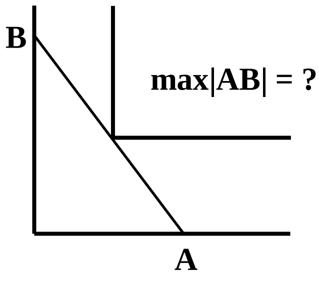
LATVIJAS UNIVERSITĀTE

A. Cibulis

EKSTRĒMU UZDEVUMI

1. DAĻA

2. izdevums



Rīga 2007

Cibulis A.
Ekstrēmu uzdevumi. I daļa, 2. izdevums (papildināts un pārstrādāts 1. izdevums).
Rīga: Latvijas Universitāte, 2007. – 108 lpp.

Grāmata veltīta ekstrēmu uzdevumiem un to risināšanas elementārām metodēm. Tā satur daudz atrisinātu uzdevumu, jaunus rezultātus, kā arī vēsturiskas ziņas. Tā piemērota skolēniem, kuri padziļināti interesējas par matemātiku, kā arī matemātikas skolotājiem.

Grāmatas galīgā versija sagatavota LU Pētniecības projekta „Latvijas skolēnu zināšanu un kompetenču paaugstināšana matemātikā, attīstot matemātisko sacensību sistēmu un skolēnu pētniecisko darbu” ietvaros.

ISBN 9984-18-260-6

Reģ. apl. No. 50003107501

Iespiests SIA „Mācību grāmata”, Raiņa bulv. 19, Rīgā, LV-1586, tel./fax. 7325322

SATURS

IEVADS

Pasaulē nekas nenotiek tā, ka tajā nevarētu saskatīt kādu maksimuma vai minimuma principu.
L. Eilers

Grāmata veltīta ekstrēmu uzdevumiem un to risināšanas elementārām metodēm. Pat ar elementārām metodēm un paņēmieniem risināmo ekstrēmu uzdevumu daudzveidība ir pārsteidzoši liela.

Ekstrēmu uzdevumi ir īpaši pievilcīgs uzdevumu tips, kas neatstāj vienaldzīgu nevienu kaut cik saprātīgu un matemātiski izglītotu cilvēku. Ekstrēmu uzdevumi saista un ir noderīgi ar savu 'praktiskumu'. Parasti mēs cenšamies panākt, lai gala rezultāts mūsu iespēju robežās, vismaz tā, kā to saprotam, būtu optimāls. Atkarībā no situācijas mūs var interesēt maksimālais ātrums, vislielākā peļņa, vismazākie zudumi, minimālais laiks utt. Ekstrēmu uzdevumu nozīme var izpausties arī citā, pirmajā brīdī, šķiet, negaidītā aspektā. Izrādās, ka daudz kas dabā notiek saskaņā ar to vai citu ekstrēmu principu. Piemēram, gaismas stars izplatās pa visīsāko ceļu, ziepju burbuļi minimizē attiecīgās virsmas laukumu. Jau sirmā senatnē cilvēku prātus ir nodarbinājuši dažādi uzdevumi, kuros jāmeklē vislielākā vai vismazākā, t. i., ekstremālā, kāda lieluma vērtība. Par vissenākajiem ekstrēmu uzdevumiem uzskata tā dēvētos izoperimetriskos uzdevumus (kāda figūra ierobežo vislielāko laukumu, ja uzdots tās perimetrs?). Jau Aristotelim (4. gs. p. m. ē.) bija zināms, ka "visietilpīgākās" figūras ir riņķis un lode attiecīgi starp plaknes un telpas figūrām. V. Tihomirovs [T, 30] norāda, ka ģeometriskie maksimumu un minimumu uzdevumi sastopami senatnes visu trīs dižāko matemātiķu – Eiklīda, Arhimēda un Apolonija – darbos, ka Eiklīda slavenajos "Elementos" (apt. 325. g. p. m. ē.) ir tikai viens ekstrēmu uzdevums (par paralelograma ar vislielāko laukumu izgriešanu no dotā trijstūra; 6. grāmata). Savukārt "Enciklopēdiskajā vārdnīcā" [EV, 55] minēts vēl viens ekstrēmu uzdevums, kurš atrodams tajā pašā Eiklīda elementu 6. grāmatā un kurš esot visvienkāršākais un, jādomā, arī visvecākais ekstrēmu uzdevums, proti, kādam taisnstūrim ar uzdotu perimetru ir vislielākais laukums.

Ekstrēmu uzdevumus var aplūkot no dažādiem aspektiem: vēsturiskā, pedagoģiskā, lietišķā, tos var skatīt pēc to sarežģītības, risināšanas metodēm, piemērotības olimpiādēm, var aplūkot tematiski u. tml.

Vienkāršākie ekstrēmu uzdevumi būtu meklējami nekur citur, kā skolas matemātikas, algebras un ģeometrijas pamatkursos. Diemžēl tā nav, par ko var pārliecināties, pārlūkojot attiecīgos mācību līdzekļus. [1)] Mācību līdzeklis tikai iegūtu, ja tajā varētu atrast saistošu informāciju par skolā aplūkoto figūru ekstremālajām īpašībām. Ekstrēmu uzdevumi skolas kursā ir atstāti novārtā. Turklāt, kā atzīmē S. Akterševs savas grāmatas [Akt] ievadā, labākajā gadījumā vecāko klašu skolēni prot atrast ekstrēmus vienkāršākajām funkcijām ar atvasinājuma palīdzību. Viņiem veidojas maldīgs uzskats, ka tā ir vienīgā ekstrēmu uzdevumu risināšanas metode. Vairākas ekstrēmu uzdevumu risināšanas metodes ir izklāstītas nesen iznākušajā grāmatā [AMS], kas var lieti noderēt studentiem, pasniedzējiem, skolotājiem, bet it īpaši matemātikas olimpiāžu dalībniekiem. Grāmatas autori piedāvā pietiekami daudz ģeometriska rakstura uzdevumu patstāvīgai risināšanai.

Latviešu valodā, manuprāt, pirmais publicētais darbs par ekstrēmu uzdevumiem ir A. Vasiļevskas un L. Ramānas mācību līdzeklis "Ekstrēmu uzdevumu risināšanas metodes" [VR]. Tajā ar vairāku piemēru palīdzību tiek demonstrēts, kā lietojama tā vai cita izklāstītā metode. Katras nodaļas beigās doti uzdevumi patstāvīgai risināšanai, kas ir svarīgi paškontrolei. Šis t. s. elementāro metožu aspekts ir ļoti piemērots skolēnu un skolotāju vajadzībām, sevišķi gatavojoties matemātikas olimpiādēm. Diemžēl šajā ekstrēmu uzdevumiem veltītajā mācību līdzeklī netiek dotas attiecīgo jēdzienu definīcijas. Jautājumam par attiecīgo jēdzienu definīcijām šajā grāmatā veltīts atsevišķs punkts ar daudziem citātiem un komentāriem. Vairākus ekstrēmu uzdevumus var atrast apmēram pirms 60 gadiem latviešu valodā izdotajā mācību literatūrā [Ciz, Oz]. No šiem avotiem ņemtajos uzdevumu formulējumos saglabāta tā laika ortogrāfija.

Ekstrēmu uzdevumu risināšanā liela nozīme ir nevienādībām, īpaši tām, kas saista dažādus tā saucamos vidējos lielumus. Grāmatas 1. daļā plašāk aplūkotas divas ievērojamas nevienādības – $A \geq G$, t. i., nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, un Košī nevienādība. Dažkārt arī pirmo minēto nevienādību mēdz dēvēt Košī vārdā. Protams, neviena no šīm nodaļām nepretendē uz pilnību. Pārējās pēc apjoma mazākajās nodaļās galvenā uzmanība pievērsta iespējām noteikt ekstrēmus elementārā veidā jebkurai attiecīgās klases funkcijai. Darbā ir gan teorētiskā, gan praktiskā daļa. Turklāt ne visi uzdevumu risinājumi izklāstīti tradicionālā veidā, kad mērķi cenšas sasniegt pa iespējami "taisnāko" ceļu, t. i., ekonomējot laiku vai izklāsta apjomu. Praksē, risinot kādu jaunu problēmu, mums reti kad izdodas uzreiz (bez kļūdām, bez eksperimentēšanas) atrast īsāko, vienkāršāko risinājumu. Ceļā uz mērķi, laiku pa laikam tiek aplūkoti dažādi sānceliņi, skolēnu raksturīgākās kļūdas, maldus risinājumi utt.

Darba gaitā kļuva zināma ļoti nozīmīga (vismaz no vēsturiska viedokļa) informācija par ekstrēmu uzdevumiem elementāro risināšanas metožu aspektā. Izrādās, ka jau 1850. gadā Kalkutā tika publicēts traktāts par maksimumu un minimumu noteikšanu ar algebras paņēmieniem. Tās autors – kāds talantīgs indiešu matemātiķis Ramčandra (dzimis 1821. gadā Paniputā, apmēram 50 jūdžu attālumā no Deli). Par to, ka šis traktāts ieraudzīja dienas gaismu, mums jāpateicas vienam no formālās algebras pamatlicējiem – skotu matemātiķim Morganam (*Augustus De Morgan*, 1806-1871), kurš 1859. gadā izdeva Ramčandras grāmatu. Starp citu, pats Morgans arī ir dzimis Indijā (Madrasā). Morgans uzrakstīja grāmatai ievadu un turklāt tajā sniedza ziņas par autoru. Ja Morgans nebūtu bijis tik tālredzīgs, mēs vairs droši vien gandrīz neko nezinātu par Ramčandru un viņa dzīvi. Savukārt par aizmirstības plīvura noņemšanu no Morgana izdevuma mums jāpateicas zinātniekam Mizē [2)] no Kanādas, kurš pasaulē plaši pazīstamajā žurnālā *The Mathematical Intelligencer*, 1998, v. 20, no. 3, 47-51, ir publicējis rakstu *De Morgan's Ramanujan: An incident in recovering our endangered cultural memory of mathematics*, iekļaujot tajā minētās grāmatas titullapas faksimilu (sk. 8. lpp.)

Viena no visinteresantākajām problēmām, ko izvirzīja Ramčandra, bija atrast matemātisku pamatojumu tam, ka bites veido šūnas, patērējot vismazāk vaska. Turklāt viņš savā darbā min vairākus pētniekus, kas pirms viņa ir nodarbojušies ar bišu šūnu mērīšanu vai to optimalitātes pamatošanu. Ramčandra elementārā veidā prot atrisināt uzdevumu par vislielākā paralēlskaldņa ievilkšanu dotajā elipsoīdā, ar kuru, kā izsakās Mizē, bez diferenciālrēķinu palīdzības nav spējīgi tikt galā vairākums skolotāju. Viņš pierāda, ka ap doto sfēru apvilktā vismazākā konusa augstums ir vienāds ar divkāršotu sfēras diametru. Grāmatas beigās viņš izvirza un 8 rindiņās atrisina problēmu: atrast x, lai reizinājums $(mx + n)(ny + m)$ būtu maksimāls, ja $a^{mx}b^{ny} = c$. Ramčandra savu traktātu beidz 185. lpp. ar vārdiem "baidoties pārāk palielināt sava darba apjomu, es beidzu šo darbu".

Veiksmīgākie ekstrēmu uzdevumi, saprotams, pārceļo no vienas grāmatas (brošūras u. tml.) uz otru. Jūsu uzmanībai piedāvātais darbs šai ziņā nebūs izņēmums. Diemžēl jautājums par pirmavotiem bieži vien nav skaidrs. Turklāt to būtiski apgrūtina daudzu grāmatu autoru, mācību līdzekļu veidotāju, uzdevumu krājumu sastādītāju nevēlēšanās norādīt izmantoto literatūru. Vairāku uzdevumu formulējumi doti sīkākā burtu rakstā. Tas darīts tāpēc, lai vērstu uzmanību uz to, ka attiecīgie avoti nav pirmavoti.

Ramčandras traktāts, jādomā, ir pirmavots daudziem ar elementārām metodēm risināmiem ekstrēmu uzdevumiem. [3)] Protams, nereti gadās, ka dažādi autori sastāda pēc satura vienādus uzdevumus neatkarīgi viens no otra.

Šis izdevums ir pārstrādāts 1. izdevuma [Cib1] variants, kurš papildināts ar vairākiem uzdevumiem, literatūras avotiem un komentāriem. Izlabotas pamanītās kļūdas vai neprecizitātes gan tekstā, gan zīmējumos. Atsevišķās vietās teksts saīsināts, izmetot no iepriekšējā varianta nebūtiskas detaļas.

Izmantotās literatūras saraksts ir dots darba beigās. Atsauces rakstītas šādā formā [KR], [T, 30], [Zet, 3, 30-31], kur skaitļi norāda citētā avota lappuses.

Darbā vidējā aritmētiskā, ģeometriskā, kvadrātiskā un harmoniskā apzīmēšanai lietoti saīsināti apzīmējumi: A, G, K un H. Divu skaitļu gadījumā:

$$A = \frac{x+y}{2},\ G = \sqrt{xy},\ K = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},\ H = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}.$$

Lūk, kāda izskatās Morgana izdotās Ramčandras grāmatas titullapa

TREATISE ON PROBLEMS

OF

MAXIMA AND MINIMA,

SOLVED BY ALGEBRA.

BY

RAMCHUNDRA

LATE TEACHER OF SCIENCE, DELHI COLLEGE.

REPRINTED BY ORDER OF THE HONOURABLE COURT OF DIRECTORS OF THE EAST-INDIA COMPANY FOR CIRCULATION IN EUROPE AND IN INDIA, IN ACKNOWLEDGMENT OF THE MERIT OF THE AUTHOR, AND IN TESTIMONY OF TNE SENSE ENTERTAINED OF THE IMPORTANCE OF INDEPENDENT SPECULATION AS AN INSTRUMENT OF NATIONAL PROGRESS IN INDIA.

Under the Superintendence of

AUGUSTUS DE MORGAN, F. R. A. S. F. C. P. S.

OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE ;

PROFESSOR OF MATHEMATICS IN UNIVERSITY COLLEGE, LONDON.

L O N D O N ;

W M. H. ALLEN & CO. 7, LEADENHALL STREAT.

1859.

1. nodaļa. **Kas ir ekstrēms?**

Kā dievs jāgodā tas, kas prot labi definēt.
Platons

Šajā jautājumā parasti domstarpību nav. Funkcijas ekstrēms ir funkcijas vērtība ekstrēma punktā, t. i., maksimuma vai minimuma punktā. (Latīņu vārds *extremus* nozīmē 'galējs'.) Tomēr, kā izrādās, nav vienprātības jautājumā par maksimuma un minimuma punktu. Daudzos avotos atrodamas novecojušas, nekorektas vai pat kļūdainas definīcijas. Droši vien prātīgāk būtu definīcijas nedot vispār, nevis tās publicēt mācību literatūrā izkropļotā, paviršā vai kļūdainā veidā. Spilgts piemērs ir V. Ziobrovska un B. Siliņas eksperimentālā mācību grāmata "Algebra vidusskolai, 1. daļa" [ZS] [1)]. Lūk, kā šai grāmatā (200. lpp.) tiek definēts maksimuma un minimuma punkts:

Punktu x_0 sauc par funkcijas $y=f(x)$ maksimuma punktu, ja funkcija šajā punktā ir nepārtraukta un visiem x no punkta x_0 apkārtnes ir spēkā nevienādība

$$f(x_0)>f(x).$$

Punktu x_0 sauc par funkcijas $y=f(x)$ minimuma punktu, ja funkcija šajā punktā ir nepārtraukta un visiem x no punkta x_0 apkārtnes ir spēkā nevienādība

$$f(x_0)<f(x).$$

Kas nav pareizs šajās [ZS] "definīcijās"?

Pirmkārt, rupja kļūda ir prasīt stingro nevienādību, jo tā nevar būt spēkā punktā $x= x_0$.

Otrkārt, par kādu apkārtni te ir runa un kas īsti ir apkārtne? Vai pats punkts x_0 pieder savai apkārtnei? Varbūt autoriem ir kāda specifiska šī jēdziena izpratne, kas kļūdu dara mazāku? Kaut gan viņu izpratne, kā rāda citāts [ZS, 198]:

Par punkta x_0 apkārtni *($x_0 \in D(f)$) var uzskatīt jebkuru neliela garuma intervālu ap šo punktu. Vienkāršības dēļ izvēlas tādu intervālu, kura galapunktu vidējais aritmētiskais ir tieši skaitlis x_0,*

tiešām ir specifiska, tomēr minēto kļūdu tā nenovērš.

Protams, neliela garuma intervālu par punkta x_0 apkārtni uzskatīt var, tikai kāpēc tādā gadījumā ievērību nav pelnījuši lielāka garuma intervāli? Kā skolēns spēs novērtēt, vai izvēlētā intervāla garums ir vai nav neliels? Arī izteikums "visiem x no punkta x_0 apkārtnes" ir jāprecizē, pasakot skaidrāk, par kādu apkārtni te ir runa.

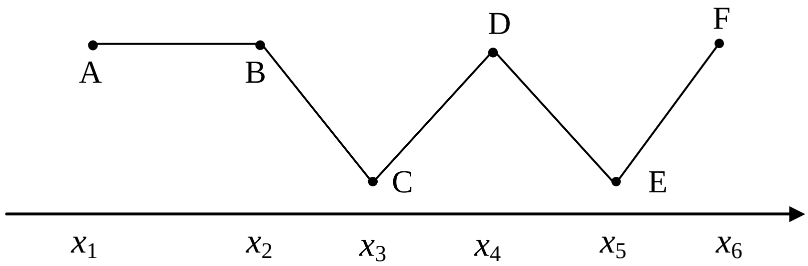
Salīdzināsim citēto definīciju, iespējams, ar pirmavotu:

Punktu x_0 sauc par funkcijas maksimuma punktu, ja šajā punktā funkcija ir nepārtraukta un ar visām x vērtībām ($x \neq x_0$) no šī punkta kaut kādas apkārtnes ir spēkā nevienādība $f(x) < f(x_0)$. [Š1, 167]

Arī šī definīcija satur dažus trūkumus. Kādus? Prasība par funkcijas nepārtrauktību maksimuma vai minimuma punktā ir lieka. Definīcija nekļūtu sarežģītāka arī bez šīs prasības, turklāt rastos acīmredzams ieguvums: definīcija pieļautu aplūkot jebkuras funkcijas (ne tikai nepārtrauktās). Nākamajā definīcijā prasības par funkcijas nepārtrauktību nav.

Punktu x_0 sauc par funkcijas maksimuma punktu, ja visiem $x \neq x_0$ no šī punkta kaut kādas apkārtnes ir pareiza nevienādība $f(x) < f(x_0)$. [Ged, 55]

Tomēr arī šī un daudzas citas definīcijas [2)] nav nevainojamas. Pieņemsim, ka funkcija, kas definēta nogrieznī [x_1, x_6] punktos x_1, x_2, x_4 un x_6 sasniedz savu vislielāko vērtību, sk. 1. zīm. Citētā definīcija par maksimuma punktu piedāvā uzskatīt tikai punktu x_4, kaut gan tas nav vienīgais punkts, kurā funkcija sasniedz maksimālo vērtību.



1. zīm.

Tomēr – vai punkts $x = 0$ ir maksimuma punkts konstantai funkcijai, piemēram, $f(x) = 0$? Neviena no komentāros citētajām definīcijām [2)] atbildi uz šo jautājumu nesniedz. Faktiski šajās definīcijās runa ir par s t i n g r o lokālo maksimumu vai minimumu.

Neprecizitāšu ilustrēšanai – vēl viens neparasts apgalvojums kopā ar neparastu pamatojumu:

Ja funkcija f(x) *ir definēta slēgtā intervālā* [a; b], *tad tā galapunkti a un b nevar būt funkcijas ekstrēmu punkti, jo tiem nevar definēt apkārtni.* [ZS, 201]

Viedokli, ka intervāla galapunkti nevarot būt funkcijas ekstrēmu punkti, ir izteikuši daudzu mācību grāmatu autori. [3)]

Aplūkosim vēl vienu definīciju [Š2, 121], kas ir iepriekš citētās definīcijas [Š1, 167] uzlabojums:

Punktu x_0 sauc par funkcijas f(x) ***maksimuma punktu,*** *ja šim punktam eksistē tāda apkārtne, ka ar visām x vērtībām no šīs apkārtnes ir spēkā nevienādība* $\boldsymbol{f(x) \le f(x_0)}$.

Secinājums no definīcijas [Š2, 122]

Ja funkcija ir definēta slēgtā intervālā [a; b], *tad ekstrēma punkti var būt tikai šī intervāla iekšējie punkti. Ne sākumpunkts a, ne galapunkts b nevar būt ekstrēmu punkts, jo nevienam no šiem punktiem nav tādas apkārtnes, kas ietilpst definīcijas apgabalā* [a; b].

Saskaņā ar šādu secinājumu būtu jāuzskata, ka punkts $x = 0$ nav funkcijas

$$f(x) = -\sqrt{x}\,,$$

maksimuma punkts, kaut gan tā šajā punktā sasniedz savu vislielāko jeb maksimālo vērtību. Savdabīgais uzskats, ka intervāla galapunkti nevar būt ekstrēmu punkti, nesaskan ar vienu no ekstrēmu uzdevumu teorijas stūrakmeņiem (Veierštrāsa teorēmu). Tās pierādījumu, proti, ka nepārtraukta funkcija nogrieznī [a, b] sasniedz savas ekstremālās vērtības, var atrast matemātiskās analīzes kursā, sk., piemēram, [Zor].

Citētās definīcijas [2)] ne vienmēr ļauj noteikt, vai aplūkojamais punkts ir maksimuma punkts. Piemēram, vai $x = 0$ ir funkcijas

$$f(x) = \sqrt{-x^2}$$

maksimuma punkts?

Šajā grāmatā lietosim šādas ekstrēmu uzdevumu teorijai atbilstošas definīcijas.

1. definīcija. Punktu a sauc par funkcijas $f\colon X\to R$ **maksimuma punktu**, ja visiem x no X ir spēkā nevienādība

$$f(x) \le f(a),$$

un par **minimuma punktu**, ja visiem x no X ir spēkā nevienādība

$$f(x) \ge f(a),$$

Funkcijas f vērtību maksimuma punktā apzīmē ar $\max f$, minimuma punktā – ar $\min f$ un sauc attiecīgi par **funkcijas *f* maksimumu** un **minimumu**.

2. definīcija. Par funkcijas $f\colon X\to R$ **ekstrēmu** sauc šīs funkcijas vislielāko vai vismazāko vērtību kopā X. Bet punktu, kurā f sasniedz savu ekstrēmu, sauc par **ekstrēma punktu**.

Prasību, ka jāmeklē funkcijas f gan vislielākā, gan vismazākā vērtība visā tās definīcijas kopā, saīsināti rakstām šādi: $\operatorname{extr} f = ?$ Nereti lieto arī citus saīsinājumus:

$$f(x) \mapsto \text{extr},\ f(x) \mapsto \min,\ f(x) \mapsto \max,\ \text{vai } f(x) \to \text{extr},\ f(x) \to \max,\ f(x) \to \min.$$

Ja skolā rodas nepieciešamība meklēt vai definēt lokālos ekstrēmus, var izmantot šādu nedaudz sarežģītāku definīciju.

