 10 + 14 = 24$$

No šejienes aprēķinām, ka konfekšu skaits bija $3x = 72$

Bruno apēda $24 - 3 = 21$ konfekti

Arnis apēda $24 - 7 = 17$ konfektes

Dainis apēda $24 + 10 = 34$ konfektes.