3. definīcija. Punktu a sauc par funkcijas $f\colon X\to R$ **lokālā maksimuma punktu**, ja eksistē tāda šā punkta apkārtne, ka visiem x no X, kuri atrodas šajā apkārtnē, ir spēkā nevienādība

$$f(x) \le f(a),$$

un par **lokālā minimuma punktu**, ja visiem x no X, kuri atrodas šajā apkārtnē, ir spēkā nevienādība

$$f(x) \ge f(a).$$

Punktu, kurš ir lokālā minimuma vai lokāla maksimuma punkts, sauc par **lokālā ekstrēma punktu**.

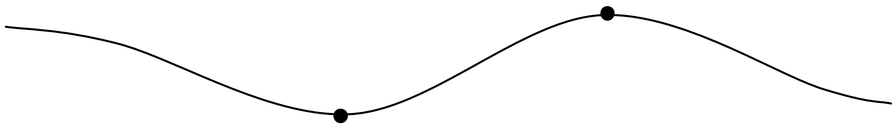
Atgādināsim, ka kāda punkta no reālu skaitļu kopas R apkārtne ir jebkurš intervāls (a, b), kas satur šo punktu. Vairākdimensiju gadījumā intervāla vietā tiek ņemta vaļēja lode, kas satur apskatāmo punktu.

Dažkārt maksimuma (minimuma) punktu 1. definīcijas nozīmē dēvē attiecīgi par globālā vai absolūtā maksimuma (minimuma) punktu. Tas pats sakāms par ekstrēma punktu 2. definīcijas nozīmē. Piedāvātās definīcijas nav nekas jauns. Tās ir parasts instruments matemātiskajā analīzē [4)].

Pamācoši piemēri

• Funkcijai, sk. 1. zīm., ir divi minimuma (globālā) punkti x_3 un x_5 un bezgalīgi daudz lokālā minimuma punktu, kas pieder $[x_1, x_2)$. Savukārt maksimuma punkti ir ne tikai x_1, x_2, x_4 un x_6, bet arī jebkurš nogriežņa $[x_1, x_2]$ punkts. Viens un tas pats punkts var būt gan maksimuma, gan minimuma punkts. Funkcijai $f = 0$ visi punkti ir gan maksimuma, gan minimuma punkti.

• Uzrādiet ierobežotu funkciju, kuras grafika skice ir kā 2. zīmējumā, t. i., funkciju, kurai ir tieši viens minimuma un tieši viens maksimuma punkts. Vai der polinoms?



2. zīm.

Viena no vienkāršākām prasītā tipa funkcijām ir $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$. Paskaidrojiet, kāpēc neder polinoms.

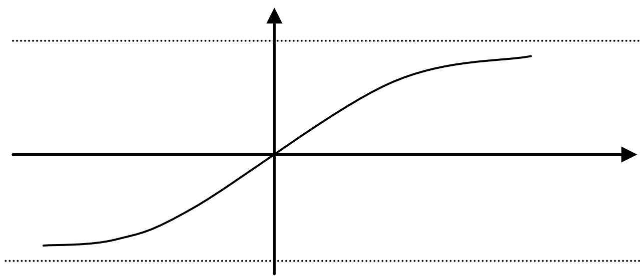
• Funkcijai $f(x) = x$ nav neviena ekstrēma. Uzrādiet funkciju, kuras grafika skice ir tāda kā 3. zīmējumā, t. i., ierobežotu funkciju, kurai nav neviena ekstrēma. Der $f(x) = \text{arctg}x$. Vai šāda funkcija var būt divu polinoms dalījums?

Anniņa. Nevar! Lūk, pierādījums! Pirmkārt, saucējā esošajam polinomam nav reālu sakņu. Pretējā gadījumā dalījums nevarētu būt ierobežota funkcija. Tas nozīmē, ka šī polinoma pakāpei jābūt pārskaitlim. Otrkārt, abu polinomu pakāpēm jābūt vienādām. Pretējā gadījumā grafiks nevarētu tuvoties taisnei $x = \text{const} > 0$. Treškārt, šādu polinomu vecāko koeficientu attiecībai jābūt pozitīvai, jo polinomu dalījums pirmajā kvadrantā ir pozitīvs. Bet tad dalījums būs pozitīvs arī ceturtajā kvadrantā, kas neatbilst 3. zīmējumā redzamajam grafikam.

Jānītis. Var! Lūk, piemērs!

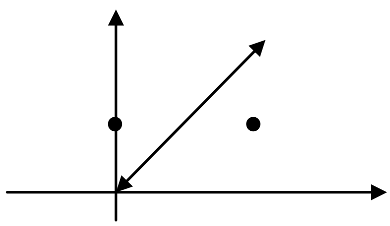
$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x+1}, & x\geq 0,\\ \frac{x}{1-x}, & x<0.\end{cases}$$

Kam taisnība?



3. zīm. Kopā *R* definēta ierobežota funkcija, kurai nav ekstrēmu.

• 4. zīmējumā ir uzrādīta grafika skice nogrieznī definētai ierobežotai funkcijai, kurai nav neviena ekstrēma (globālā). Šai funkcijai nogriežņa galapunkti ir lokālā ekstrēma punkti.



4. zīm. Nogrieznī definēta ierobežota funkcija, kurai nav ekstrēmu.

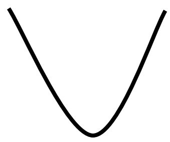
• Vai jebkurai nogrieznī definētai ierobežotai funkcijai vienmēr eksistē vismaz viens lokāls ekstrēms? Izrādās, ka nē! Aplūkojiet funkciju f: $[0, 2] \to R$, kas punktā $x = 1$ ir vienāda ar 0 un kas racionāliem skaitļiem x, $x \neq 1$, piekārto $x(2 - x)$, bet pārējiem skaitļiem $x(x - 2)$.

• Funkcijai $y = \sin x$ ir bezgalīgi daudz ekstrēma punktu. Vai funkcijai var būt bezgalīgi daudz ekstrēma (stingra) punktu arī tad, ja tā definēta ierobežotā kopā? Var! Konstrukcijas ideja vienkārša. Izvēlēsimies funkciju, kas pieņem tikai divas vērtības. Atzīmēsim, ka funkciju, kas racionāliem skaitļiem piekārto 1 un iracionāliem – 0, sauc par Dirihlē funkciju. Dirihlē funkcija ir pārtraukta katrā punktā. Vai pareiza hipotēze: ja ierobežotā kopā K definētai nepārtrauktai funkcijai f ir bezgalīgi daudz ekstrēma punktu, tad f ir konstanta kādā intervālā? Var nebūt! Piemēram, $\sin\frac{1}{x},\ 0 < x < 1$. Vai hipotēze būtu pareiza, ja K lomā ņemtu nogriezni? Tomēr nē! Piemēram,

$$f(x) = \left|x \sin\frac{1}{x}\right|,\ f(0) = 0,$$

savu minimumu sasniedz bezgalīgi daudzos punktos: $x = \frac{1}{\pi k},\ k \in Z$.

• Kāds izskatās nepārtrauktas funkcijas grafiks stingra minimuma punkta apkārtnē? Parasti to attēlo tādu kā 5. zīmējumā. Kāpēc parasti? Vai tad tā nav vienmēr? Pieredze ar "labām" funkcijām (x^2, $\sin x$ utt.) apstiprina, ka pa kreisi no stingra minimuma punkta funkcija dilst, bet pa labi aug, kā arī šādas grafiskas attēlošanas lietderību. Izrādās, ka stingra minimuma punkta apkārtnē grafikam ne vienmēr jābūt izliektam, t. i., tādam kā 5. zīmējumā.



5. zīm.

Precizēsim, ka par funkcijas f: $X \to R$ **stingra minimuma punktu** sauc tādu punktu a no X, ka visiem x no X, $x \neq a$, ir spēkā nevienādība

$$f(x) > f(a).$$

Konstruēsim funkciju, kuras grafiks "svārstās" starp divām parabolām x^2 un $4x^2$. Ņemsim

$$f(x) = 3x^2\left|\sin\frac{1}{x}\right| + x^2,\quad f(0) = 0.$$

Tad punkts $x = 0$ ir funkcijas f stingra minimuma punkts. Tā kā funkcija ir pāru (tās grafiks ir simetrisks pret Y asi) tad pietiek pierādīt, ka f nav augoša nevienā intervālā $(0, c)$. Punktos $x = \frac{1}{k\pi}$ funkcijas f grafiks pieskaras apakšējai parabolai, bet punktos, kuros $\sin\frac{1}{x}=1$, t. i., punktos $x=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, f grafiks pieskaras augšējai parabolai. Uzrādīsim $x_1 < x_2$, kuriem $f(x_1) > f(x_2)$. Tas nozīmēs, ka f nav augoša:

$$x_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+4k\pi} < x_2 = \frac{1}{2k\pi},$$

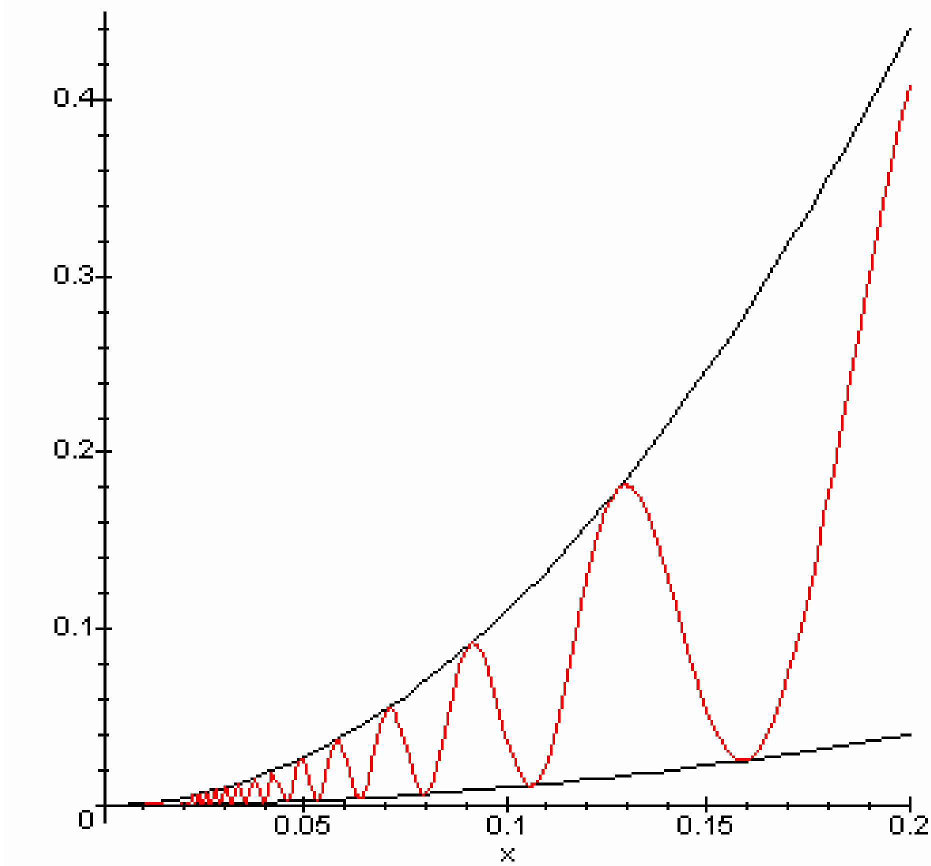
Fiksētam c izvēlēsimies tik lielu naturālu k, lai punkti x_1 un x_2 atrastos intervālā $(0, c)$. Tad

$$f(x_1) = 4x_1^2 > x_2^2 = f(x_2), \text{ jo } 2x_1 > x_2.$$

Funkcijai f līdzīgas funkcijas

$$x^2 + 10x^2 \sin^2\frac{1}{x}$$

grafiks ir parādīts 6. zīmējumā. Koeficients “10” izvēlēts pēc dažiem eksperimentiem ar programmu “Mapple”, lai iegūtu uzskatāmāku grafiku. Nereti gadās, ka noapaļošanas kļūdu dēļ datorprogramma izdod grafiku, kas būtiski atšķiras no funkcijas īstā grafika.



6. zīm. Nepārtraukta funkcija, kura nav izliekta nevienā stingrā minimuma (globālā) punkta apkārtnē.

- **Neparasta virsma**

Viena argumenta funkcijai f piemīt šāda īpašība: ja eksistē tāds pozitīvs skaitlis c, ka visiem x no intervāla $(a,\ a + c)$ ir spēkā $f(a) > f(x)$ un visiem t no intervāla $(a - c, a)$ ir spēkā $f(a) > f(t)$, tad a ir stingra lokālā maksimums punkts. Vai šādas īpašības analogs ir spēkā arī vairākargumentu funkcijām? Vai mēs varam droši zināt, ka divargumentu funkcijai $F(x, y)$ punktā (a, b) ir lokāls maksimums, ja zināms, ka funkcijai F punktā (a, b) ir lokāls maksimums uz katras taisnes, kas iet caur punktu (a, b)?

Pieņemsim, ka mums ir ragaviņas un mēs atrodamies uz kādas virsmas punktā M. Ja neatkarīgi no tā, kādā virzienā mēs braucam, mēs uz kādu brīdi (kaut vai ļoti īsu) braucam uz leju, vai tad no šejienes izriet, ka M ir virsmas augstākais punkts (vismaz lokāli, t. i., salīdzinot ar citiem punktiem no kādas pietiekami mazas punkta M apkārtnes).

Aplūkosim šādu divu mainīgo polinomu

$$P(x, y) = (x^2 - y)(3y - x^2).$$

Koordinātu sākumpunktu apzīmēsim ar O. Uz taisnes $x = 0$ funkcija P minimumu sasniedz punktā O, jo $P(0, y) = - 3y^2$. Arī uz otras koordinātu ass funkcija P minimumu sasniedz punktā O, jo $P(x, 0) = - x^4$. Tagad izvēlamies patvaļīgu taisni $y = kx$, $k \neq 0$, kas iet caur O un aprēķinām polinoma vērtības “uz šīs taisnes”:

$$P(x, kx) = (x^2 - kx)(3kx - x^2) = x^2(x - k)(3k - x).$$

Tā kā reizinājums $(x - k)(3k - x)$ ir negatīvs, kad $x = 0$, kā arī tad, kad x atrodas kādā pietiekami mazā nulles apkārtnē $U(0)$, tad $P(x, kx) \leq 0$ šajā apkārtnē. Un tomēr (0, 0) nav polinoma P maksimuma punkts! Tas tādēļ, ka $P(0, 0) = 0$, bet

$$P\left(x, \frac{x^2}{2}\right) = \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{3x^2}{2} - x^2\right) = \frac{x^4}{4} > 0\,.$$

Vai nav pārsteidzoši, ka, attālinoties no koordinātu sākumpunkta pa j e b k u r u taisni, mēs samazinām savu atrašanās augstumu, bet, attālinoties pa parabolu $y = \frac{1}{2}x^2$, nē?

- Viena argumenta polinomam P ir spēkā īpašība: ja visiem reāliem x: $P(x) > 0$, tad eksistē minimuma punkts, t. i., tāds m, ka $\min P(x) = P(m)$. Piemēram, visiem x ir spēkā:

$$P(x) := x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0 \text{ un } \min P(x) = P(1) = 3.$$

Izrādās, ka šāda īpašība var nebūt spēkā divargumentu polinomam. Aplūkosim piemēru:

$$P(x, y) := x^2y^2 + x^2 - 2xy + 1.$$

Pēc pilno kvadrātu izdalīšanas iegūstam, ka $P(x, y) = (xy - 1)^2 + x^2 > 0$.

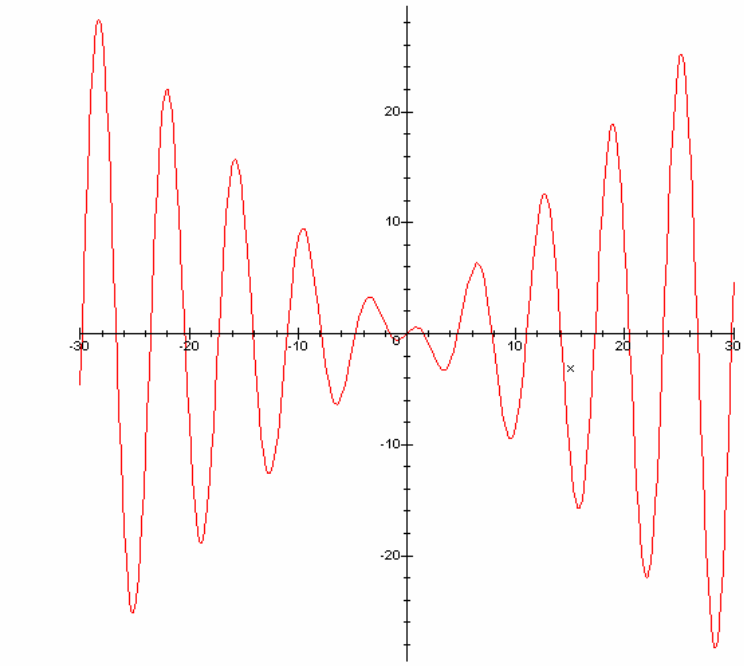
Nevienādība ir stingra, jo abi saskaitāmie nevar būt vienādi ar nulli vienlaicīgi. Tomēr polinomam neeksistē minimuma punkts! Tiešām, izvēloties $y = k,\ x = \frac{1}{k}$, dabūjam, ka pirmais saskaitāmais ir nulle, bet otrais var būt pēc patikas mazs, jo k vietā varam ņemt, piemēram, 10, 100, 1000, utt.

- Funkcijai var būt bezgalīgi daudz lokālo ekstrēmu un tomēr nebūt neviena globālā ekstrēma.

Ideja, šādu funkciju konstruēšanai visai vienkārša. Funkcijai $y = \sin x$ ir bezgalīgi daudz lokālo ekstrēmu, kuri turklāt ir arī globālie ekstrēmi. Lai novērstu to, ka ekstrēmi ir globāli, Y-ass virzienā attiecīgi izstiepjam funkcijas y grafiku. Izstiepšanu var realizēt, piemēram, pareizinot y ar pāra funkciju g, kur

$$g(x) := k,\ x \in [(k-1)\pi,\ k\pi],\ k \in N,\ g(x) = g(-x).$$

Vienkārši uzrakstāms minētā tipa funkcijas piemērs ir: $y = x\cos x$. Ar "Mapple" iegūtā grafika skice parādīta 7. zīm. Šī funkcija nav ierobežota. Vai varat uzrādīt tādu nepārtrauktu, ierobežotu funkciju, kurai ir bezgalīgi daudz lokālo ekstrēmu, bet nav neviena globālā ekstrēma?



7. zīm. Funkcija, kurai ir bezgalīgi daudz lokālo ekstrēmu, bet nav neviena globālā.

2. nodaļa. **Slavenību vārdā nosaukti ekstrēmu uzdevumi**

Šajā nodaļā iepazīsimies ar vairākiem ekstrēmu uzdevumu vēsturē nozīmīgiem uzdevumiem, galvenokārt pievēršoties uzdevumu saturam un pagaidām neinteresējoties par to atrisināšanas metodēm. Aplūkoto uzdevumu saraksts, protams, nepretendē uz pilnību. Detalizētāku informāciju par vairākiem te minētajiem uzdevumiem var atrast V. Tihomirova brīnišķīgajā grāmatā “Stāsti par maksimumiem un minimumiem” [T].

Eiklīda uzdevums
(Euclid, apt. 365 – 300 p. m. ē., sengrieķu matemātiķis.)

Eiklīda slavenajos “Elementos” – cilvēces vēsturē pirmajā zinātniskajā monogrāfijā un pirmajā mācību līdzeklī – atrodams ekstrēmu uzdevums par vislielākā paralelograma izgriešanu no dotā trijstūra, kas mūsdienu redakcijā formulējams šādi: *Dotajā trijstūrī ABC ievilkt paralelogramu ADEF* (*EF* || *AB*, *DE* || *AC*), *kuram ir vislielākais laukums.* [T, 30]

Uzdevumu var atrisināt ar dažādiem paņēmieniem, viens no tiem dots nodaļā “Nevienādība $A \geq G$”. Uzdevums kļūtu sarežģītāks, ja atteiktos no iekavās dotā paralelitātes nosacījuma.

Zēnodora uzdevums
(*Zenodorus*, 3 – 2 gs. p. m. ē., sengrieķu matemātiķis.)
No visiem n-stūriem ar uzdotu perimetru atrast n-stūri ar vislielāko laukumu. [T, 16]

Arhimēda uzdevums
(*Archimedes*, apt. 287 – 212 p. m. ē., sengrieķu matemātiķis, fiziķis.)

Arhimēda sacerējumā “Par lodi un cilindru” ir formulēts un risināts šāds uzdevums:
Atrast lodes segmentu ar vislielāko tilpumu no visiem segmentiem ar uzdotu sfēriskās virsmas laukumu. [T, 31]

Hērona uzdevums
(*Heronus*, 1. gs., sengrieķu matemātiķis.)
Doti divi punkti A un B vienā pusē taisnei l. Uz taisnes l atrast punktu D, lai attāluma no A līdz D un no B līdz D summa būtu vismazākā. [T, 7]

Tartaļjas uzdevums
(*Niccolo Tartaglia*, apt. 1500 – 1557, itāļu matemātiķis.)
Skaitli 8 sadalīt divās daļās, lai to reizinājuma reizinājums ar starpību būtu vislielākais. [T, 39]

Vēsturiskas ziņas un elementārs risinājums ir dots punktā “Kubiska funkcija”.

Galileja uzdevums
(*Galileo Galilei*, 1564 – 1642, itāļu fiziķis, astronoms, matemātiķis.)
Kādā leņķī jāizšauj lādiņš, lai tas aizlidotu vistālāk.
Mācību grāmatā [1)] [Oz, 153] atrodams šāds formulējums:

“Slīpa sviediena tālums aprēķināms pēc formulas $x = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$, kur v_0 ir sākuma ātrums un φ izsviešanas leņķis ar horizontalo virzienu. Noteikt izsviešanas leņķi, lai ar uzdotu sākuma ātrumu v_0 varētu sasniegt vislielāko sviediena tālumu.”

Keplera uzdevums
(*Johannes Kepler*, 1571 – 1630, vācu astronoms, matemātiķis.)
No vienības lodē ievilktiem cilindriem atrast cilindru ar vislielāko tilpumu. Šo uzdevumu Keplers izvirzīja un atrisināja savā darbā “Vīna mucu stereometrija” 1615. gadā. [GT, 170 - 171]

Fermā uzdevums
(*Pierre de Fermat*, 1601 [2)] – 1665, franču jurists, matemātiķis.)
Atrast taisnleņķa trijstūri ar vislielāko laukumu, ja tā katešu garumu summa vienāda ar uzdotu skaitli. [GT, 170]
Risinājumu sk. punktā “Nevienādība $A \geq G$ ”.

Viviāni uzdevums
(*Vincenzo Viviani*, 1622 – 1703, itāļu matemātiķis, fiziķis, Galileja skolnieks.)
Dotas divas paralēles AB un CD, attālums starp kurām ir b, un divi punkti: M uz AB un N uz CD. Uz AB atliek nogriezni ME = a. Kāds taisnes MN punkts I jāsavieno ar punktu E, lai trijstūru EIM un NIF laukumu summa būtu vismazākā? F – taišņu FI un CD krustpunkts. [Zet, 58]

Heigensa uzdevums
(*Christian Huygens*, 1629 – 1695, holandiešu fiziķis, matemātiķis.)
Ja lode L_M ar masu M un ātrumu V ietriecas nekustīgā lodē L ar masu m, tad pēdējā iegūst ātrumu

$$v = \frac{2MV}{m+M}.$$

Izrādās, ka, novietojot starp šīm divām lodēm trešo lodi, var panākt lielāku (nekā v) lodes L ātrumu. Kāda jāņem trešās lodes masa, lai lode L iegūtu maksimālo ātrumu? Līdzīgs jautājums vispārīgā gadījumā: kā jāizvēlas n ložu masas,

$$0 \leq m \leq m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n \leq M,$$

lai pēc to secīgām sadursmēm pēdējā lode L iegūtu maksimālo ātrumu?

No enerģijas un impulsa saglabāšanās likumiem izriet šāds Heigensa uzdevuma matemātiskais modelis:

$$\frac{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}{(m+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_n+M)} \cdot 2^{n+1} V \mapsto \max, \quad x_1, \ldots, x_n \in (m, M)$$

Konspektīvu uzdevuma risinājumu ar diferenciālrēķinu metodēm var atrast V. Zoriča grāmatā [Zor, 468- 469]. Gadījumi ar vienu un divām “starplodēm” aplūkoti 5. nodaļā.

Fermā-Šteinera uzdevums
(*Pierre de Fermat*, 1601 – 1665)
(*Jacob Steiner*, 1796 – 1863, šveiciešu matemātiķis.)
Fermā uzdevums. *Dotajā šaurleņķa trijstūrī ABC atrast punktu P, kura attālumu summa līdz virsotnēm A, B, C ir minimāla.* [Ko, 40]
Šteinera uzdevums. *Atrast plaknē tādu punktu, lai attālumu summa no tā līdz uzdotajiem trīs punktiem būtu vismazākā.* [GT, 170]. Par šo uzdevumu esot interesējies arī izcilais itāļu zinātnieks Kavaljēri (*Bonaventura Cavalieri*, 1598? – 1647).
Dažkārt šo uzdevumu sauc arī par Toričelli (1608 – 1647) uzdevumu, bet punktu, kas dod tā atrisinājumu, par Toričelli punktu.
"Punktu, no kura visas trijstūra virsotnes redzamas vienādā leņķī, pirmais aplūkoja itāļu fiziķis un matemātiķis, Galileja skolnieks Toričelli; pēc viņa vārda to sauc par Toričelli punktu." [EEM5, 310]

Faņano-Švarca uzdevums
(*J. F. Toschi di Fagnano*, 1715 – 1797, itāļu matemātiķis.)
(*Schwarz Carl Hermann Amandus*, 1843 – 1921, vācu matemātiķis.)
Informācija par šo uzdevumu atrodama vairākos avotos. Viens no avotiem, kur citēta arī paša Faņano publikācija "G. F. Fagnano, *Problemata quaedam ad methodum maximorum et minimorum spectantia,* Nova Acta Eruditorum 1775 (publ. 1779), 281-303", ir H. Švarca 150-gadei veltīts raksts [Lau]. Tajā lasām, ka "Marquis Gianfrancesco di Fagnano [6], Archdeacon of Senigallia, had posed the following problem: *Given an acute triangle ABC, among all triangles with one vertex on each side of ABC, determine one of smallest perimeter.* Fagnano solved his problem with the help of calculus."
Šajā rakstā ir uzrādīts arī H. Švarca izteikti ģeometriska rakstura risinājums, kurš balstās uz dotā trijstūra seškāršu atspoguļošanu attiecībā pret to vai citu trijstūra malu. Citu, ne mazāk skaistu atrisinājumu, atrada H. Švarca students Leopolds Fejers (*Fejer*). Šo risinājumu var atrast, piemēram, H. Koksetera klasiskajā grāmatā H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry,* New York-London, 1961. Sk. tās tulkojumu krievu val. [Ko, 38-39], kur Faņano uzdevums formulēts šādi:
Dotajā šaurleņķu trijstūrī ABC ievilkt trijstūri UVW ar vismazāko perimetru.

Biogrāfiskajā rokasgrāmatā [BB, 529] rakstīts, ka Švarcam pieder interesants Faņano teorēmas pierādījums. Tās formulējums:
No visiem trijstūriem, kas ievilkti dotajā šaurleņķu trijstūrī, vismazākais perimetrs ir ortocentriskajam trijstūrim, t. i., trijstūrim ar virsotnēm dotā trijstūra augstumu pamatos.
Faņano uzdevums pazīstams arī kā Švarca uzdevums, sk. [GT, 170]:
Uz katras no uzdotā trijstūra malām atrast pa tādam punktam, lai iegūtajam trijstūrim būtu vismazākais perimetrs.

Elementārās matemātikas enciklopēdijā [EEM5, 321] atrodama informācija, ka uzdevumu:
Dots trijstūris ABC; atrast uz tā malām AB, BC un CA tādus punktus X, Y un Z, ka trijstūra XYZ perimetrs minimāls: XY + YZ + ZX = min.
pirmais (?) esot atrisinājis pazīstamais vācu matemātiķis H. Švarcs.

Spriežot pēc pēdējiem diviem formulējumiem, var rasties iespaids, ka H. Švarcs ir risinājis vispārīgāku uzdevumu, kas arī nosaukts viņa vārdā.

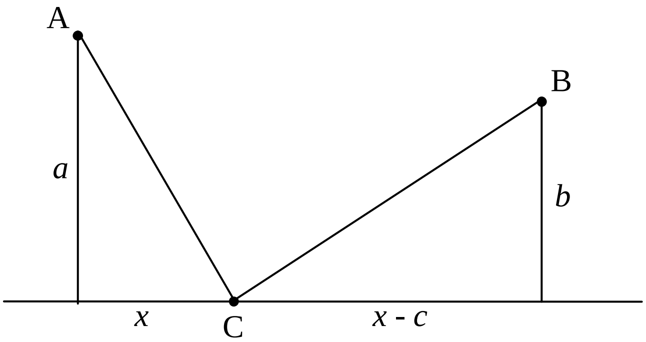
3. nodaļa **Piemēri no dabas**

Ir daudz piemēru, kur dabā novērojams tas vai cits optimalitātes princips, kur kāds process, pat nedzīvajā dabā, notiek visizdevīgākā veidā (minimālā laikā, ar vismazāko resursu patēriņu utt.). Diemžēl vairums no tiem nav aprakstāmi ar elementārās matemātikas līdzekļiem. Ir sastopams pat teiciens, ka ar dabu jārunā diferenciālvienādojumu valodā, ka bez tiem dabu nemaz nav iespējams izprast. Par laimi vairākus piemērus no dabas var ne tikai aprakstīt ar elementārās matemātikas līdzekļiem, bet arī atrisināt ar elementārām metodēm.

Gaismas izplatīšanās

2. nodaļā minētais Hērona uzdevums [T, 7]
Doti divi punkti A un B vienā pusē taisnei t. Uz taisnes t atrast punktu C, lai |AC| + |CB| būtu minimāls
raksturo gaismas stara ekstremālo īpašību: stars no punkta A uz punktu B, atstarojoties punktā C, veic visīsāko ceļu.

Savukārt saskaņā ar Fermā principu gaisma starp diviem punktiem izplatās minimālā laikā. Pēc 8. zīm. var sastādīt šādu Hērona uzdevuma matemātisko modeli: noteikt funkcijas $f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}$ minimuma punktu.



8. zīm.

Vispirms atradīsim minimuma punktu ar algebriskiem paņēmieniem, pierādot šādu nevienādību

$$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}\geq\sqrt{(a+b)^2+c^2}\ .$$

Kāpināsim nevienādības abas puses kvadrātā.

$$a^2+x^2+b^2+(c-x)^2+2\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+(c-x)^2)}\geq(a+b)^2+c^2$$

$$2\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+(c-x)^2)}\geq 2ab+2cx-2x^2$$

$$(a^2+x^2)(b^2+(c-x)^2)\geq\left(ab+x(c-x)\right)^2$$

$$a^2b^2+a^2(c-x)^2+x^2b^2+x^2(c-x)^2\geq a^2b^2+2abx(c-x)+x^2(c-x)^2$$

$$a^2(c-x)^2+x^2b^2-2abx(c-x)\geq 0$$

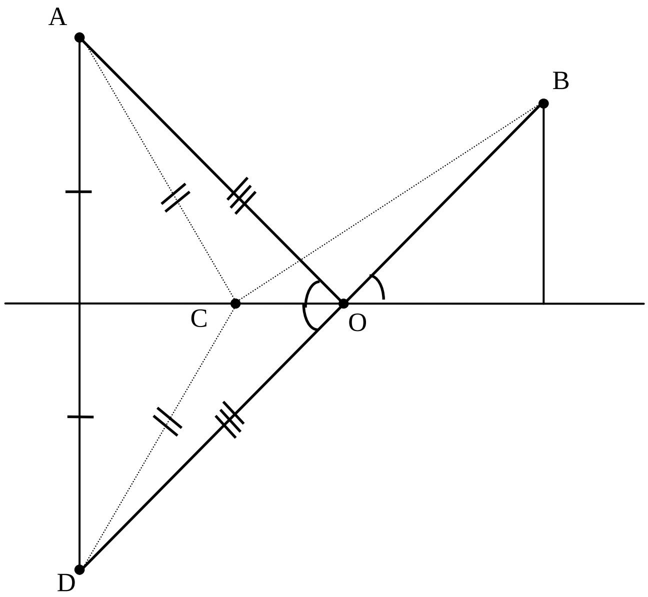
$$\left(a(c-x)-xb\right)^2\geq 0$$

$$\left(ac-(a+b)x\right)^2 \geq 0 .$$

Vienādība tiek sasniegta, ja $x = \dfrac{ac}{a+b}$.

Hērona uzdevumam ir elegants ģeometrisks risinājums, kuru pēc seno grieķu parauga var apzīmēt ar vienu vārdu SKATIES.

AC + CB = DC+CB > DB = AO + OB.



9. zīm.

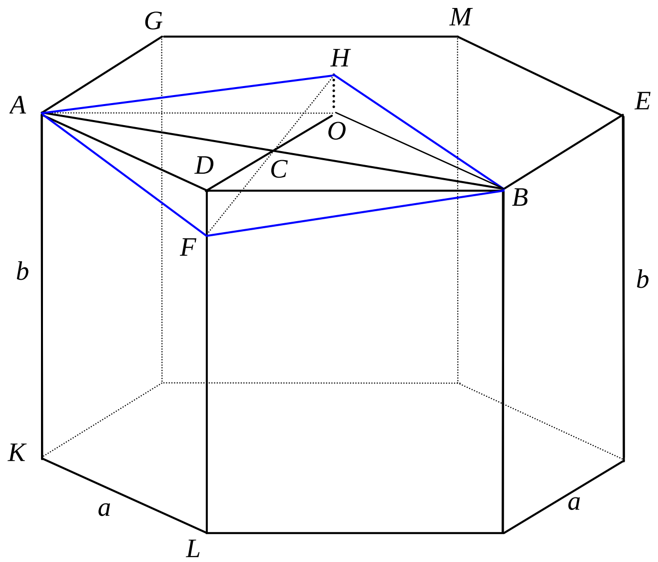
Tātad punkta C optimālais stāvoklis ir tāds punkts O, kurā gaismas stara krišanas un atstarošanās leņķis ir vienādi. Detalizētāk ar Hērona uzdevumu un tā variācijām var iepazīties, piemēram, pēc [T, KR].

Bišu šūnas

Aplūkosim vienu no uzdevumiem (ko elementārā veidā ir risinājis grāmatas ievadā minētais indiešu matemātiķis Ramčandra) par to, kā bites optimizē vaska patēriņu.

Turpmāk tiek sniegts izvilkums no O. Ozola grāmatas [Oz, 158-159], saglabājot autora ortogrāfiju. "Tālāk pievērsīsimies šūnu aizvākošanas jautājumam. Pirmā brīdī varētu domāt, ka aizvākošana visvienkāršāka un visekonomiskāka ar taisniem vākiem, izveidojot šūnas kā taisnas regularas sešstūru prizmas.

Aplūkojot bišu šūnas, redzams, ka šūnas vāks sastāv no trim rombiem, kuri visi saduras virsotnē H. Lai zīmējumu nepadarītu neskaidru, 76. zīm. parādīts tikai viens no šiem rombiem, rombs *AHBF*." (sk. 10. zīm.)



10. zīm.

“Šūnas vāka formu var iedomāties izveidotu no taisnas prizmas, kuras virspamats *AGMEBD*. Nošķelsim, virzot naža plakni caur taisni *AB*, slīpu trijstūra piramidu *ABDF* un uzliksim viņu piramidas *AOBH* vietā. Ja tādu pašu operaciju izdarīsim, šķeļot arī caur *AM* un *BM*, tad šūnas vāka forma ir iegūta.

Pilnīgi skaidrs, ka tikko aprakstītā vāka veidošanas procesā sešstūra prizmas tilpums netika izmainīts.

Apzīmēsim $DF = x$ un jautāsim, kāds jāņem x, lai šūnas virsmas laukums, pie dota tilpuma būtu vismazākais.

Trapezas *AFKL* laukums ir $\dfrac{b+(b-x)}{2}\cdot a = \dfrac{a(2b-x)}{2}$.

Tādu trapezu sānvirsmā ir sešas. Tāpēc sānvirsmas laukums ir $\dfrac{a(2b-x)}{2}\cdot 6 = 3a(2b-x)$.

Romba laukums, kā zināms, ir vienāds ar viņa diagonaļu reizinājuma pusi. Tāpēc romba *AHBF* laukums = $AB\cdot CF$. Tā kā $DC = \dfrac{a}{2}$, tad $AB = 2\sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = a\sqrt{3}$ un $CF = \sqrt{x^2 - \dfrac{a^2}{4}}$.

Romba *AHBF* laukums tātad ir $a\sqrt{3x^2 + \dfrac{3a^2}{4}}$ un visa vāka laukums ir $3a\sqrt{3x^2 + \dfrac{3a^2}{4}}$. Šūnas aplūkojamās daļas kopējā virsma

$$S = 3a(2b-x) + 3a\sqrt{3x^2 + \frac{3a^2}{4}}$$

$$S = 3a\left[2b - x + \sqrt{3x^2 + \frac{3a^2}{4}}\right].$$

Reizinātājs $3a$ un sumands $2b$ funkcijas minima vietu (abscisu) neiespaido. Tāpēc pārrakstām

$$S_1 = -x + \sqrt{3x^2 + \frac{3a^2}{4}}.”$$

Lai noteiktu funkcijas S_1 minimumu, O. Ozols atrod atvasinājumu un, pielīdzinot to nullei, iegūst $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$: "Redzams, ka nevis pie x=0, kas atbilstu šūnas taisnam aizvākojumam, bet pie x=0,345a šūnas sienām tiek patērēts vismazāk vaska. Rūpīgos bišu šūnu pētījumos ir atrasts, ka patiesā šūnu forma ļoti pareizi atbilst mūsu tikko atrastai optimalai formai." [Oz, 159-160]

Atvasinājuma izmantošana nav elementāra metode, turklāt autors aizmirsis (?) pamatot, ka atrastais punkts tiešām dod minimumu. Funkcijas atvasinājums nav atkarīgs no tā, vai mēs meklējam minimumu vai maksimumu. Atvasinājuma pielīdzināšana nullei, tēlaini izsakoties, ļauj tikai izdalīt aizdomās turamos, bet, lai noskaidrotu, vai kāds no tiem ir īstais 'vainīgais' (meklētais ekstrēms), ir vajadzīga papildu izmeklēšana. Var gadīties, ka neviens no aizdomās turamajiem vispār nav vainīgs, t. i., neviens no punktiem, kuros funkcijas atvasinājums ir nulle, nav ne minimuma, ne maksimuma, pat ne lokālā ekstrēma punkts. Funkcijas S_1 minimumu var noteikt ar elementāru paņēmienu, sk., piemēram, punktu "Vērtību kopas lietošana". Populārās sērijas "Bibliotēka skolēnam" grāmatā [Nag, 21-22] dots ne tikai uzdevuma elementārs risinājums, bet vēl atzīmēts, ka leņķis AHB starp šūnu veidojošo rombu malām ir aptuveni $\mathbf{109^o 28'}$… Citi uzdevumi, kur parādās šāds ievērojams leņķis

$$\theta := 2\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{2} = \mathbf{109^o 28'}\ldots$$

ir minēti nodaļā "Nevienādība $A \geq G$". Uzdevuma par bišu šūnu formulējums ir atrodams arī [GK, 116-117].

Gan augstāk citētais O. Ozola, gan K. Šteinera grāmatā dotais formulējums satur maldinošu informāciju par to, kā bites aizvāko šūnu. "Neaizvākotai bišu šūnai ir regulāras sešstūra prizmas forma. Ar medu piepildītu šūnu bites aizvāko tā, lai, nemainot tās tilpumu, izlietotu vismazāk vaska. Rezultātā šūna tiek pārsegta ar daudzskaldni, ko veido trīs vienādi rombi ar kopīgu virsotni. Šo daudzskaldni iegūst, ja uz prizmas ass virs augšējā pamata izraugās punktu P, prizmas augšējā pamatā novelk trīs īsākās diagonāles un caur katru no šīm diagonālēm un punktu P velk plakni. Kādam ir jābūt romba virsotnes leņķim, lai aizvākotas šūnas virsmas laukums būtu vismazākais? (Izteikt virsmas laukumu kā funkciju $Q = Q(x)$, kur x ir romba mala; atrisinājumā var izmantot šādus apzīmējumus: a – sešstūra mala, h – lielākās sānu šķautnes garums.) [Š1, 193]

Nav tiesa, ka ar medu piepildītu šūnu bites aizvākotu ar trīs rombiem, vismaz pie 'civilizētām' bitēm man to nav gadījies redzēt. Redzams ir kas cits. Aizvākotās šūnas vāciņš diezgan precīzi atbilst plaknes daļai, bet minētie rombi ir novērojami citur, proti, pie vaska plātnes pamata, no kuras uz abām pusēm tiek veidotas šūnas. Starp citu, dravnieki izmanto mākslīgi (rūpnieciski) izgatavotas vaska plātnes.

Vaska ekonomiju bišu šūnās var saskatīt, risinot vairākus citus uzdevumus. No regulāriem n-stūriem plaknes pārklāšanai derīgi ir tikai trijstūri, kvadrāti un sešstūri. Kurai no šīm trim figūrām, kas apvilktas ap uzdotu riņķi, ir vismazākais perimetrs? Viegli noskaidrot, ka sešstūrim. Riņķa izvēle pamatota ar to, ka bitei jāvar iekļūt šūnā, ka bites "šķērsgriezums" pietiekami precīzi atbilst šim riņķim. Ar bišu šūnām cieši saistīts klasiskais uzdevums par plaknes sadalīšanu vienāda laukuma apgabalos tā, lai apgabalu kopējais perimetrs būtu vismazākais.1)

Elektriskā strāva

Elektriskā strāva I sazarojumā sadalās tā, ka kopīgais siltuma daudzums, kas izdalās paralēli saslēgtās pretestībās R_1 un R_2, ir minimāls, sk. 11. zīmējumu. Siltuma daudzumu Q pēc Džoula-Lenca likuma var izteikt kā:

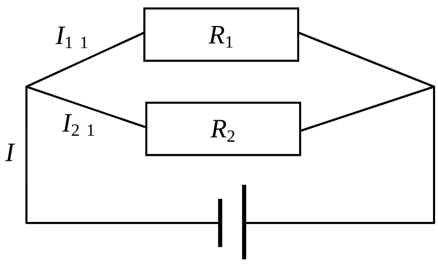
$$Q = kI_1^2 R_1 t + kI_2^2 R_2 t\,,$$

kur k – proporcionalitātes koeficients, t – laiks un $I = I_1 + I_2$ – pēc Kirhofa likuma. Detalizēts izvedums ir dots grāmatā [Š2, 74] Atbilstošais ekstrēmu uzdevums ir šāds:

$$x + y = I,$$

$$\min(px^2 + qy^2) = ?$$

un pēc x vai y izslēgšanas iegūstam kvadrātfunkciju. Minētajā mācību grāmatā kvadrātfunkcijas minimuma noteikšanai izmantoti pirmie divi atvasinājumi.



11. zīm.

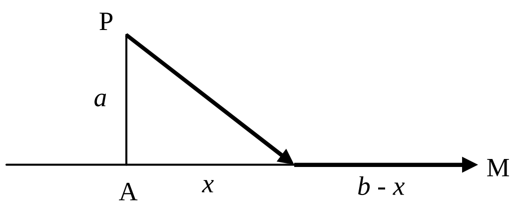
Baložu lidojums

Virs ūdens palaists mājas balodis lido uz savu mājvietu tā, lai patērētu iespējami maz enerģijas.

Mājas baloži izvairās lidot pāri lielām ūdenstilpēm. Viens no izskaidrojumiem ir tāds, ka lidošana virs ūdens prasa lielāku enerģijas patēriņu nekā lidošana virs sauszemes. [LM, 669]

Pieņemsim, ka e_1 un e_2 ($e_1 < e_2$) ir enerģijas patēriņš laika vienībā attiecīgi virs sauszemes un virs ūdens un ka tas ir proporcionāls nolidotajam attālumam. Tad iegūsim šādu ekstrēmu uzdevumu, sk. 12. zīmējumu.

$$\min\left(\mathrm{e}_2\sqrt{a^2 + x^2} + \mathrm{e}_1(b - x)\right) = ?$$



12. zīm.

Enerģiju raksturojošā funkcija, kurai jāmeklē minimums, pēc būtības ir tāda pati kā funkcija S_1 uzdevumā par bišu šūnu. Tās minimumu var noteikt ar elementāru paņēmienu, sk., piemēram, punktu “Vērtību kopas izmantošana”.

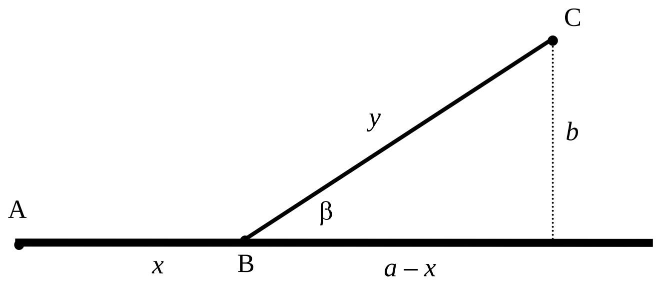
Atbilde. Minimuma punkts ir: $x_{\min} = \dfrac{a}{k-1}$, kur $k = \dfrac{e_2}{e_1}$.

Piezīme. Grāmatā [LM, 669] uzdevumu piedāvāts risināt šādām koeficientu vērtībām: $a = 1$, $b = 2$ (jūdzes), $k = \frac{4}{3}$.

Artēriju tīkls

Galvenās artērijas un atzara savstarpējais izvietojums minimizē enerģijas zudumus cilvēka (zīdītāju) asins cirkulācijas sistēmā.

Atzaram jāsavieno punkts C, sk. 13. zīm., ar galveno artēriju. Kurā vietā B jāsākas atzaram, lai enerģijas zudumi asins cirkulācijas sistēmā būtu vismazākie?



13. zīm.

Pēc Puazeiļa (Jean L. M. Poiseuille, 1799 - 1869), franču fiziologs) likuma enerģijas zudumi E artērijā ir tieši proporcionāli artērijas garumam g un apgriezti proporcionāli tās rādiusa R ceturtajai pakāpei, t. i., $E = \frac{kg}{R^4}$, kur k – proporcionalitātes koeficients. Saskaņā ar šo likumu un zīmējumu iegūsim, ka kopējie enerģijas zudumi galvenajā artērijā AB un tās atzarā BC ir: $E = \frac{kx}{R^4} + \frac{ky}{r^4}$, kur r – atzara rādiuss, $r < R$. Izteiksim E kā funkciju no leņķa β:

$$y = \frac{b}{\sin\beta};\ \frac{a-x}{y} = \cos\beta \Rightarrow x = a - \frac{b\cos\beta}{\sin\beta} \Rightarrow E = k\left(\frac{a - b\,\mathrm{ctg}\beta}{R^4} + \frac{b}{r^4\sin\beta}\right).$$

Piezīme. Enerģijas zudumi šādā formā ir iegūti grāmatā [Hur, 178] Turklāt, lai noteiktu funkcijas E minimumu, grāmatas autors atrod šīs funkcijas pirmā atvasinājuma sakni un piemetina, ka tā atrastais lokālais minimums patiesībā ir absolūtais minimums.

Atradīsim funkcijas E minimuma punktu elementārā veidā. Ievērosim, ka funkcija E minimumu sasniedz tajā pašā punktā, kurā funkcija $\frac{b}{\sin\beta}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{\cos\beta}{R^4}\right)$. Iekavās iekļautais lielums ir nenegatīvs, jo leņķis β ir šaurs un $r < R$. Tātad šis lielums būs vismazākais (vienlaicīgi ar E), ja $\cos\beta = \left(\frac{R}{r}\right)^4$.

4. nodaļa. Ekstrēmu uzdevumu risināšanas elementārās metodes un paņēmieni

Īss metožu apskats

Ar elementārām metodēm parasti saprot tādas metodes, kurās neizmanto diferenciālrēķinus. Elementārās metodes ir derīgi zināt un izmantot ne tikai skolotājiem un viņu skolēniem, bet arī studentiem, kuri jau ir “iesvētīti” matemātiskās analīzes noslēpumos. Tā saucamās universālās metodes ar vienveidīgu pieeju ļauj risināt ļoti dažāda satura uzdevumus. Sava universālā rakstura dēļ šīs metodes neņem vērā konkrētā uzdevuma īpatnības. Tomēr konkrētā uzdevuma īpatnības ir tieši tas, kas nereti dod iespēju atrisināt uzdevumu vienkāršāk, īsāk un elegantāk, nekā izmantojot vispārīgās metodes. Kā saka, nav ko šaut uz zvirbuļiem ar lielgabalu.

Natansona brošūrā [Nat, 4], kā atzīmē pats autors, izmantots ļoti ierobežots algebrisko līdzekļu asortiments: vienkāršākās kvadrāttrinoma īpašības un nevienādība, kas saista aritmētisko un ģeometrisko vidējo. Tas darīts iespējami vienkāršāka izklāsta dēļ.

Mācību līdzeklī [BM], kas domāts 8.– 10. klašu skolēniem, vēl ir aplūkota metode – “Funkcijas vērtību kopas izmantošana” un daži paņēmieni vienkāršāko lineārās plānošanas (programmēšanas) uzdevumu risināšanai.

Elementārās ekstrēmu uzdevumu risināšanas metodes ir aplūkotas pat *zinātniskos* rakstos. Piemēram, rakstā “Daži paņēmieni funkcijas ekstremālo vērtību atrašanā” [GG] ilustrēti daži šādi paņēmieni, tomēr tie nav nedz nosaukti, nedz jauni, turklāt rakstā nav atsauču uz literatūru.

Skolēniem un skolotājiem ieteicamajā grāmatā [VG, 5] galvenokārt diskrētās optimizācijas uzdevumu risināšanai ir piedāvātas šādas metodes: atbalsta funkcijas metode, novērtējuma metode, pārlases metode, plaknes pārveidošanas metode.

Darbā [VR] bez jau I. Natansona brošūrā minētajām divām metodēm aplūkotas arī dažas citas metodes, sk. paragrāfus ar nosaukumiem: ”Trešās pakāpes funkcijas $y=ax^3+bx^2+cx+d$, $a \neq 0$, ekstrēmi; Trigonometriskās funkcijas; Dažas specifiskas algebriskas funkcijas.” Uzrādīti paņēmieni, kā noteikt ekstrēmus vispārīgā veidā uzdotām trigonometriskām funkcijām:

$$y = a\cos x + b\sin x; \quad y = a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x$$

Aplūkoti atsevišķi funkcijas $\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ piemēri, bet nav analizēts jautājums par šādas funkcijas ekstrēmu noteikšanu patvaļīgu koeficientu gadījumā.

Paragrāfā “Ekstrēmu uzdevumu risināšanas metožu minimums matemātikas olimpiādēs” [VR] lasāms, ka

“Galvenās metodes, kuras izdodas izdalīt literatūrā sastopamajos uzdevumos, ir sekojošas.

1. Ekstrēmu uzdevumu risināšana, izmantojot nevienādības.
   - 1.1. Nevienādība $x^2 \geq 0$.
   - 1.2. Nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.
   - 1.3. Nevienādības starp citiem vidējiem lielumiem.
   - 1.4. Košī-Bunjakovska nevienādība.[1)]
   - 1.5. Čebiševa nevienādība.

1.6. Jensena nevienādība.
2. Ģeometriskas interpretācijas lietošana.
    2.1. Lauztas līnijas garums.
    2.2. Attālumu summa.
    2.3. Laukums.
3. Funkcijas vērtības pakāpeniska monotona mainīšana, izvēloties piemērotā veidā argumenta vērtības.
4. Funkcijas aizstāšana ar to mažorējošu funkciju.
5. Ekstrēma atrašana, konstruējot algoritmu tā meklēšanai.
6. Ekstrēma atrašana, lietojot zināmas funkciju īpašības (sevišķi kvadrāttrinoma īpašības).
7. Ekstrēma atrašana, izmantojot naturālu skaitļu un to nevienādību īpašības.
8. Ekstrēma pētīšana, izmantojot funkciju vērtības speciālā veidā izvēlētos punktos."

Lai izvērstu visu šo konspektīvā formā minēto paņēmienu vai metožu izklāstu, būtu nepieciešami vairāki mācību līdzekļi. Piemēram, ko gan izsaka viens vārds "Laukums" kā kaut kāda abstrakta metode, ja mēs neredzam attiecīgos lietojuma piemērus? Pazīstams teiciens, ka nav iespējams iemācīties peldēt, neielienot ūdenī. Līdzīgi nav iespējams apgūt kādu metodi, nelietojot to uzdevumu risināšanā.

Uzdevumu atlase, lai ilustrētu to vai citu metodi, ir visai nosacīta. Tā, vispārīgi runājot, ir atkarīga no autoru izvēles un viņiem pieejamās informācijas avotiem. Viens un tas pats uzdevums var noderēt vairāku metožu ilustrēšanai, un otrādi, kāda grūtāka uzdevuma risināšanā bieži vien nākas lietot vairākas metodes.

Vai pastāv kāda universāla recepte, ar kuras palīdzību var atrisināt jebkuru ekstrēmu uzdevumu? Rakstveida receptes ir, tiesa, tās ne vienmēr izdodas realizēt. Vēl vairāk, pat tad, ja tās iespējams realizēt, ne vienmēr ir lietderīgi to darīt. Piemēram, [ZS, 201] apgalvots:

Tādējādi, lai noteiktu funkcijas $y = f(x)$ vislielāko un vismazāko vērtību intervālā $[a;b]$, kuru pieraksta

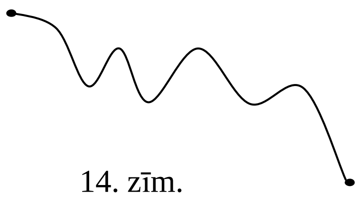
$$\max_{[a;b]} f(x) \quad un \quad \min_{[a;b]} f(x),$$

1. *jānosaka ekstrēmu punkti (intervālā $(a;b)$) un funkcijas vērtības tajos;*
2 *jāaprēķina funkcijas vērtības intervāla galapunktos;*
3. *no visām iegūtajām funkcijas vērtībām jāizvēlas vislielākā un vismazākā vērtība.*

Studentiem paredzētos mācību līdzekļos ir atrodamas šāda satura receptes [2)]:

Lai slēgtā intervālā $[a; b]$ atrastu nepārtrauktas funkcijas f vislielāko un vismazāko vērtību, ir jāizdara šādas darbības.
1. *Jāatrod šīs funkcijas visi kritiskie punkti, kas atrodas intervālā $[a; b]$.*
2. *Jāaprēķina funkcijas vērtības kritiskajos punktos.*
3. *Jāaprēķina funkcijas vērtības intervāla galapunktos.*
4. *No iegūtajām vērtībām jāizraugās vislielākais un vismazākais skaitlis.*

Šķiet, būtu muļķīgi izmantot šādas kategoriskā formā izteiktas receptes, nosakot, piemēram, *sinusa* vai konstantas funkcijas ekstrēmus, teiksim, intervālā $[-2007, 2008]$. Var uzrādīt arī tādus piemērus, kad tā nebūs realizējama (vismaz analītiski), tomēr funkcijas vislielāko un vismazāko vērtību atrast var pavisam vienkārši. Konstrukcijas ideja – izvēlēties funkciju, kurai maksimums un minimums acīmredzami ir intervāla galapunktos, – atspoguļota 14. zīmējumā.



14. zīm.

Noderīgi paņēmieni ekstrēmu noteikšanā ir funkcijas aizstāšana ar tās:

- **kvadrātu** vai kādu citu piemērotu funkciju;
- **pretējo funkciju;**
- **apgriezto lielumu**.

Šai sakarā noskaidrojiet, kuras vienādības ir pareizas:

$$\max f = \min \frac{1}{f}$$

$$\max f \cdot \min \frac{1}{f} = 1$$

$$\min f \cdot \max \frac{1}{f} = 1$$

$$\max f = \min(-f)$$

$$\min f = \max(-f)\,.$$

<u>1. piemērs</u>. Atrast funkcijas $y = \sin x + \cos x$ ekstremālās vērtības.

$$y^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x \Rightarrow y^2 \le 2 \Rightarrow |y| \le \sqrt{2} \Rightarrow$$
$$-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}\,.$$

Ekstremālās vērtības tiek sasniegtas attiecīgi punktos

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \; k \in Z\,.$$

<u>2. piemērs</u>. Atrast vismazāko vērtību izteiksmei $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y}$, ja x, y un z ir pozitīvi skaitļi un $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (Vissavienības XXII olimpiādes uzdevums.)

Apzīmēsim attiecīgi ar a, b un c dotās izteiksmes trīs saskaitāmos. Tad jāmeklē minimums funkcijai $f = a + b + c$, ja $ab + ac + bc = 1$. Tā kā

$$f^2 - 3 = (a+b+c)^2 - 3(ab+ac+bc) = \frac{1}{2}\left((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2\right)$$

ir negatīvs lielums, tad $f^2 \ge 3 \Rightarrow \min f = \sqrt{3}$. Vienādība tiek sasniegta, ja

$$a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

<u>Piezīme</u>. 6. nodaļas 49. uzdevums ir vēl viens netriviāls piemērs, kur kāpināšana kvadrātā ir visai noderīgs paņēmiens.

<u>3. piemērs</u>. (Monotonitātes izmantošana.)

Aprēķināt funkcijas $y(x) = \sqrt{x^2 + a^2} - x,\; x \in [0, \infty),$ maksimumu.

Pierādīsim, ka $\max y(x) = |a|$. Skaidrs, ka $\max y(x) = 0$, ja $a = 0$. Ja a nav nulle, tad y ir dilstoša, jo $\sqrt{x^2 + a^2} - x = \dfrac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2} + x}$ un saucējā esošā funkcija apskatāmajā intervālā ir augoša. Tātad $\max y(x) = y(0) = |a|$.

Vērtību kopas izmantošana

Vispirms iepazīsimies ar vispārīgu šīs metodes raksturojumu:
"Ļoti noderīgs ir šāds paņēmiens: lai noteiktu funkcijas y = f(x) ekstremālās vērtības, uzraksta vienādojumu f(x) – y = 0, kurā y ir parametrs, un atrod parametra tās vērtības, ar kurām vienādojumam attiecībā uz x eksistē atrisinājums. Rezultātā tiek iegūta funkcijas vērtību kopa, pēc kuras arī nosaka funkcijas ekstremālās vērtības....Ar šo paņēmienu var atrast ekstremālās vērtības ļoti daudzām dažāda izskata funkcijām." [GG] Pēdējo izteikumu derētu komentēt, vai tas attiecas tikai uz tādām funkcijām, kuras reducējamas uz kvadrātvienādojumu. Citētā raksta autori metodes (vai paņēmiena) ilustrēšanai izvēlējušies šādus divus pamācošus piemērus: atrast vismazāko un vislielāko vērtību funkcijai

$$y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{6x^2 - 7x + 3} \text{ un funkcijai } z = 3x - 2y, \text{ ja } 3x^2 - xy + 2y^2 = 23.$$

Pirmajā piemērā iegūst kvadrātvienādojumu attiecībā pret x:

$$(6y + 1)x^2 - (7y + 2)x + 3y + 1 = 0,$$

kuram eksistē atrisinājums tad, kad diskriminants ir nenegatīvs, t. i.,

$$(7y+2)^2 - 4(6y+1)(3y+1) = -23y^2 - 8y \geq 0 \Rightarrow -\frac{8}{23} \leq y \leq 0.$$

Ievēro, ka $\max y = y(1) = 0$, $\min y = y\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{8}{23}$.

Arī otrajā piemērā iegūst kvadrātvienādojumu attiecībā pret x:

$$y = \frac{3x - z}{2} \Rightarrow 3x^2 - x\cdot\frac{3x-z}{2} + 2\left(\frac{3x-z}{2}\right)^2 = 23 \Rightarrow 12x^2 - 5xz + z^2 - 46 = 0,$$

kuram eksistē atrisinājums tad, kad tā diskriminants ir nenegatīvs, t. i.,

$$D = 23(96 - z^2) \geq 0 \Rightarrow |z| \leq \sqrt{96}.$$

Mācību līdzeklī [BM] šī metode aplūkota paragrāfā ar nosaukumu "Funkciju vērtību kopas analīze", kur neērtā pierakstā izklāstīti šādu četru uzdevumu risinājumi:

Dota funkcija $\frac{x+2}{x-3}$. Atrodiet vērtību kopu.

Atrast vērtību kopu funkcijai $y = \frac{x}{1+x^2}$.

Atrast vismazāko vērtību izteiksmei $\frac{1+x^2}{1+x}$, ja $x \geq 0$.

Atrast vislielāko vērtību funkcijai $3x + 4\sqrt{1-x^2}$.

Mācību līdzeklī [VR] šī metode atstāta bez nosaukuma, toties tā lietota samērā daudzu uzdevumu risināšanā. Raksturīgi piemēri ir dalījuma $\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$ konkretizācija, izvēloties piemērotas koeficientu skaitliskās vērtības: "Lai noteiktu šāda veida funkcijas ekstrēmus, palīdz prasme noteikt funkcijas vērtību apgabalu.

Doto funkcijas vienādojumu pārveidosim par kvadrātvienādojumu attiecībā pret x: $(a_2y-a_1)x^2+(b_2y-b_1)x+(c_2y-c_1)=0$
Lai šim vienādojumam eksistētu reālas saknes, jābūt $D \geq 0$."

Jautājums par to, vai metode ir derīga jebkurai koeficientu izvēlei, nav analizēts. Turpmāk tiks aplūkoti divi uzdevumi (4. un 5.), kuri ilustrēs šīs metodes trūkumus.

1. uzdevums. Atrast funkcijas $y = t + \frac{1}{t}$ vērtību kopu.

Aplūkosim vienādojumu

$$yt = t^2 + 1,\ \ t^2 - yt + 1 = 0.$$

Lai vienādojums būtu atrisināms visiem t, tā diskriminantam jābūt nenegatīvam:

$$D = y^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow |y| \geq 2,$$

kas nozīmē, ka funkcijas y vērtību kopa ir $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

2. uzdevums. Aprēķināt dalījuma $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ ekstremālās vērtības.

Apzīmēsim šo dalījumu ar y. Tad

$$yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$$

$$x^2(y - 1) + x(y + 1) + y - 1 = 0.$$

Lai kvadrātvienādojums būtu atrisināms visiem x, tā diskriminantam jābūt nenegatīvam.

$$D = (y + 1)^2 - 4(y - 1)^2 \geq 0$$
$$-3y^2 + 10y - 3 \geq 0$$
$$(y - 3)(1 - 3y) \geq 0,$$
$$\frac{1}{3} \leq y \leq 3.$$

Tātad dalījuma y vismazākā un vislielākā vērtība ir attiecīgi $\frac{1}{3}$ un 3. Norādīsim arī punktus, kuros tās tiek sasniegtas: $x = 1$ un $x = -1$.

3. uzdevums. Atrast minimumu funkcijai $y = \sqrt{3x^2 + \frac{3a^2}{4}} - x$, ja a ir dots pozitīvs skaitlis.

Pārveidojam doto izteiksmi:

$$4(y + x)^2 = 12x^2 + 3a^2 \Rightarrow 8x^2 - 8yx + 3a^2 - 4y^2 = 0.$$

Lai iegūtais kvadrātvienādojums būtu atrisināms visiem x, tā diskriminantam D jābūt nenegatīvam.

$$D = 64y^2 - 32(3a^2 - 4y^2) = 96(2y^2 - a^2) \geq 0 \Rightarrow |y| \geq \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Tā kā funkcija y pieņem tikai pozitīvas vērtības, tad

$$\min y(x) = y\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Piezīme. Šāda funkcija y rodas uzdevumā par bišu šūnu, kurš aplūkots punktā “Piemēri no dabas”. Ar augstāk izklāstīto paņēmienu uzdevums atrisināts populārās sērijas “Bibliotēka skolēnam” grāmatā [Nag, 21-22]. Grāmatā [Oz, 158-160] funkcijas minimums atrasts, iztiekot bez stingra pamatojuma, ar atvasinājuma palīdzību.

4. uzdevums. Pozitīviem x aprēķināt ekstremālās vērtības funkcijai

$$y = \frac{x}{x^2 + 6x + 8}.$$

Anniņa. Pārveidoju doto sakarību par kvadrātvienādojumu attiecībā pret x:

$$yx^2 + 6yx + 8y = x \Rightarrow yx^2 + (6y - 1)x + 8y = 0 \Rightarrow D = (6y - 1)^2 - 32y^2 \Rightarrow$$
$$D = 4y^2 - 12y + 1.$$

Lai kvadrātvienādojumam būtu atrisinājums, tā diskriminantam jābūt nenegatīvam. Atrodu vienādojuma $4y^2 - 12y + 1 = 0$ saknes:

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{4} = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2}.$$

Secinu, ka funkcijas y vismazākā vērtība ir $y_1 = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$ un vislielākā – $y_2 = \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

Jānītis. Anniņa kaut kur ir pieļāvusi kļūdu, jo es varu iegūt vēl mazāku y vērtību. Ņemot $x = 0$, dabūju $y = 0$.

Maijiņa. Redzam, ka metode, ko lietojusi Anniņa, neder. Atliek secināt, ka dotajai funkcijai nav ekstrēmu.

Pēterītis. Maijiņa kļūdās. Dotajai funkcijai minimums ir tieši 0, jo acīmredzami, ka $y \geq 0$ visiem dotajiem $x \geq 0$.

Paijiņa. Metode tomēr der, jo $y = \dfrac{x}{x^2 + 6x + 8} \leq \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

Kā šo uzdevumu risinātu jūs?

Īss šī uzdevuma risinājums ir dots nodaļā “Nevienādība $A \geq G$ ”.
Tas, ko Anniņa uzskatīja par minimumu, izrādīsies, ir maksimums.

No šī pamācošā piemēra redzams, ka metodes neuzmanīga lietošana var sagādāt pārsteigumus pat tad, kad attiecīgā kvadrātvienādojuma diskriminants ir nenegatīvs.

Augstāk citētie piemēri attiecas tikai uz gadījumiem, kad, risinot nevienādību $D \geq 0$, tiek iegūti ierobežojumi uz y. Aplūkosim vienkāršu piemēru, kad tā nav.

5. uzdevums. Aprēķināt funkcijas $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ minimumu, ja $x \geq 0$.

Sastādām kvadrātvienādojumu:

$$x^2 - yx - y - 1 = 0 \;\Rightarrow\; D = y^2 + 4y + 4 = (y + 2)^2 \geq 0.$$

Tātad diskriminants ir nenegatīvs visām y vērtībām, tomēr tas vēl nenozīmē, ka funkcijai y nav minimuma. Dotās funkcijas minimumu var atrast pavisam vienkārši:

$$y = x - 1 \Rightarrow \min y = y(0) = -1.$$

Tēma ‘minipētījumam’

Izanalizēt šajā punktā aplūkotās metodes iespējas (trūkumus, grūtības), meklējot ekstrēmus, piemēram, šādām vispārīgā veidā uzdotām funkcijām:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} + kx; \quad \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}; \; ax + by, \text{ ja } px^2 + qy^2 = d;$$
$$ax + by + cz, \text{ ja } px^2 + qy^2 + rz^2 = d.$$

5. nodaļa. **Kvadrātfunkcija**

Kvadrātfunkcijai skolas matemātikā tiek veltīta īpaša uzmanība.
Daudzus ekstrēmu uzdevumus var reducēt uz kvadrātfunkcijas ekstrēmu noteikšanu, kas pamatojas uz šādām divām svarīgām funkcijas *y* īpašībām:

- Funkcijai
$$y = ax^2 + bx + c, \ a \neq 0,$$
ekstrēms ir punktā $x = -\frac{b}{2a}$ – maksimums, ja $a < 0$, un minimums, ja $a > 0$.
- Funkcijas $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, sakņu vidējais aritmētiskais ir tās ekstrēma punkts: maksimuma punkts, ja $a < 0$, un minimuma punkts, ja $a > 0$.
- Ja kvadrātfunkcija ir formā $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, tad ekstrēmu aprēķināšanā ērti lietot formulas:

$$\min y(x) = -\frac{a}{4}(x_1 - x_2)^2, \text{ ja } a > 0$$

$$\max y(x) = -\frac{a}{4}(x_1 - x_2)^2, \text{ ja } a < 0.$$

Pierādījums ir ļoti vienkāršs. Pirmā īpašība izriet no pārveidojuma

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

bet otrā – no Vjeta teorēmas, saskaņā ar kuru sakņu summa $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ un tātad sakņu vidējais aritmētiskais $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$. Trešā īpašība iegūstama ar tiešu pārbaudi, ņemot $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

1. uzdevums. Atrast min *xy*, ja $x - y = k$.

Izteiksim $y = x - k$ un iegūsim kvadrātfunkciju $x(x - k)$. Tai sakņu viduspunkts $x_v = \frac{0 + k}{2} = \frac{k}{2}$ ir meklējamā minimuma punkts. Atbilde: $\min xy = -\frac{k^2}{4}$.

Mācību līdzekļos [KZZ, 161; Š1, 191] uzsvars likts uz gadījumu, kad starpība $k = 5$: “Noteikt divus skaitļus, kuru starpība ir vienāda ar 5, bet reizinājums ir vismazākais.”

2. uzdevums. extr xy = ?, ja $x - y = 1$.

Šeit reizinājumam $xy = x(x - 1)$ maksimālā vērtība neeksistē, bet minimālā ir (– 0,25), sk. iepriekšējo uzdevumu.

3. uzdevums. *Stieple ar garumu 80 cm jāsaliec taisnstūrī tā, lai šī taisnstūra laukums būtu vislielākais.* [Vig1, 195; uzdevums atrisināts ar diferenciālrēķinu palīdzību]

Nodomāts ierīkot taisnstūrveidīgu aploku. Materiāls sagādāts 600 *m gara žoga uzcelšanai. Kāds jāizvēlas aploka garums un platums, lai ar rīcībā esošo materiālu varētu iežogot vislielāko ganību laukumu? Kādi jāņem iepriekšējā piemērā minētā aploka izmēri, ja aploks jāiežogo tikai no trim pusēm, tādēļ ka tas pieslejas taisnas upes krastam.* [Oz, 155]

Abus šos vienkāršos uzdevumus autors risina ar atvasinājuma palīdzību, nepamatojot izvedumu korektību.

No esošajiem dēļiem var uzbūvēt 200 *m garu žogu. Ar šo žogu nepieciešams ierobežot taisnstūrveida pagalmu ar vislielāko laukumu, izmantojot vienai pagalma malai rūpnīcas sienu.* [Nat, 13]

Kāds ir lielākais laukums taisnstūrim, kura trīs malu summa ir 200 m? [VR, 10-11]

Taisnstūra malas apzīmējam ar x un y, laukumu un perimetru – attiecīgi ar L un P. Tad $P = 2x + 2y$ un jānosaka maksimums kvadrātfunkcijai:

$$L = xy = x\left(\frac{P}{2} - x\right).$$

Maksimuma punkts ir sakņu viduspunkts: $x_{\max} = \frac{P}{4} \Rightarrow y = \frac{P}{4}$, t. i., maksimālais taisnstūris ir kvadrāts.

Ja ir uzdota trīs malu summa $S = 2x + y$, tad

$$L = xy = x(S - 2x) \Rightarrow x_{\max} = \frac{S}{4} \Rightarrow y = \frac{S}{2}$$

<u>4. uzdevums</u>. Atrast ekstremālās vērtības reizinājumam xy, ja $ax + by = k$, kur a, b un k doti reāli skaitļi.

Apzīmēsim $u = ax$, $v = by$ un atrisināsim dotajam uzdevumam līdzvērtīgu uzdevumu, pieņemot, ka $ab \neq 0$, t. i.,

$$u + v = k, \ \text{extr}\,\frac{uv}{ab} = ?$$

Parabola $u(k - u)$ ekstremālo vērtību sasniedz tās virsotnē $u = \frac{k}{2}$, tāpēc

$$\max uv = \max u(k - u) = \frac{k^2}{4}.$$

No šejienes, ņemot vērā reizinājuma ab zīmi, iegūstam šādu atbildi.

Ja $ab > 0$, tad $\max xy = \frac{k^2}{4ab}$, bet minimums neeksistē.

Ja $ab < 0$, tad $\min xy = \frac{k^2}{4ab}$, bet maksimums neeksistē.

Ja $ab = 0$, tad extr xy neeksistē.

<u>5. uzdevums</u>. (Uzdevums par Normandijas logu) *Normandijas loga forma ir taisnstūris ar pusaploci augšā. Dots ir loga perimetrs. Kādi jāņem loga izmēri, lai logs izlaistu visvairāk gaismas?* [Oz, 160; GL, 328; Ze, 51]

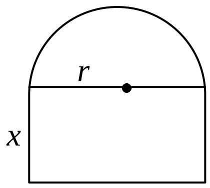
Apzīmēsim taisnstūra augstumu ar x, riņķa rādiusu ar r, doto perimetru ar P un laukumu ar L. Tad, sk. 15. zīmējumu,

$$P = 2x + 2r + \pi r; \ L = 2rx + \frac{\pi r^2}{2} \mapsto \max$$

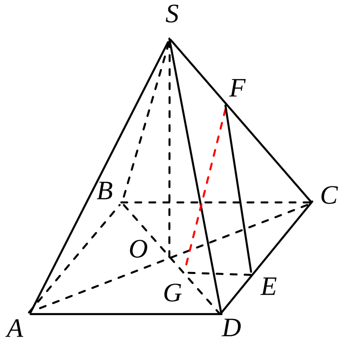
Izsakām $2x$ un ievietojam to laukuma formulā:

$$L = (P - 2r - \pi r)r + \frac{\pi r^2}{2} = (P - 2r - \frac{\pi r}{2})r = \frac{r}{2}\big((2P - (4 + \pi)r\big).$$

Šai parabolai saknes ir 0 un $\frac{2P}{4+\pi}$, un to vidējais aritmētiskais $\frac{P}{4+\pi}$ ir maksimuma punkts. Atbilde: optimālajam logam aploces rādiuss vienāds ar taisnstūra augstumu, t. i., $r = x = \frac{P}{4+\pi}$.



15. zīm.



16. zīm.

<u>6. uzdevums</u>. Regulāras piramīdas *SABCD* pamata *ABCD* mala ir *a*, bet sānu šķautne ir 2*a*. Aplūkosim plaknei *SAD* paralēlus nogriežņus, kuru galapunkti atrodas uz pamata diagonāles *BD* un sānu šķautnes *SC*. Noteikt vismazāko no šādu nogriežņu garumiem. [KZZ, 208. uzd.]

Meklējamo nogriezni apzīmēsim ar *GF*, sk. 16. zīm. Ja $GE \parallel AD$ un $EF \parallel SD$, tad plakne *FGE* ir paralēla plaknei *SAD*. Apzīmēsim nogriežņa *GE* garumu ar *x*. Tad $DE = x$, $CE = a - x$, $FE = 2(a - x)$, jo trijstūris *FEC* līdzīgs vienādsānu trijstūrim *SDC*, kuram mala *SD* divreiz garāka nekā mala *DC*. Ievērosim, ka $\cos\angle FEG = \cos\angle SDA = \frac{1}{4}$.

Pēc kosinusu teorēmas

$$FG^2 = x^2 + 4(a-x)^2 - x(a-x) = 6x^2 - 9ax + 4a^2$$

$$x_{\min} = \frac{3a}{4}, \quad \min FG = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Nākamo uzdevumu vispirms atrisiniet patstāvīgi un tad ieskatieties komentāros. [3)]

<u>7. uzdevums</u>. Konusā ar pamata rādiusu *R* un augstumu *H* ievilkt cilindru, lai tā pilnās virsmas laukums būtu vislielākais. Uzskatīt, ka abiem ķermeņiem ir kopēja simetrijas ass.

Uzdevumi no krājuma KZZ

No grāmatā [KZZ, 147-152] formulētajiem 74 ekstrēmu uzdevumiem vismaz 25% reducējami uz kvadrātfunkcijas ekstrēmu noteikšanu.

160. Atrast skaitli, kuru saskaitot ar savu kvadrātu, iegūst vismazāko vērtību.
164. Noteikt skaitli, kas savu kvadrātu pārsniedz ar maksimālo vērtību.
165. Noteikt divus skaitļus, kuru starpība ir vienāda ar 5, bet reizinājums ir vismazākais.
166. Skaitli 16 sadalīt divos saskaitāmos tā, lai to kvadrātu summa būtu vismazākā.
168. Skaitli 18 sadalīt divos saskaitāmos tā, lai divkāršota pirmā saskaitāmā un otrā saskaitāmā kvadrāta summa būtu vismazākā.

171. Skaitli 26 uzrakstīt kā trīs pozitīvu skaitļu summu tā, lai to kvadrātu summa būtu vismazākā un otrais saskaitāmais būtu trīs reizes lielāks par pirmo saskaitāmo.
Piezīme. Nosacījumu par skaitļu pozitivitāti var atmest kā lieku.

172. No visām vienādsānu trapecēm ar šauro leņķi 45°, kurām augstuma un lielākā pamata summa ir *a*, atrast trapeci, kurai laukums būtu vislielākais.

173. Taisnleņķa trapeces šaurais leņķis ir 45°, bet perimetrs ir 4 cm. Kādam jābūt trapeces augstumam, lai trapeces laukums būtu vislielākais?

178. Taisnleņķa trijstūrī, kura hipotenūza ir 32 cm, bet viens leņķis ir 60°, ievilkts taisnstūris tā, ka viena mala atrodas uz hipotenūzas. Kādiem jābūt taisnstūra izmēriem, lai tā laukums būtu vislielākais?

179. Taisnleņķa trijstūrī, kura katetes ir 18 cm un 24 cm, ievilkts taisnstūris. Taisnstūra viens leņķis sakrīt ar trijstūra taisno leņķi. Kādiem jābūt taisnstūra malu garumiem, lai tā laukums būtu vislielākais?

182. Vienādsānu trapeces šaurais leņķis ir 45° un perimetrs 4 cm. Noteikt trapeces augstumu tā, lai trapeces laukums būtu vislielākais.

184. Pusriņķī ar rādiusu *R* ievilkta trapece *ABCD* tā, ka tās pamats *AD* ir diametrs. Kādam jābūt trapeces *ABCD* šaurajam leņķim pie pamata, lai trapeces perimetrs būtu vislielākais?

185. Paralelograma diagonāļu summa ir 8 cm. Noteikt minimālo paralelograma visu malu kvadrātu summu.

189. Trijstūra divu malu summa ir *a*, bet leņķis starp tām ir 30°. Kādiem jābūt malu garumiem, lai trijstūra laukums būtu vislielākais?

192. Taisnleņķa trijstūrī *ABC* katete $BC = a$ un tā veido ar hipotenūzu *AC* leņķi α. Punkts *D* atrodas uz katetes *BC* un starp visiem *BC* punktiem tā attālumu kvadrātu summa līdz taisnēm *AC* un *AB* ir vismazākā. Aprēķināt *BD*.

193. Noteikt vienādsānu trijstūra virsotnes leņķa kosinusu, lai trijstūra laukums būtu vislielākais, ja mediāna, kas vilkta pret sānu malu, ir *m*.

195. Plaknes figūra sastāv no taisnstūra un vienādmalu trijstūra, kuriem ir kopīga mala. Figūras perimetrs ir *p*. Kādiem jābūt figūras izmēriem, lai tās laukums būtu vislielākais?

200. Četri punkti *A*, *B*, *C*, *D* norādītajā kārtībā atrodas uz parabolas $y = ax^2 + bx + c$; triju minēto punktu koordinātas ir *A* (– 2; 3), *B* (– 1; 1), *D* (2; 7). Aprēķināt punkta *C* koordinātas, ja četrstūra *ABCD* laukums ir maksimālais.

208. Sk. 6. uzd. 34. lpp.

220. Konusa augstuma un veidules summa ir 4 dm. Kādam jābūt konusa veidules garumam, lai tā tilpums būtu vislielākais?

226. Taisne *l* iet caur punktiem (3; 0), (0; 4). Punkts *A* atrodas uz parabolas $y = 2x - x^2$. Noteikt attālumu no punkta *A* līdz taisnei *l*, ja *A* sakrīt ar koordinātu sākumpunktu. Noteikt punkta *A* koordinātas, ja tas atrodas uz parabolas un attālums no tā līdz taisnei *l* ir vismazākais.

233. Automašīna brauca no punkta *A* uz punktu *C*. Līdz punktam *B* tās ātrums bija $48\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ceļa remonta dēļ $\frac{1}{3}$ no visa atlikušā ceļa automašīna brauca ar ātrumu, kas par $a\frac{\text{km}}{\text{h}}$ mazāks, bet pēc tam ātrumu palielināja par $3a\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kādai jābūt *a* vērtībai, lai automašīna visātrāk veiktu ceļa posmu no *B* uz *C*?

6. nodaļa **Nevienādība $A \geq G$**

Nevienādībai [1)], kas saista vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, ir nozīmīga loma matemātikā un it īpaši ekstrēmu uzdevumos. Atgādināsim, ka par nenegatīvu skaitļu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vidējo aritmētisko A un vidējo ģeometrisko G sauc šādus lielumus:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n}, \quad G = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

Skolā parasti pierāda šīs nevienādības atsevišķu gadījumu, kad $n = 2$, t. i.,

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2},$$

un retāk, kad $n = 3$. Pēdējā gadījumā viens no īsākajiem nevienādības $A \geq G$ pierādījumiem ir šāds.
Ievēro, ka

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)\frac{(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2}{2} \geq 0 .$$

Tātad $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$. Apzīmējot: $x_1 = x^3$, $x_2 = y^3$, $x_3 = z^3$, iegūstam vajadzīgo nevienādību.

Grāmatas "Nevienādības" autori E. Bekenbahs un R. Bellmans nevienādību $A \geq G$ raksturo kā *ārkārtīgi skaistu* un raksta, ka tā *bez šaubām ir viena no nevienādību teorijas pīlāriem* [BB2]. Viņu grāmatā ir doti 12 dažādi šīs nevienādības pierādījumi. Ne mazāk cildinoši par šo nevienādību izsakās citas tāda paša nosaukuma grāmatas autori G. Hārdijs, D. Litlvuds un D. Poija: *Šī teorēma ir tik svarīga, ka mēs dosim tai vairākus dažādas vienkāršības un vispārīguma pakāpes pierādījumus* [HLP, 29]. Vienkāršākais no šajās grāmatās atrodamajiem pierādījumiem, manuprāt, ir Elersa [BB2, 20] pierādījums, kas faktiski ir šādas izveduma shēmas:

$$(\text{Ja } G = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} = 1, \text{ tad } A \geq n) \Rightarrow (G \leq A)$$

realizācija, izmantojot matemātisko indukciju.
Analoģiska rakstura pierādījums, kas atrodams lieliskajā R. Kuranta un H. Robinsa grāmatā [KR], pamatojas uz šādu ideju: pieņem, ka n pozitīvu skaitļu summa ir dots lielums, bet reizinājums vislielākais ir tad, kad ne visi šie skaitļi ir vienādi. Tad ar vienkāršiem pārveidojumiem iegūst pretrunu.

Elegants un, šķiet, vēl vienkāršāks pierādījums, kas aizgūts no I. Nivena grāmatas [Niv], latviešu valodā ir publicēts A. Cibuļa rakstā "Skaitlis e" [Cib3, 54]. Pirms sniegt šo pierādījumu, ilustrēsim tā ideju ar kādu konkrētu piemēru.

Aplūkosim 5 skaitļus: 2, 3, 4, 5, 16 un novērtēsim to reizinājumu:

$$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot16 \leq \mathbf{6}\cdot3\cdot4\cdot5\cdot12 \leq \mathbf{6}\cdot\mathbf{6}\cdot4\cdot5\cdot9 \leq \mathbf{6}\cdot\mathbf{6}\cdot\mathbf{6}\cdot5\cdot7 \leq \mathbf{6}\cdot\mathbf{6}\cdot\mathbf{6}\cdot\mathbf{6}\cdot\mathbf{6}.$$

Vai ievērojāt, pēc kāda principa konstruēta šī nevienādību ķēdīte? Mazākais reizinātājs tiek aizstāts ar vidējo aritmētisko $A = 6$, bet lielākais – ar tādu skaitli, lai saglabātos summa. Tagad pāriesim pie vispārīgā gadījuma pierādījuma.

Ar M un m apzīmēsim attiecīgi vislielāko un vismazāko no skaitļiem $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ja $m = M$, tad $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ un tātad $A = G$. Ja savukārt $m < M$, tad reizinājumā $x_1 x_2 \ \ldots \ x_n$ šos divus skaitļus m un M aizstāsim ar A un $m + M - A$. Šāda aizstāšana acīmredzami saglabā summu, bet palielina reizinājumu, jo $m < A < M$ un

$$mM - A(m + M - A) = (m - A)(M - A) < 0.$$

Tā kā katrā nākamajā aizvietošanas solī parādās vismaz viens jauns reizinātājs A, tad pēc galīga soļu skaita iegūstam $G^n \le A^n$ jeb $G \le A$, kas arī bija jāpierāda.

Formulēsim divas svarīgas sekas, kas tieši izriet no iegūtās nevienādības.

Sekas SK. (SK – Summa konstants lielums.) Ja nenegatīvu skaitļu summa ir konstants (nemainīgs) lielums, tad reizinājums ir maksimāls, ja visi skaitļi ir vienādi, t. i.,

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k) \Rightarrow \max(x_1 x_2 \ \ldots \ x_n) = \left(\frac{k}{n}\right)^n .$$

Sekas RK. (RK – Reizinājums konstants lielums.) Ja nenegatīvu skaitļu reizinājums ir konstants (nemainīgs) lielums, tad summa ir minimāla, ja visi skaitļi ir vienādi, t. i.,

$$x_1 x_2 \ \ldots \ x_n = k \Rightarrow \min(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = n\sqrt[n]{k} .$$

Daži nevienādības lietojumi

Vairāku uzdevumu formulējumi doti sīkākā burtu rakstā šriftā. Tas darīts tāpēc, lai vērstu uzmanību uz to, ka attiecīgie avoti nav pirmavoti. Jautājums par pirmavotiem bieži vien nav skaidrs. Protams, nereti gadās, ka dažādi autori sastāda pēc satura vienādus uzdevumus neatkarīgi viens no otra.

1. uzdevums. Noteikt funkcijas $f = x + \frac{1}{x}$ vismazāko pozitīvo vērtību.

Ja x būtu negatīvs, tad arī funkcijas vērtības būtu negatīvas, tāpēc jāaplūko tikai pozitīvi x. Pozitīviem skaitļiem var lietot nevienādību $A \ge G$, kas dod

$$x + \frac{1}{x} \ge 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2 .$$

Atbilde. Funkcijas minimālā pozitīvā vērtība ir 2, ja $x = 1$.

2. uzdevums. Noteikt funkcijas $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ vismazāko pozitīvo vērtību, ja a un b ir pozitīvi skaitļi.

Spriežot līdzīgi kā iepriekšēja piemērā, iegūsim:

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} \ge 2\sqrt{ax \cdot \frac{b}{x}} = 2\sqrt{ab} \Rightarrow \min f(x) = 2\sqrt{ab}, \text{ ja } x = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Izmantojot šo rezultātu, atrisiniet Viviāni uzdevumu (sk. 2. nodaļu.).

Šāda funkcija f sastopama daudzos saistoša rakstura uzdevumos. Tai atsevišķa nodaļa veltīta grāmatas 2. daļā [Cib2].

3. uzdevums. No visiem taisnstūriem ar dotu laukumu atrast to, kuram perimetrs vismazākais.

Apzīmēsim ar *x*, *y*, *L* un *P* attiecīgi taisnstūra malu garumus, laukumu un perimetru. Tad $L = xy$ un saskaņā ar nevienādību $A \geq G$:

$$P = 2(x + y) \geq 4\sqrt{xy},$$

Minimums tiek sasniegts, ja $x = y$, t. i., ja taisnstūris ir kvadrāts.

Piezīme. Grāmatā [Čez, 279] uzdevums risināts, izmantojot funkcijas $2x + \frac{2L}{x}$ pirmos divus atvasinājumus.

Uzdevums par labāko redzes leņķi

4. uzdevums. *Glezna pie sienas piekārta tā, ka tās apakšējā mala ir par a, bet augšējā – par b metriem augstāk nekā novērotāja acs. Kādā attālumā no sienas jānostājas novērotājam, lai viņa stāvoklis, aplūkojot gleznu, būtu vislabvēlīgākais, t. i., lai glezna būtu redzama vislielākā leņķī?* [Ze, 59. uzd.]

Uz vertikālas sienas karājas plakāts AB. Kādā attālumā no sienas jāatrodas novērotājam, lai leņķis θ, kādā viņš redz plakātu, būtu vislielākais? [Nat, 21]

Uz vienas taisnā leņķa malas ir dots nogrieznis AB. Aprēķināt, cik tālu uz otras leņķa malas ir jāatzīmē punkts, lai AB no tā būtu redzams vislielākajā leņķī. [VR, 40- 41]

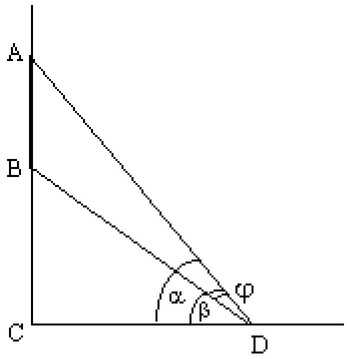
Apzīmēsim BC = *a*, AC = *b*, CD = *x*, ∠ADC = α un ∠BDC = β, sk. 17. zīmējumu. Tad $a = x\text{tg}\beta$; $b = x\text{tg}\alpha$. Atbilstoši uzdevuma ģeometriskajam saturam mums jāmeklē maksimāli liels šaurais leņķis φ jeb, kas ir līdzvērtīgi, maksimālā tgφ vērtība.

$$\text{tg}\varphi = \text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta} = \frac{x\text{tg}\alpha - x\text{tg}\beta}{x + x\text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta} = \frac{b - a}{x + \frac{ab}{x}}.$$

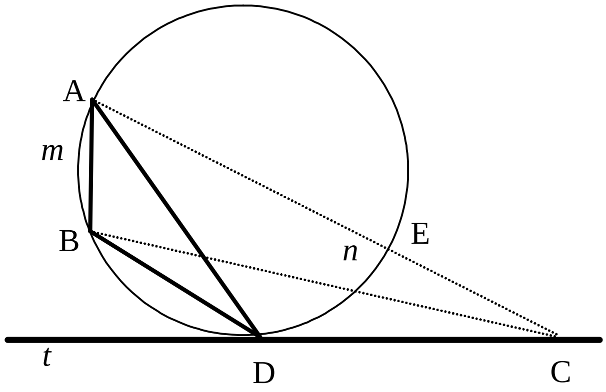
No iegūtās formulas redzam, ka φ būs maksimāls, ja $x + \frac{ab}{x}$ būs minimāls, t. i., ja abi saskaitāmie būs vienādi, kas dod $x = \sqrt{ab}$.

Ir vienkārša ģeometriska konstrukcija, kā iegūt vislabāko redzes leņķi. Atliekam punktam B simetrisku punktu E attiecībā pret taisni CD. Novelkam riņķa līniju ar diametru AE. Riņķa līnijas krustpunkts ar taisni CD ir meklētais punkts D.

Vēl viena ģeometriska konstrukcija vislabākā (optimālā) redzes leņķa iegūšanai, kurā turklāt viegli saskatīt optimalitātes pamatojumu, ir šāda. Novelk riņķi ar rādiusu $\frac{a+b}{2}$ caur punktiem A un B, sk. 18. zīmējumu. Šī riņķa pieskaršanās punkts taisnei *t* ir meklējamā punkta D atrašanās vieta. Tas izriet no leņķu īpašībām: leņķa ADB lielums ir puse no loka *m* leņķiskā lieluma, bet leņķa ACB lielums ir puse no (*m* – *n*) leņķiskā lieluma. Tātad, ja C nesakrīt ar D, tad leņķis ACB ir mazāks nekā leņķis ADC. Var spriest arī tā: ∠ ADB = ∠ AEB kā ievilkti leņķi, bet ∠ AEB ir lielāks nekā ∠ ACB.



17. zīm.



18. zīm.

<u>5. uzdevums</u>. Atrast reizinājuma xy ekstremālās vērtības, ja $ax + by = k$, kur a, b un k ir doti skaitļi.

Lūk, daži risinājumi!

Jānītis. Izsaku y un ievietoju reizinājumā:

$$xy = x\frac{k-ax}{b} = \frac{(ax)(k-ax)}{ab} \le \left(\frac{ax+k-ax}{2}\right)^2 \frac{1}{ab} = \frac{k^2}{4ab}.$$

Anniņa. Izsaku y un ievietoju reizinājuma modulī:

$$|xy| = \left|\frac{x(k-ax)}{b}\right| = \left|\frac{ax(k-ax)}{ab}\right| \le \frac{|ax+k-ax|^2}{|4ab|} = \frac{k^2}{|4ab|}.$$

Tātad $\max xy = \frac{k^2}{4ab}$ un $\min xy = -\frac{k^2}{4ab}$.

Maijiņa. Apzīmēju $u = ax$, $v = by$. Tad jāmeklē ekstrēmi funkcijai $\frac{uv}{ab}$, ja $u + v = k$. Secinu, ka reizinājums uv būs maksimāls, ja $u = v = \frac{k}{2}$, bet par minimumu neko nevar pateikt.

Atrodiet kļūdas, paviršības šajos risinājumos! Tās būs viegli pamanāmas, risinot doto uzdevumu konkrētām a, b un k vērtībām. Piemēram,

extr xy = ?, ja $x - y = 1$.

Šeit reizinājumam $xy = x(x - 1)$ maksimālā vērtība neeksistē, bet minimālā ir: $-\frac{1}{4}$. Redzam, ka viena no Anniņas piedāvātajām atbildēm (šoreiz attiecībā uz minimumu) ir pareiza. Tas, ka atbilde ir pareiza, vēl nenozīmē, ka tās iegūšanas veids arī ir pareizs. Uzrādiet tādus a, b un k, lai Anniņas atbilde būtu nepareiza gan attiecībā uz minimumu, gan uz maksimumu.

Uzdevuma pareizā atbilde ir (sk. 4. uzd. 33. lpp.):

Ja $ab > 0$, tad $\max xy = \frac{k^2}{4ab}$, bet minimums neeksistē.

Ja $ab < 0$, tad $\min xy = -\frac{k^2}{4ab}$, bet maksimums neeksistē.

Ja $ab = 0$, tad extr xy neeksistē.

Eiklīda uzdevums

6. uzdevums. *Dotajā trijstūrī ABC ievilkt paralelogramu ADEF* (*EF* || *AB, DE* || *AC*), *kuram ir vislielākais laukums.* [T, 30]

Apzīmēsim: x = |AF|, y = |AD|, a = |AC| un b = |AB|, sk. 19. zīm. No līdzīgiem trijstūriem ABC un FEC izriet, ka

$$\frac{a}{b} = \frac{a-x}{y} \Rightarrow ay + bx = ab\ .$$

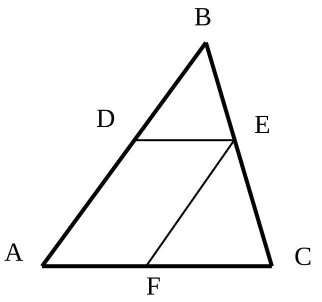
Tātad Eiklīda uzdevuma matemātiskais modelis:

$$\max xy = ?\ ,\ \ ay + bx = ab,$$

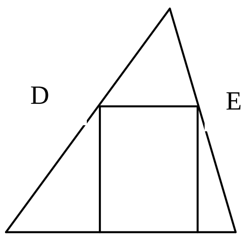
ir iepriekš aplūkotā uzdevuma atsevišķs gadījums, kad $k = ab$.

Atbildi, ka $x = \frac{a}{2}$ un $y = \frac{a}{2}$, īsi var iegūt no sekām SK, jo laukumu var izteikt formā $xy = (ay)(bx) \cdot \frac{1}{ab}$, kur reizinātāju ay un bx summa ir konstants lielums.

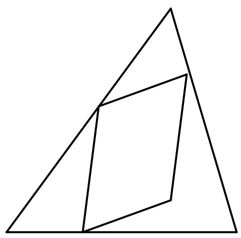
Piezīme. Eiklīds savu uzdevumu risināja ar ģeometrisku pārveidojumu palīdzību, sk. [T, 31]. Ja atteiktos no nosacījuma, ka meklējamā paralelograma malām jābūt paralēlām dotā trijstūra malām, tad Eiklīda uzdevumam būtu bezgalīgi daudz atrisinājumu. Piemēram, tikpat liels laukums ir 20. zīmējumā redzamajam taisnstūrim. Atsevišķs šim gadījumam atbilstošs uzdevums ir dots grāmatā [Si1, 71]: *Pierādīt, ka no visiem taisnstūriem, kas ievilkti dotajā trijstūrī, vislielākais laukums ir tam taisnstūrim, kuram mala, kas paralēla trijstūra augstumam, ir vienāda ar šī augstuma pusi.* Uzdevums kļūtu sarežģītāks, ja atteiktos no paralelitātes nosacījuma ($EF \parallel AB,\ \ DE \parallel AC$) un aplūkotu patvaļīgi novietotus paralelogramus, piemēram, kā 21. zīm., bet tas nedotu paralelogramus ar lielāku laukumu. Atrodiet tam īsu pamatojumu.



19. zīm.



20. zīm.



21. zīm.

Spēle – variācija par Eiklīda uzdevumu.

Anniņa izvēlas uz dotā trijstūra malas vienu punktu I, pēc tam Jānītis izvēlas punktu J uz nākamās trijstūra malas. Beidzot, Anniņa izvēlas punktu K uz atlikušās trijstūra malas. Anniņa cenšas panākt, lai trijstūra IJK laukums būtu maksimāls. Pierādīt, ka Anniņa, spēlējot pareizi, vienmēr var panākt, ka trijstūra IJK laukums būs vismaz viena ceturtdaļa no sākotnējā trijstūra laukuma. Kā jāspēlē Jānītim, lai Anniņa nevarētu iegūt vēl lielāku laukumu?

7. uzdevums. Noteikt funkcijas $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}, \ x > 0,$ vismazāko vērtību.

Lietosim sekas RK:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ \Rightarrow \ \min f(x) = 3, \text{ ja } x^2 = \frac{1}{x} \text{ jeb } x = 1.$$

8. uzdevums. Noteikt funkcijas $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}, \ x > 0,$ vismazāko vērtību, ja a un b ir pozitīvi skaitļi.

Līdzīgi kā iepriekšējā uzdevumā iegūsim, ka

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{2x} + \frac{b}{2x}; \quad ax^2 = \frac{b}{2x} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{b}{2a}} \Rightarrow \min f(x) = 3\sqrt[3]{\frac{ab^2}{4}}.$$

Nākamais ir saistošs uzdevums, kuru var reducēt uz tikko aplūkotā veida funkcijas minimuma noteikšanu.

9. uzdevums. *Nepieciešams izgatavot kasti, kuras tilpumam jābūt* 108 cm^3. *Kaste ir vaļēja no augšas un tai ir kvadrātveida dibens. Kādiem jābūt kastes izmēriem, lai tās izgatavošanā patērētu vismazāk materiāla?* [BM, 25]

Apzīmējot kastes pamata malu ar x un tās augstumu ar y, iegūsim, ka tās tilpums $V = x^2y = 108$, bet virsmas laukums $S = x^2 + 4xy$. Izsakot y no tilpuma izteiksmes un ievietojot to laukuma izteiksmē, dabūjam funkciju

$$S(x) = x^2 + \frac{432}{x} = x^2 + \frac{216}{x} + \frac{216}{x},$$

kura saskaņā ar sekām RK sasniedz minimumu punktā $x = 6 \ \Rightarrow y = 3$.

Heigensa uzdevums (Formulējumu sk. 2. nodaļā.)

10. uzdevums. Noteikt funkcijas:

$$1) \ h_1(x) = \frac{x}{(m+x)(M+x)}; \ \ 2) \ h_2(x,y) = \frac{xy}{(m+x)(x+y)(M+y)}, \quad x, y \in [m, M]$$

maksimumu.

Maksimuma vietā vispirms meklēsim minimumu dalījumam $\frac{1}{h_1(x)}$.

$$\frac{1}{h_1(x)} = \frac{(m+x)(M+x)}{x} = x + \frac{mM}{x} + m + M \geq 2\sqrt{mM} + m + M = (\sqrt{m} + \sqrt{M})^2.$$

Atbilstošais punkts, kurā funkcija sasniedz šo vērtību, ir $x = \sqrt{mM}$, t. i., doto lielumu ģeometriskais vidējais. No šejienes secinām, ka

$$\max h_1 = h_1(\sqrt{mM}) = \frac{1}{(\sqrt{m} + \sqrt{M})^2}.$$

Tagad noteiksim maksimumu funkcijai h_2, kura modelē Heigensa uzdevumu divu ”starpložu” gadījumā, sk. shēmu.

$$M \longrightarrow y \longrightarrow x \longrightarrow m$$

Pēc vienkāršiem pārveidojumiem, izmantojot nevienādību $A \geq G$, iegūst:

$$\frac{1}{h_2(x,y)} = \frac{(m+x)(x+y)(M+y)}{xy} = \left(\frac{mM}{y} + \frac{my}{x} + x\right) + \left(\frac{mM}{x} + \frac{xM}{y} + y\right) + m + M \geq$$

$$\geq 3\sqrt[3]{m^2 M} + 3\sqrt[3]{mM^2} + m + M = (\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{M})^3 .$$

Nevienādība kļūst par vienādību, ja

$$\frac{mM}{y} = \frac{my}{x} = x, \quad \frac{mM}{x} = \frac{xM}{y} = y .$$

Atrisinot šo sistēmu, dabū: $x = mq$, $y = mq^2$, kur $q = \sqrt[3]{\frac{M}{m}}$, t. i., mazākā lode iegūst vislielāko ātrumu – $\max h_2 = \frac{1}{(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{M})^3}$, ja ložu masas veido ģeometrisko progresiju ar norādīto kvocientu q.

Keplera planimetriskais uzdevums

<u>11. uzdevums</u>. *Dotajā riņķī ievilkt taisnstūri ar vislielāko laukumu.* [T, 51; Nat, 15]

Pierādīt, ka no visiem taisnstūriem, kas ievilkti dotajā riņķī, vislielākais laukums ir kvadrātam. [Si1, 651. uzd.]

<u>12. uzdevums</u>. No visiem taisnstūriem, kuri iekļaujas pusriņķī ar rādiusu r, atrast to, kuram laukums vislielākais.

Atrodiet vienkāršu ģeometrisku pamatojumu tam, ka meklējamā taisnstūra malai noteikti jāatrodas uz riņķa diametra, un risiniet šādu uzdevumu:

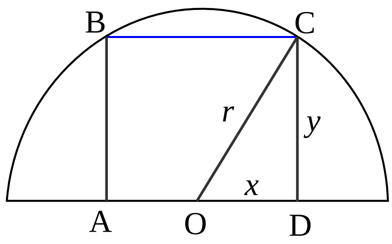
Dotajā pusriņķī ievilkt taisnstūri ar vislielāko laukumu. [Ze, 54]

Dosim īsāku un vienkāršāku risinājumu salīdzinājumā ar [VR, 11].
L(ABCD) = $2xy$, kur $x^2 + y^2 = r^2$, sk. 22. zīm. Apzīmēsim $a = x^2$, $b = y^2$. Tad

$$L = 2\sqrt{ab} \leq a + b = r^2 .$$

Maksimums tiek sasniegts, ja $a = b$ jeb $x = y$.

Uzdevums der kā piemērs seku SK ilustrēšanai, jo izteiksmē $L^2 = 4x^2(r^2 - x^2)$ reizinātāju x^2 un $r^2 - x^2$ summa ir konstants lielums. Ievērosim, ka maksimālajam taisnstūrim AD = 2CD. Tas nozīmē, ka no visiem riņķī ievilktiem taisnstūriem maksimālais laukums ir kvadrātam.



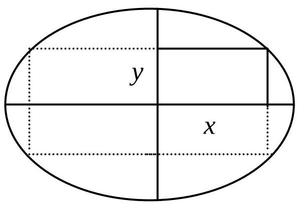
22. zīm.

<u>13. uzdevums</u>. Aprēķināt max xy, ja $ax^2 + by^2 = c$, kur a, b un c ir doti pozitīvi skaitļi.

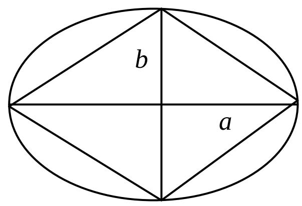
Tā kā $ax^2y^2 = ax^2(c - ax^2)$ un šo reizinātāju summa ir c, var lietot sekas SK. Saskaņā ar tām reizinājums būs vislielākais, ja abi reizinātāji būs vienādi:

$$ax^2 = c - ax^2 \Rightarrow 2ax^2 = c \Rightarrow 2by^2 = c \Rightarrow 4abx^2y^2 = c^2 \Rightarrow \max xy = \frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Kā šo uzdevumu var interpretēt ģeometriski? Šķiet, visai viegli to saskatīt gadījumā, kad $a = b = 1$ un $c = r^2$. Izteiksme xy izsaka riņķa $x^2 + y^2 \le r^2$ ceturtdaļā ievilkta taisnstūra laukumu, bet izteiksme $2xy$ – pusriņķī ievilkta taisnstūra laukumu. Savukārt $4xy$ nav nekas cits kā 11. uzdevumā meklētā taisnstūra laukums. Kā sekas no šejienes iegūstam, ka no riņķī ievilktiem taisnstūriem vislielākais laukums ir kvadrātam, bet no pusriņķī ievilktiem taisnstūriem vislielākais laukums ir šī kvadrāta 'pusei'. Arī 14. uzdevumā izteiksme $4xy$ gluži tāpat izsaka taisnstūra laukumu, tikai tagad tas ir ievilkts elipsē, sk. 23. zīm.



23. zīm.



24. zīm.

<u>Piezīme</u>. Starp riņķi un elipsi attiecībā uz šajās figūrās ievilkto maksimālo četrstūru laukumiem pastāv būtiska atšķirība. Riņķī ievilktais maksimālais četrstūris nosakāms viennozīmīgi, bet elipsē – nē. Elipsē ievilktā maksimālā taisnstūra laukums ir tikpat liels kā 24. zīmējumā redzamā četrstūra laukums. Lai izvairītos no atrisinājuma neviennozīmības, var aplūkot tikai taisnstūrus.

<u>14. uzdevums</u>. Aprēķināt minimālo vērtību funkcijai $f(x) = \dfrac{x^2}{x-k}$, $x > k$, kur k – dots skaitlis.

Funkciju f uzrakstām kā summu:

$$f = (x-k) + \frac{k^2}{x-k} + 2k$$

un lietojam sekas RK. No pirmo divu saskaitāmo vienādības dabūjam $x = 2k$ un minimālo funkcijas vērtību $f(2k) = 4k$. Zinot atbildi, var konstruēt šādu īsu pierādījumu:

$$\frac{x^2}{x-k} \ge 4k \Leftrightarrow x^2 \ge 4k(x-k) \Leftrightarrow (x-2k)^2 \ge 0$$

Piezīme. Ir vairāki ģeometriska rakstura uzdevumi, kur parādās aplūkotā veida funkcija, piemēram, turpmāk risinātais uzdevums par minimālā tilpuma konusu, kurš apvilkts ap doto lodi.

Fermā uzdevums

15. uzdevums. *Atrast taisnleņķa trijstūri ar vislielāko laukumu, ja tā katešu garumu summa vienāda ar dotu skaitli.* [GT, 170]

Ar šo uzdevumu Fermā ilustrēja savu jauno metodi (Fermā teorēma, 1638) funkcijas ekstrēmu meklēšanai. Šo vienkāršo uzdevumu un nākamās trīs variācijas par maksimāliem trijstūriem ērtāk risināt ar elementārām metodēm. Fermā uzdevums ir līdzvērtīgs uzdevumam par taisnstūra ar vislielāko laukumu atrašanu, ja tam ir dots perimetrs.

16. uzdevums. Atrast trijstūri ar vislielāko laukumu, ja tam dota divu malu garumu summa un leņķis starp šīm malām.

Atbildi, ka meklējamais trijstūris ir vienādsānu, ļoti īsi var iegūt no sekām SK. Apzīmēsim nezināmo malu garumus ar a un b, to summu ar k un leņķa lielumu ar β. Tad laukums $L = \frac{1}{2}ab\sin\beta$ ir maksimāls, ja $a = b$. Fermā uzdevums ir šī uzdevuma speciāls gadījums, kad leņķis β ir taisns.

17. uzdevums. No visiem trijstūriem ar dotu pamatu c un divu malu summu k atrast to, kuram laukums vislielākais.

Apzīmēsim trijstūra nezināmo malu garumus ar x un y. Pēc Hērona formulas trijstūra laukums ir

$$\sqrt{p(p-c)(p-x)(p-y)},$$

kur pusperimetrs $p = \frac{c+x+y}{2} = \frac{c+k}{2}$. Tā kā reizinātāju $(p-x)(p-y)$ summa ir konstants lielums, tad reizinājums būs vislielākais, ja tie vienādi, t. i., ja $x = y$. Tātad meklējamais trijstūris būs vienādsānu trijstūris.

No šī vienkāršā uzdevuma uzreiz izriet šāds svarīgs rezultāts, uz kura pamatojas Zēnodora uzdevuma risinājums.

Sekas. Ja n-stūrim ar dotu perimetru ir maksimālais laukums, tad tam visas malas ir vienādas.

18. uzdevums. No visiem trijstūriem ar dotu perimetru atrast to, kuram laukums vislielākais.

Atbilde, ka meklējamais trijstūris ir vienādmalu, izriet no iepriekšējā uzdevuma. Uzdevumu var atrisināt arī, lietojot Hērona formulu un sekas SK, sk., piemēram, [Ze, 68; Si, 400-401].

Vai viens un tas pats cilindrs ir nākamo divu uzdevumu atrisinājums?

19. uzdevums. *Atrast augstumu taisnam cilindram, kuram ir vislielākais sānu virsmas laukums un kurš ievilkts lodē ar rādiusu r.* [Ze, 87]

Dotajā lodē ievilkt cilindru ar vislielāko sānu virsmas laukumu. [Nat, 17]

Lodē ar rādiusu R ievilkts cilindrs. Aprēķināt tā cilindra izmērus, kura sānu virsmas laukums ir lielākais. [VR, 48]

Keplera uzdevums par vislielāko cilindru

20. uzdevums. *No vienības lodē ievilktiem cilindriem atrast cilindru ar vislielāko tilpumu.*
Šo uzdevumu Keplers izvirzīja un atrisināja 1615. gadā savā darbā "Vīna mucu stereometrija" [GT, 170-171]

Dotajā lodē ievilkt cilindru ar vislielāko tilpumu. [Nat, 25]

Apzīmējam lodes rādiusu ar R, cilindra pamata rādiusu ar r, augstumu ar H, tilpumu ar V un sānu virsmas laukumu ar S. Tad

$$V = \pi r^2 H.$$

$$4r^2 + H^2 = 4R^2$$

$$S^2 = (2\pi rH)^2 = 16\pi^2 r^2 (R^2 - r^2).$$

Reizinātāju r^2 un $(R^2 - r^2)$ summa ir konstante, tāpēc S^2 būs maksimāls, ja šie reizinātāji būs vienādi, t. i., ja

$$R^2 = 2r^2 \Rightarrow H = R\sqrt{2}\,.$$

Tātad 19. uzdevumā optimālais cilindrs raksturojams ar attiecību $H : R = \sqrt{2}$.

Tagad noskaidrosim, vai 20. uzdevumā optimālais cilindrs raksturojams ar šo pašu attiecību. No sakarības

$$4r^2 + H^2 = 4R^2$$

šķiet, dabiskāk būtu izteikt $4r^2$ un ievietot to tilpuma izteiksmē. Tad būtu jāmeklē maksimums kubiskai funkcijai $4V = \pi H(4R^2 - H^2)$. Tomēr, šeit lietderīgi izteikt H:

$$H^2 = 4R^2 - 4r^2 \Rightarrow 4V^2 = 4\pi^2 r^4 (4R^2 - 4r^2) = \pi^2 (2r^2)(2r^2)(4R^2 - 4r^2).$$

Pielīdzinot reizinātājus, iegūstam:

$$2r^2 = 4R^2 - 4r^2 \Rightarrow 3r^2 = 2R^2 \Rightarrow H : R = 2 : \sqrt{3}\,.$$

Tātad katram uzdevumam ir savs optimālais cilindrs:

Piezīme. Dotajā risinājumā var saskatīt paņēmienu tādas kubiskas funkcijas ekstrēmu noteikšanai, kurai viena sakne ir pārējo divu sakņu vidējais aritmētiskais. Sīkāk šis paņēmiens ir izklāstīts nodaļā "Kubiska funkcija".

Visstiprākā sija

21. uzdevums. *Baļķa šķērsgriezums ir riņķis ar rādiusu a. No baļķa tiek iztēsta sija ar taisnstūra šķērsgriezumu. Baļķa stiprība ir proporcionāla pamatam un šķērsgriezuma augstuma kvadrātam. Atrast šķērsgriezuma formu, kurai sija ir visstiprākā.*
[GK, 114, 1. izdevums 1912. g.]

Uzdevuma: *Stiprības mācība pierāda, ka taisnstūrveidīga šķērsgriezuma sijas izturība ir proporcionala platumam un augstuma kvadratam. Kādam jābūt no apaļa koka ar caurmēru d izgatavotas sijas platumam x un augstumam y, lai sija būtu visizturīgākā?* nepietiekami stingrs risinājums ar atvasinājuma palīdzību ir atrodams grāmatā [O, 155]. Vēl agrāk latviešu valodā izdotā literatūrā uzdevums par optimālo siju ir formulēts J. Cizareviča mācību grāmatā [Ciz, 90]:

Sijas nestspēja ir atkarīga no izteiksmes bh^2 vērtības, kur b un h ir sijas šķērsgriezuma platums un augstums. Siju veidojam no apaļa koka ar diametru d. Kādam jābūt sijas platumam x, lai tai būtu maksimālā nestspēja?

Zināms, ka sijas ar taisnstūra šķērsgriezumu stiprība mainās proporcionāli platumam un augstuma kvadrātam. Kādi būs izmēri visstiprākajai sijai, kas izzāģēta no apaļa baļķa, kura diametrs ir d? Uzdevums elementārā veidā atrisināts [Ze, 70].

Aprēķināt, kādai ir jābūt taisnstūrveida sijas šķērsgriezuma izmēru attiecībai, lai sijas izturība liecē būtu vislielākā, ja sijas izturību liecē aprēķina pēc formulas $\sigma = kxy^2$, kur x ir sijas šķērsgriezuma taisnstūra pamats, y – taisnstūra augstums, k - proporcionalitātes koeficients. Uzdevums ar diferenciālrēķinu palīdzību, turklāt izmantojot vēl otrās kārtas atvasinājumu, risināts mācību līdzeklī [Š2, 173-174].

Atrisināsim uzdevumu par visizturīgāko siju elementārā veidā. No sakarības $x^2 + y^2 = d^2$, sk. 25. zīmējumu, izsakām y^2 un to ievietojam formulā, kas raksturo sijas izturību: $f = kxy^2 = kx(d^2 - x^2)$. Ievērosim, ka izteiksmē

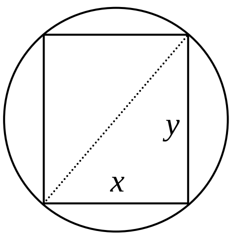
$$2f^2 = k^2(2x^2)(d^2 - x^2)(d^2 - x^2)$$

pēdējo trīs reizinātāju summa ir konstants lielums, tāpēc saskaņā ar sekām SK reizinājums būs vislielākais, ja šie reizinātāji ir vienādi, t. i., ja $3x^2 = d^2$.
Tātad visizturīgākajai sijai tās izmēru attiecība ir $y : x = \sqrt{2}$. [2)]

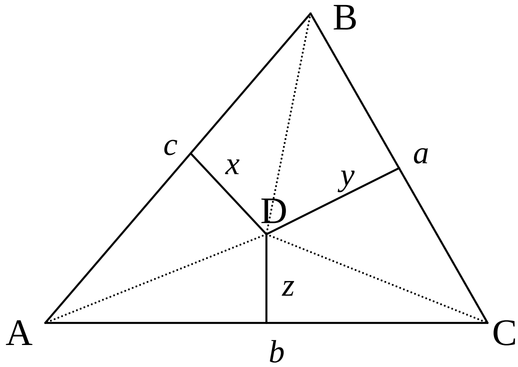
<u>22. uzdevums</u>. *Atrast punktu trijstūra iekšienē, kura attālumu līdz trijstūra malām reizinājums ir vislielākais.* [Ze, 69; Si1, 72]

Noteikt, kur trijstūra iekšpusē atrodas punkts, kura attālumu līdz malām reizinājums ir lielākais. [VR, 48]

Pieņemsim, ka meklētais punkts ir D un attālumi no tā līdz trijstūra malām ir *x*, *y* un *z*, sk. 26. zīmējumu.



25. zīm.



26. zīm.

Savienojam D ar trijstūra virsotnēm un aprēķinām trijstūra ABC laukumu: $L_{ABC} = L_{ADB} + L_{BCD} + L_{ADC} \Rightarrow 2L = cx + ay + bz$.
Summa $cx + ay + bz$ ir konstants lielums, tāpēc reizinājums $cx \cdot ay \cdot bz$ būs maksimāls, ja visi saskaitāmie ir vienādi:

$$cx = ay = bz = \frac{2L}{3} \Rightarrow x = \frac{2L}{3c},\ y = \frac{2L}{3a},\ z = \frac{2L}{3b}.$$

Uzdevums atrisināts. Taču var pateikt vairāk, proti, ka meklējamais punkts D ir mediānu krustpunkts. Tiešām, apzīmēsim ar h_a, h_b un h_c trijstūra ABC augstumus, kas novilkti attiecīgi pret malām *a*, *b* un *c*. Tad

$$2L = ah_a = bh_b = ch_c \Rightarrow \quad x = \frac{h_c}{3},\ y = \frac{h_a}{3},\ z = \frac{h_b}{3},$$

Izmantojot īpašību, ka trijstūra mediānas krustojas vienā punktā un dalās attiecībā 2:1, skaitot no trijstūra virsotnes, iegūstam vajadzīgo secinājumu.

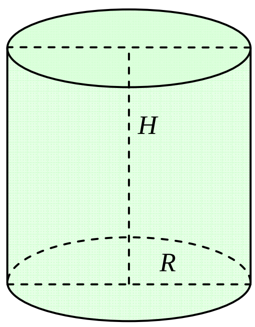
Optimālās konservu bundžas

Der ievērot, ka atkarībā no izvēlētā optimalitātes kritērija atbildes var būtiski atšķirties. Šai sakarā atrisināsim divus pazīstamus uzdevumus.

23. uzdevums. Kādam cilindram ar dotu tilpumu *V* virsmas laukums ir vismazākais? (Tiek minimizēts materiāla patēriņš.)
24. uzdevums. Kādam cilindram ar dotu tilpumu *V* salaiduma līniju (šuvju) garums ir vismazākais? (Šuves garums sastāv no divu riņķa līniju un cilindra veidules garuma.)

Abi šie uzdevumi ar diferenciālrēķinu palīdzību analizēti grāmatā [TK, 134-136]. Vēl agrāk uzdevums: *No skārda jāizgatavo bundža ar tilpumu* 2 *l, kura ir noslēgta no augšas un apakšas. Kādiem jābūt bundžas izmēriem, lai tās izgatavošanai vajadzētu iespējami maz materiāla*, ar diferenciālrēķinu palīdzību ir risināts 1932. g. izdotajā mācību grāmatā [Vig1, 198-199]. Sk. arī [GK, 328] Atrisināsim abus formulētos uzdevumus ar vienkāršāku (elementāru) metodi.
Apzīmēsim cilindra augstumu ar *H*, pamata rādiusu ar *R*, virsmas laukumu ar *S* un šuvju garumu ar *g*. Tad, sk. 27. zīmējumu,

$$V = \pi R^2 H,\ \ S = 2\pi RH + 2\pi R^2 \to \min,\quad g = 4\pi R + H \to \min.$$



27. zīm.

Izsakot *H* no tilpuma formulas un ievietojot to *S* un *g* izteiksmēs, iegūsim:

$$S = 2\pi R^2 + \frac{V}{R} + \frac{V}{R},\qquad g = 2\pi R + 2\pi R + \frac{V}{\pi R^2}.$$

Abās izteiksmēs trīs saskaitāmo reizinājums ir konstants lielums. Lietojam sekas RK un secinām, ka optimālās konservu bundžas rādiuss attiecīgi ir šāds:

$$R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\ , \qquad R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}\ .$$

Ievērosim, ka optimālās bundžas raksturojamas ar sakarībām $H = 2R$ un $H = 2\pi R$, t. i., pirmajā variantā augstums sakrīt ar pamata diametru, bet otrajā – kad jāminimizē šuvju garums, – augstums ir π reizes lielāks nekā diametrs.

25. uzdevums. Kādam cilindram ar dotu virsmas laukumu ir vislielākais tilpums? Atbilde. Cilindram, kuram $H = 2R$**.** Tas izriet no iepriekš aplūkotā uzdevuma. Ievērosim, ka uzdevums: min$S$ = ?, ja $V = V_0$, ir aizstājams ar saistīto (duālo) uzdevumu: max$V$ = ?, ja $S = S_0$. Šāds atsevišķs gadījums: *No visiem cilindriem, kuru pilnas virsmas laukums ir* 24π cm^2, *noteikt to, kuram ir lielākais tilpums,* sarežģītāk, izmantojot trešās pakāpes funkcijas īpašības, atrisināts [VR, 55].

26. uzdevums. Kādam cilindram ar dotu tilpumu V virsmas laukums, neskaitot vienu pamatu, ir vismazākais? (Tiek minimizēts materiāla patēriņš.)
Atbilde $H = R$ viegli iegūstama pēc 24. uzdevuma risinājuma parauga.
Šāds atsevišķs gadījums: *Cik liels jāņem cilindriska litra mēra radijs un augstums, ja mēra pagatavošanai grib izlietot vismazāk materiāla?* [r = 6,828 *cm*, h = 6,828 *cm*], grāmatā [Oz, 160] piedāvāts patstāvīgai risināšanai, domājams, ar atvasinājuma palīdzību. Sk. arī [GK, 328].

Optimālie konusi

27. uzdevums. Kāds ir maksimālais tilpums dotajā lodē ievilktam konusam?

Atrast augstumu vislielākā tilpuma konusam, kuru var ievilkt lodē ar rādiusu r. [Ze, 85, GK, 114; GL, 325]

Pierādīt, ka, ja dotajā lodē ievilkts vislielākā tilpuma konuss, tad lodes rādiuss attiecas pret konusa augstumu kā 3:4. [Si1, 73]

Kāds ir lielākais tilpums konusam, kuru var ievilkt lodē ar rādiusu R? [VR, 54]
Izmantojot sekas SK, uzdevums ir atrisināts grāmatā [Si1, 418-419].

Apzīmējam lodes rādiusu ar R, konusa pamata rādiusu ar r, augstumu ar h un konusa tilpumu ar V. Tad, sk. 28. zīmējumu,

$$CO^2 + AC^2 = (h - R)^2 + r^2 = R^2 \ \Rightarrow r^2 = 2Rh - h^2\,;$$

$$6V = 2\pi r^2 h = 2\pi(2Rh - h^2)h = \ \pi(4R - 2h)h\cdot h.$$

Pēdējo trīs reizinātāju summa ir konstants lielums, tāpēc no sekām SK dabūjam

$$4R = 3h \ \Rightarrow \ \max V = \frac{32\pi R^3}{81}\ .$$

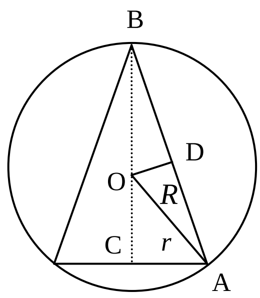
28. uzdevums. *Atrast vismazāko tilpumu konusam, kurš apvilkts ap lodi ar rādiusu a.* [GK, 114]

Atrast ap doto lodi apvilkta taisna apaļa kona augstumu tā, lai tā tilpums būtu vismazākais. [Oz, 160]

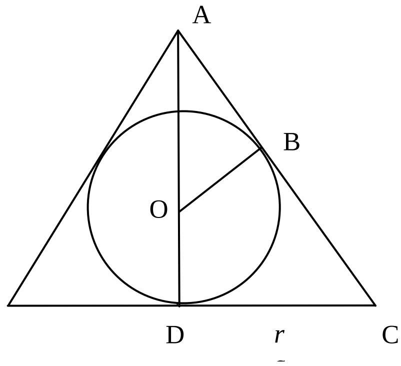
Citētajā literatūrā uzdevums piedāvāts patstāvīgai risināšanai, domājams, ar atvasinājuma palīdzību. Atrisināsim to ar elementāru paņēmienu, kurš jau lietots, risinot 14. uzdevumu. Apzīmēsim meklējamā konusa pamata rādiusu ar r, tā tilpumu ar V un augstumu ar h. Tad no līdzīgiem trijstūriem ACD un ABO, sk. 29. zīmējumu, un Pitagora teorēmas iegūsim, ka

$$\frac{a}{h-a}=\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} \Rightarrow r^2=\frac{a^2h}{h-2a} \Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi\frac{a^2h^2}{h-2a}=\frac{\pi a^2}{3}\left(h-2a+\frac{4a^2}{h-2a}+4a\right).$$

Iekavās iekļauto pirmo divu saskaitāmo reizinājums ir konstants lielums. Saskaņā ar sekām RK tilpums V būs minimāls, ja šie saskaitāmie ir vienādi, t. i., ja $h = 4a$. Zinot šo sakarību, viegli ievērot, ka optimālā konusa tilpums ir tieši divas reizes lielāks nekā dotās lodes tilpums.



28. zīm.



29. zīm.

Piezīme. Grāmatā [ŠČJ, 81] aplūkots šāds uzdevums: *Ap lodi apvilkts cilindrs C un konuss K; cilindra un konusa tilpumu apzīmēsim ar V_1 unV_2. Kādu vismazāko vērtību v var pieņemt V_2, ja V_1 =1? Cik liels ir apvilktā konusa K ar tilpumu v aksiālā šķēluma virsotnes leņķis?* Autoru risinājums salīdzinājumā ar augstāk doto ir krietni garāks un tehniski sarežģītāks.

<u>29. uzdevums</u>. Pozitīviem x atrast funkcijas $g(x) = x(1- x^2)$ vislielāko vērtību.

Ievērosim, ka funkcija g savu maksimumu sasniedz intervālā (0, 1), jo tiem x, kuri lielāki nekā 1, funkcijas vērtības ir negatīvas. Lietosim sekas SK funkcijai $2g^2$:

$$2g^2 = (2x^2)(1- x^2)(1- x^2)$$

Pielīdzinot reizinātājus: $2x^2 = 1 - x^2$, iegūstam, ka $x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow$ max $g = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

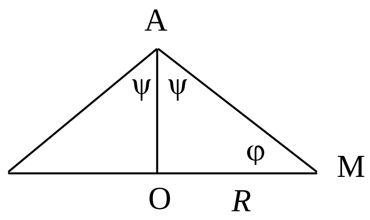
Aplūkotā funkcija ir pamatā vairākiem saistošiem uzdevumiem, kurus mācību literatūrā nereti piedāvā risināt ar diferenciālrēķinu palīdzību.

Vislielākais apgaismojums

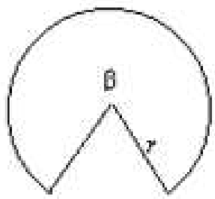
<u>30. uzdevums</u>. Virs apaļa galda centra O jānovieto gaismas avots tā, lai apgaismojums uz galda malas būtu vislielākais. Kāds ir virsotnes leņķis optimālā apgaismojuma konusam, t. i., konusam, kura pamats ir dotais ‘apaļais galds’ un virsotne – ‘gaismas avots’? Pieņemt, ka apgaismojums punktā M ir proporcionāls krišanas leņķa AMO sinusam un apgriezti proporcionāls attāluma MA (līdz gaismas avotam A) kvadrātam, sk. 30. zīm.

Blokā virs apaļa galda centra karājas lampa. Kādā augstumā jānovieto šī lampa, lai uz galda malām iegūtu vislielāko apgaismojumu? ([Vig1, 224-225] uzdevums risināts ar atvasinājuma palīdzību, bet ar elementāriem paņēmieniem tas atrisināts [Nat, 27-28].)

Apgaismojuma spožums izsakās ar formulu $f = \frac{m \sin \varphi}{r^2}$, *kur* φ *- staru slīpuma leņķis, r- attālums no laukuma līdz gaismas avotam, m- konstante (gaismas avota intensitāte). Kādā augstumā h jānovieto lukturis uz staba, lai attālumā a esošā horizontālā laukuma apgaismojums būtu vislielākais?* [GK, 116; GL, 329]



30. zīm.


31. zīm.

Aplūkosim trijstūri AMO un uzskatīsim, ka tā virsotnē A atrodas gaismas avots, φ - leņķis AMO, ψ - leņķis OAM, $R = |OM|$ - attālums no galda malas līdz galda centram, sk. 30. zīmējumu.

Pārveidosim gaismas 'stipruma' formulu $f = \frac{m \sin \varphi}{r^2}$:

$$\frac{R}{r} = \cos\varphi \;\Rightarrow\; f = \frac{m \sin\varphi}{r^2} = \frac{m}{R^2}\cos^2\varphi \sin\varphi \;.$$

Apzīmējot *sin*φ ar *x*, iegūsim funkciju, kas atšķiras no iepriekšējā uzdevumā aplūkotās tikai ar konstantu reizinātāju. Tātad vislabākais apgaismojums atbilst tādam leņķim φ, kuram $sin^2\varphi = 1/3 \Rightarrow sin^2\psi = 2/3 \Rightarrow \psi = arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$. Atbilde: optimālā konusa virsotnes leņķis ir

$$\theta := 2\psi = 2arcsin\frac{\sqrt{6}}{3} = \mathbf{109^o28'}\ldots$$

Zinot φ, viegli aprēķināt gaismas avota novietošanas optimālo augstumu

$$h = |OA| = rsin\varphi = \frac{\mathrm{r}}{\sqrt{3}} = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{2}}.$$

Piezīme. Šādu leņķa lielumu

$$\theta := 2arcsin\frac{\sqrt{6}}{3} = 2arctg\sqrt{2} = \mathbf{109^o28'}\ldots$$

var uzskatīt par svarīgu konstanti, kas parādās ne tikai matemātikā. Šai sakarā ieteicams S. Petrova raksts "Maksimālā tilpuma konuss dabā" [Pet]. Tajā cita starpā dots šāds izvilkums no L. Cvetkova mācību grāmatas organiskajā ķīmijā: **Oglekļa atoma visas valentās saites vērstas uz tetraedra virsotnēm, vienādi attālinātas viena no otras, leņķis starp tām ir 109°28'….**

Turpmāk doti vēl daži piemēri, kur parādās leņķis θ.

31. uzdevums. Pierādīt, ka no visiem konusiem ar dotu veiduli vislielākais tilpums ir konusam ar virstnes leņķi θ**.**

Atrast vislielāko tilpumu konusam ar dotu veiduli l. [GK, 115]

Izmantojot sakarības $R = r\cos\varphi$, $H = r\sin\varphi$, kur $r = |AM|$ konusa veidule, sk. iepriekšējā uzdevuma zīmējumu, konusa tilpumu V var izteikt kā

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi\, r^3 \cos^2\varphi \sin\varphi.$$

Tagad atliek ievērot, ka funkcija V atšķiras no iepriekšējā uzdevumā analizētās funkcijas f tikai ar konstantu reizinātāju. Tas nozīmē, ka maksimālā tilpuma konuss šajā uzdevumā nav nekas cits kā vislabākā apgaismojuma konuss iepriekšējā uzdevumā.

Piezīme. Leņkis θ parādās arī uzdevumos par maksimālā tilpuma konusu, maksimālā tilpuma regulāra *n*-stūra piramīdu, ja dots sānu virsmas laukums *S*. Tas izriet no formulas:

$V^2 = \dfrac{S^3}{9n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}} \cdot \sin^2\varphi\cos\varphi$, kur φ – leņķis starp piramīdas sānu skaldni un pamata plakni.

32. uzdevums. *No riņķa sektora ar dotu rādiusu tiek saritināta konusveidīga piltuve. Kādam centra leņķim tai ir vislielākais tilpums?* [GK, 115]

Dots riņķis ar rādiusu L. Izgriezt no tā maksimālā tilpuma konusa izklājumu. [Pet]

Riņķa rādiusu apzīmēsim ar r, meklējamo centra leņķi ar β, sk. 31. zīmējumu. No sektora izveidotam konusam veidules garums $|AM| = r$ ir fiksēts lielums, tāpēc var atsaukties uz iepriekšējo uzdevumu un secināt, ka maksimālā tilpuma konuss arī šajā uzdevumā nav nekas cits kā optimālā apgaismojuma konuss 30. uzdevumā.

Centra leņķi β var noteikt no formulas $\beta r = 2\pi R \Rightarrow$

$$\beta = 2\pi\frac{R}{r} = 2\pi\cos\varphi = 2\pi\,\frac{\sqrt{6}}{3} = 293^0 56' \ldots$$

33. uzdevums. Pierādīt, ka dotā lodē ievilktam maksimālā tilpuma konusam leņķis starp veiduli un pamatu ir tieši $\frac{\theta}{2}$**.**

Iegūstiet patstāvīgi pierādījumu, izmantojot 28. uzdevuma rezultātu, ka lodes rādiuss attiecas pret konusa augstumu kā 3 pret 4. Iepazīsimies ar vēl vienu pierādījumu. Apzīmēsim lodes rādiusu ar a un, ņemot vērā, ka konusa veidules garums $r = |AM| = 2a\cos\psi$, $R = r\sin\psi$, $H = r\cos\psi$, izteiksim konusa tilpumu V kā funkciju no ψ:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi r^3 \sin^2\psi \cos\psi = \frac{1}{3}\pi\, 8a^3 \sin^2\psi \cos^4\psi =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\, 4a^3 (2 - 2\cos^2\psi)(\cos^2\psi)(\cos^2\psi).$$

Iekavās iekļauto trīs reizinātāju summa ir 2, tāpēc tilpums būs maksimāls, ja

$$\cos^2\psi = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \sin^2\varphi = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\theta}{2}.$$

Piezīme. Šis uzdevums var kalpot kā atslēga, lai pozitīviem x atrastu vislielāko vērtību funkcijai $\frac{x}{(1+x)^3}$ vai, kas ir līdzvērtīgi, vismazāko vērtību funkcijai $x^2+3x+\frac{1}{x}$. Minēto funkciju iegūst, tilpuma V izteiksmē $\cos^2\psi$ aizstājot ar $\frac{1}{1+x}$.

34. uzdevums. Pierādīt, ka no visām regulārām n-stūra piramīdām ar dotu:

1) sānu šķautnes garumu c vislielākais tilpums ir tai piramīdai, kuras sānu šķautne ar pamatu veido leņķi $\frac{\pi-\theta}{2}$.
2) apotēmu a (sānu skaldnes augstumu) vislielākais tilpums ir tai piramīdai, kuras sānu skaldne ar pamatu veido leņķi $\frac{\pi-\theta}{2}$.

Regulāras n-stūra piramīdas sānu šķautne a ar pamatu veido leņķi α. Kādam α piramīdas tilpums ir vislielākais? [Ze, 95; Atbilde: $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$.]

Regulāras n-stūra piramīdas apotēma ir a. Sānu skaldņu slīpuma leņķis attiecībā pret pamatu ir α. Kādam α piramīdas tilpums ir vislielākais? [Ze, 96; Atbilde: $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$.]

Izmantosim šādas tilpuma formulas:

$$V_1 = \frac{c^3}{6} n \sin\frac{2\pi}{n}\cos^2\alpha\sin\alpha, \quad V_2 = \frac{a^3}{3} n\sin\frac{\pi}{n}\cos^2\alpha\sin\alpha.$$

Tās atšķiras tikai ar konstantu reizinātāju. Zināms, ka $\sin\alpha\cos^2\alpha$ ir maksimāls, ja $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, sk. piemēram, 30. uzdevumu. Saskaņā ar leņķa θ definīciju:

$$\sin\frac{\pi-\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Piezīme. Nozīmīgs uzdevums, kur parādās leņķis

$$\theta := 2\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{2} = \mathbf{109^o 28'}\ldots$$

ir uzdevums par bišu šūnu. Tas sīkāk aplūkots nodaļā "Piemēri no dabas". Sk. [Nag, 21-22.; Oz, 158-160; GK, 116-117].

Uzdevumi par taisnstūra paralēlskaldņiem

35. uzdevums. Kādam taisnstūra paralēlskaldnim ar dotu tilpumu virsmas laukums ir minimāls? (Atbilde: Kubam.)

Noteikt vaļēja taisnstūrveida baseina izmērus, ja tam ir vismazākais virsmas laukums un dots tilpums V. [Min, 220] 3)

Starp visiem taisnstūra paralēlskaldņiem ar dotu tilpumu V atrast to, kuram virsmas laukums ir minimāls. [Eng, 22; uzdevums risināts ar Lagranža reizinātāju metodi, kas, vispārīgi runājot, dod tikai ekstrēma nepieciešamo nosacījumu.]

Apzīmēsim paralēlskaldņa malu garumus ar x, y un z. Tad tilpums $V = xyz$ un virsmas laukums $S = 2(xy + xz + yz)$. Lietojam nevienādību $A \geq G$.

$$\frac{S}{6} = \frac{xy + xz + yz}{3} \geq \sqrt[3]{(xy)(xz)(yz)} = \sqrt[3]{V^2} \Rightarrow \min S = 6\sqrt[3]{V^2}, \text{ ja } x = y = z = \sqrt[3]{V}. \quad (*)$$

Piezīme. No (*) izriet, ka arī duālā uzdevuma – *Kādam taisnstūra paralēlskaldnim ar dotu virsmas laukumu S tilpums ir maksimāls?* – atbilde ir kubs. Elementārs risinājums atrodams, piemēram, grāmatā [BB1, 109].

36. uzdevums. Kādam taisnstūra paralēlskaldnim ar dotu tilpumu V un divu šķautņu garumu attiecību k virsmas laukums ir minimāls?
Lietojot nevienādību $A \geq G$, patstāvīgi pierādiet, ka optimālajam paralēlskaldnim šķautņu garumu attiecība ir $1 : k : \frac{2k}{k+1}$. Uzdevuma speciāls gadījums, kad $k = 2$, patstāvīgai risināšanai piedāvāts [Š1, 192]: *Taisnstūra paralēlskaldņa tilpums ir V, bet pamata malu attiecības ir 1 : 2. Kādām jābūt paralēlskaldņa šķautnēm, lai tā pilnās virsmas laukums būtu vismazākais? Atrast šķautņu attiecību.*

37. uzdevums. *Jāizgatavo taisnstūra paralēlskaldņa formas kastīte, lai tās pamata laukums būtu 2 dm*^{2}*, bet sānu virsmas laukums 18 dm*^{2}*. Kādiem jābūt kastītes izmēriem, lai visu šķautņu garumu summa būtu minimāla?* [VR, 23] (Atbilde: 1, 2 un 3 dm.)

Visgarākais baļķis

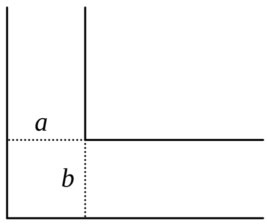
38. uzdevums. Kāds ir visgarākais baļķis, kurš var izpeldēt cauri taisnstūrveida kanālam attiecīgi ar platumiem a un b, sk. 32. zīmējumu?

Citi formulējumi. *Upe met* 90^0 *lielu līkumu, pirms līkuma upes platums ir a, pēc līkuma – b. Kāds visgarākais baļķis var izpeldēt cauri šādam līkumam*?

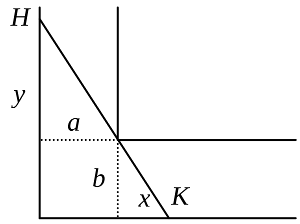
Atrast visgarākās kāpnes, kuras var iznest cauri taisnleņķa stūrim no koridora ar platumu a koridorā ar platumu b.

Taisna leņķa QOR iekšienē dots punkts P. Kā jāizvēlas punkts H uz OQ un punkts K uz OR, lai taisnes nogrieznis HK būtu visīsākais? [Niv]

Caur fiksētu punktu (a, b) *novilkta taisne, kas krusto asis OX un OY punktos P un Q. Pierādīt, ka PQ, OP + OQ un OP·OQ minimālās vērtības attiecīgi ir*
$(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ un $4ab$. [Har, 236-237]



32. zīm.



33. zīm.

Pirmajā brīdī šķiet savādi, ka uzdevums par **visgarāko** baļķi ir līdzvērtīgs uzdevumam par **visīsāko** nogriezni HK. Izteiksim HK garumu kā funkciju no x, sk. 33. zīm. No proporcijas $x : b = a : y \Rightarrow y = \frac{ab}{x}$. Pēc Pitagora teorēmas:

$$|HK|^2 = (a + x)^2 + (b + y)^2 = (a + x)^2 + (b + \frac{ab}{x})^2 \Rightarrow$$

$$|HK|^2 = (x^2 + \frac{ab^2}{x} + \frac{ab^2}{x}) + (\frac{a^2b^2}{x^2} + ax + ax) + a^2 + b^2.$$

Pirmo trīs saskaitāmo summa pēc sekām RK būs vismazākā, ja $x^3 = ab^2$, gluži tas pats attiecas uz otrajās iekavās iekļauto trīs saskaitāmo summu. Tā kā abas summas savu vismazāko vērtību sasniedz vienā un tajā pašā punktā $x = \sqrt[3]{ab^2}$, tad arī HK būs vismazākais tieši šajā punktā. Atbilde: maksimālais baļķa jeb minimālais nogriežņa HK garums ir vienāds ar $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

Piezīme. Grāmatā [AMS] uzdevums risināts ar atvasinājuma palīdzību, meklējot minimumu funkcijai $\dfrac{a}{\cos x} + \dfrac{b}{\sin x}$.

Visietilpīgākā kaste

39. uzdevums. *Izgriežot stūrus un salocot malas uz augšu, no kvadrātiska skārda gabala jāizgatavo vislielākā iespējamā tilpuma vaļēja kaste. Cik liels jāņem kastes augstums h un cik liels būs kastes tilpums? Kvadrāta malas garums ir a.* [Oz, 154]

Šajā grāmatā uzdevums risināts ar atvasinājuma palīdzību, tiesa, bez pamatojuma, ka atrastais lokālais ekstrēms ir meklētais maksimums. Uzdevums sastopams daudzos avotos [GL, 324; Ze, 73, 96; Si1, 73], sk. arī nākamo nodaļu. Elementārus risinājumus var atrast [Ze, Si1, VR].

Apzīmēsim izgriežamā kvadrāta malas garumu ar x, sk. 34. zīm. Tad kastes tilpums būs

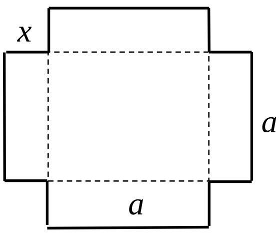
$$V = x(a - 2x)^2.$$

Pārveidojam tilpuma izteiksmi formā:

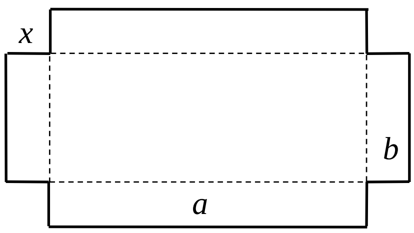
$$4V = (4x)(a - 2x)(a - 2x)$$

Trīs reizinātāju summa ir konstants lielums, tāpēc to reizinājums būs maksimāls, ja

$$4x = a - 2x \Rightarrow x = \frac{a}{6} \Rightarrow V_{\max} = \frac{4a^3}{9}.$$



34. zīm.



35. zīm.

Šo pamācošo un saistošo piemēru var ievērojami sarežģīt, ja sākumā doto kvadrātisko loksni aizstāj ar kādu taisnstūri, sk. 35. zīm. Grāmatā [Vig1, 196] aplūkots taisnstūris 48 × 30, bet vispārīgais gadījums $a \times b$ ir formulēts [GK, 114]. I. Natansons [Nat] aplūko taisnstūri 80 × 50 un meklē maksimumu funkcijai

$$V(x) = x(80 - 2x)(50 - 2x).$$

Paņēmiens $4V(x) = 4x(80 - 2x)(50 - 2x)$, kas dod konstantu reizinātāju summu $4x + (80 - 2x) + (50 - 2x) = 130$, šoreiz neder, jo nav tāda x, kuram pēdējie divi reizinātāji būtu vienādi. Tomēr šo paņēmienu var pilnveidot. Funkcijas V vietā aplūkosim šādu funkciju

$$(2k + 2)x(80 - 2x)(50k - 2kx)$$

un noteiksim k tā, lai

$$(2k + 2)x = 80 - 2x = 50k - 2kx.$$

Šo vienādojumu sistēmu apmierina $k = 2$ un $x = 10$. Tā kā visi trīs reizinātāji ir pozitīvi, tad var lietot nevienādību $A \geq G$, kas dos $\max V = 18000$. Gandrīz droši, ka pirmajā brīdī lietotais funkcijas aizstāšanas paņēmiens liksies kā matemātisks triks. Lai kliedētu neskaidrības un šo triku pārvērstu par metodi, aplūkosim funkciju

$$f(x) = x(x - a)(x - b),$$

kur $a \leq b$ pozitīvi skaitļi un $0 \leq x \leq b$. Meklēsim divus pozitīvus skaitļus p un q, lai jaunajai funkcijai

$$F(x) = px(a - x)(qb - qx)$$

būtu spēkā šādas divas īpašības:

(i1) $px + (a - x) + (qb - qx) = \text{const}$,

(i2) $px = a - x = qb - qx$

Pirmā īpašība nozīmē, ka trīs reizinātāju summa nav atkarīga no x, kas dod sakarību

$$p - 1 - q = 0 \Rightarrow q = p - 1.$$

No vienādībām

$$px = a - x, \quad px = qb - qx,$$

izsakot x, iegūstam:

$$x = \frac{a}{1+p} = \frac{qb}{q+p} \;\Rightarrow\; \frac{a}{1+p} = \frac{(p-1)b}{2p-1} \;\Rightarrow\; p^2 b - 2ap + a - b = 0.$$

Kvadrātvienādojuma pozitīvā sakne ir $p = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{b}$.

Viegli pārbaudīt, ka $q > 0$ un ka visi reizinātāji pozitīvi, jo

$$b - x \geq a - x = a - \frac{a}{1+p} = \frac{ap}{1+p} > 0.$$

Tagad var lietot nevienādību $A \geq G$, kas dod $\max F(x) = \left(\dfrac{pa}{1+p}\right)^3$.

Iegūto rezultātu formulēsim kā teorēmu.

Teorēma. Ja $0 < a \leq b$, tad funkcija $f(x) = x(x - a)(x - b)$, $0 \leq x \leq b$, savu maksimumu sasniedz punktā $x = \dfrac{a}{1+p}$, kur $p = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{b}$, turklāt

$$\max f(x) = \frac{p^2 a^3}{(p+1)^3 (p-1)}.$$

Vingrinājums. Pierādiet, ka skaitlis $\dfrac{a}{1+p}$ ir kvadrātvienādojuma $3x^2 - 2(a + b)x + ab = 0$ sakne!

Piezīme. Teorēmu var vispārināt arī patvaļīgiem skaitļiem a, b, ja vien funkcijai f eksistē maksimums. Taču to mēs nedarīsim, jo ir ērtāka metode, kā meklēt ekstrēmus funkcijai $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tā izklāstīta nodaļā "Kubiska funkcija".

Lietojot teorēmu, atrisiniet turpmāk analizēto Tartaļjas uzdevumu un pēc tam iepazīstieties ar citu vienkāršāku risinājumu, kas dots nodaļā "Kubiska funkcija".

40. uzdevums. (**Tartaļjas uzdevums**). Skaitli 8 sadalīt divās daļās (pozitīvās) tā, lai to reizinājuma reizinājums ar starpību būtu maksimāls.

41. uzdevums. Aprēķināt funkcijas $y = \frac{x^2 + 6x + 8}{x}, x > 0$, minimālo vērtību.

$$y = x + \frac{8}{x} + 6 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{8}{x}} + 6 = 4\sqrt{2} + 6 \Rightarrow \max \frac{1}{y} = \frac{1}{4\sqrt{2} + 6} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}.$$

Funkcijas y minimālā vērtība ir punktā $x = \sqrt{8}$.

Piezīme. Pamēģiniet atrisināt šo uzdevumu ar metodi "Vērtību kopas izmantošana", sk. 4. nodaļu.

42. uzdevums. Atrast visus tādus skaitļus a, b un c, lai funkcijai $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x}, x > 0$, eksistētu minimālā vērtība.

Atbilde. Der visi a, b, c, kur b patvaļīgs skaitlis, bet $ac > 0$ vai $a = c = 0$.

Optimālā rene, grāvis

43. uzdevums. *No trīs vienādiem dēļiem ar platumu a cm jāizgatavo rene, kuras šķērsgriezumam ir trapeces forma. Kā to izdarīt tā, lai renes caurlaides spēja būtu vislielākā (šķērsgriezuma laukums vislielākais)?* [Nag, 49]

No trīs vienāda platuma dēļiem jāizgatavo ūdens noteces rene, kuras šķērsgriezumam ir vienādsānu trapeces veids. Kādam jābūt leņķim starp trapeces sānu malu un pamatu, lai renes caurlaides spēja būtu vislielākā, t. i., lai trapeces laukums būtu vislielākais? [Š1]

44. uzdevums. Kādam četrstūrim ar trīs vienādām dota garuma malām laukums ir vislielākais?

45. uzdevums. Kādam četrstūrim ar dotu trīs malu garumu summu laukums ir vislielākais?

Šis uzdevums reducējams uz iepriekšējo. Var atsaukties uz faktu, ka n-stūrim ar dotu perimetru maksimālais laukums, ir tad, ja tam visas malas ir vienādas (Sk. 17. uzdevuma Sekas.). Četrstūri attēlojot simetriski pret attiecīgo malu, iegūtu 6-stūri ar fiksētu perimetru.

Savukārt 44. uzdevums viegli reducējams uz 43. uzdevumu. Izmantojam gandrīz vai acīmredzamu īpašību, ka no visiem trijstūriem ar dotām divām malām vislielākais laukums ir taisnleņķa trijstūrim. Zinot, ka $\angle ACD = \angle ABD = 90^0$ un $AB = CD$, secinām, ka trijstūri ABD un ACD ir vienādi. Tātad 36. zīmējumā attēlotajam četrstūrim ABCD laukums būs maksimāls tad, ja ABCD būs vienādsānu trapece.

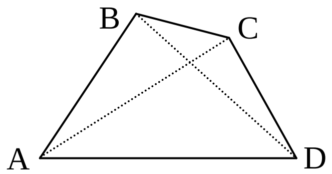
Lai noteiktu, kādai vienādsānu trapecei laukums ir vislielākais, AB projekcijas (uz pamatu AD) garumu apzīmēsim ar x, sk. 37. zīmējumu, un sastādīsim funkciju, kas izsaka trapeces laukumu

$$L = (a+x)\sqrt{a^2 - x^2}\ .$$

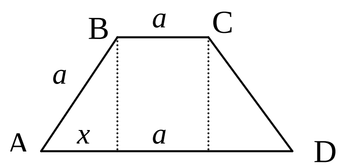
Izteiksmē

$$3L^2 = (a + x)\,(a + x)\,(a + x)\,(3a - 3x)$$

četru reizinātāju summa ir konstants lielums, tāpēc tā būs vislielākā, ja visi reizinātāji būs vienādi. No $a + x = 3a - 3x \Rightarrow 2x = a$, kas nozīmē, ka optimālās trapeces leņķi pie pamata ir vienādi ar 60^0. Atzīmēsim, ka šāda trapece sastāv no trīs vienādmalu trijstūriem un ir regulāra 6-stūra puse.



36. zīm.



37. zīm.

Daži olimpiāžu uzdevumi

46. uzdevums. (24. atklātā matemātikas olimpiāde, 10. klase, [AB, 100])
Dots, ka skaitļi x un y atšķiras no nulles. Pierādīt, ka

$$x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2 y^2} \geq 4\,.$$

Trešo saskaitāmo uzrakstām kā divu vienādu saskaitāmo summu. Tad četru saskaitāmo reizinājums ir 1. Saskaņā ar sekām RK summa ir minimāla, ja visi četri saskaitāmie ir vienādi (ar 1).

47. uzdevums. Skaitļi x un y ir pozitīvi un $x + y = a$. Kādu vismazāko vērtību var pieņemt izteiksme $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$? [AZT, 33]

Lietojam nevienādību $A \geq G$: $\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a}{xy} \geq \frac{4a}{(x+y)^2} = \frac{4}{a}$.

48. uzdevums. [VR, 60-61] “Atrast izteiksmes (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) lielāko iespējamo vērtību, ja a, b, c - pozitīvi skaitļi, kuru summa ir 1.

Atrisinājums. Ja kāda no iekavām ir 0, tad izteiksmes vērtība ir 0, ja kāda iekava ir negatīva, tad tāda ir tikai viena (tā, kurā lielākais no skaitļiem a, b, c ir ar mīnusa zīmi), un izteiksmes vērtība nav pozitīva. Ja visas iekavas ir pozitīvas, tad a, b, c var uzskatīt par tāda trijstūra malu garumiem, kura perimetrs ir 1. Kā zināms, lielākais laukums starp trijstūriem ar konstantu perimetru ir regulāram trijstūrim, tāpēc saskaņā ar Hērona formulu

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Ceļot nevienādības abas puses kvadrātā un ievērojot, ka a+b+c=1, iegūstam, ka

(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$\leq\frac{1}{27}$, turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja a=b=c=$\frac{1}{3}$.”

Uzdevumu var atrisināt īsāk un vienkāršāk. Ja ir tikai viens negatīvs reizinātājs, tad reizinājums nav pozitīvs. Divi reizinātāji nevar būt negatīvi vienlaicīgi, jo, tos saskaitot, iegūtu vienu no dotajiem pozitīvajiem skaitļiem a, b vai c. Beidzot, ja visi trīs reizinātāji ir pozitīvi, tad saskaņā ar nevienādību $G \le A$ izteiksmes vislielākā vērtība ir $\frac{1}{27}$ (ja $a = b = c = \frac{1}{3}$).

49. uzdevums. Pierādīt vai atspēkot nevienādību

$$abc \geq (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a),$$

ja: 1) a, b un c trijstūra malu garumi; 2) a, b un c patvaļīgi pozitīvi skaitļi.

Žurnālā [Квант, 1986, N94, 35. lpp.] uzdevums: "Pieņem, ka $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Pierādīt nevienādību $abc \geq (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$." paredzēts 8. klases skolēniem. [4)]

Var uzskatīt, ka visi trīs reizinātāji pozitīvi. Ja divi no tiem būtu negatīvi, piemēram, $a + b - c < 0$ un $a + c - b < 0$, tad, saskaitot šīs nevienādības, iegūtu $2a < 0$. Pierādāmā nevienādība līdzvērtīga šādai:

$$a^2b^2c^2 \geq (a + b - c)^2(a + c - b)^2(b + c - a)^2 =$$

$$= [a^2 - (b - c)^2][b^2 - (a - c)^2][c^2 - (a - b)^2],$$

kas acīmredzami pareiza, jo $x^2 \geq x^2 - (y - z)^2$.

Piezīme. No šī risinājuma kā sekas iegūstama Eilera nevienādība $R \geq 2r$, kur R, r – ap trijstūri apvilktās un tajā ievilktās riņķa līnijas rādiuss.

50. uzdevums. (XLI Starptautiskā matemātikas olimpiāde, Dienvidkoreja, 2000)
Pozitīvi skaitļi a, b, c tādi, ka abc = 1. Pierādīt, ka

$$(a - 1 + \frac{1}{b})(b - 1 + \frac{1}{c})(c - 1 + \frac{1}{a}) \leq 1.$$

Daži atrisinājumi ir doti žurnālā *Математика в школе*, 2000, N9. Viens no īsākajiem atrisinājumiem iegūstams, lietojot nevienādību $A \geq G$. Tā kā nevienādība ir precīza (vienādību iegūst, ņemot $a = b = c = 1$), tad šis uzdevums ir īsts ekstrēmu uzdevums.

Apzīmēsim iekavās iekļautos trīs reizinātājus attiecīgi ar p, q un r. Ja kādi divi no tiem būtu negatīvi, piemēram, p un q, tad iegūtu pretrunu:

$$p = a - 1 + \frac{1}{b} < 0 \Rightarrow a + \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow b > 1 \Rightarrow q = b - 1 + \frac{1}{c} > 0.$$

Ja negatīvs būtu tikai viens reizinātājs, tad $pqr \leq 0$. Tātad atliek izanalizēt gadījumu, kad visi reizinātāji ir pozitīvi. Ņemot vērā doto vienādību $abc = 1$, atrodam reizinājumus pq, pr, qr un pqr.

$$pq = ab - a + \frac{a}{c} - b + 1 - \frac{1}{c} + 1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} = 2 - b - \frac{1}{b} + \frac{a}{c},$$

$$pr = 2 - a - \frac{1}{a} + \frac{c}{b}, \quad qr = 2 - c - \frac{1}{c} + \frac{b}{a},$$

$$pqr = (2 - b - \frac{1}{b} + \frac{a}{c})(c - 1 + \frac{1}{a}) = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{a}{c} - \frac{c}{b} - \frac{b}{a} - 2.$$

Ievērojam, ka $pq + pr + qr = 4 - pqr$, un lietojam nevienādību $A \geq G$:

$$\frac{pq + pr + qr}{3} = \frac{4 - pqr}{3} \geq \sqrt[3]{(pqr)^2} \Rightarrow pqr \leq 1,$$

kas arī bija jāpierāda.

51. uzdevums. (Latvijas 57. matemātikas olimpiādes 4. kārtas uzdevums, 2007.)

Dots, ka $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ un $(a + b)(b + c)(c + a) = 1$. Pierādīt, ka $ab + bc + ca \le \frac{3}{4}$.

Viens no īsākajiem un vienkāršākajiem risinājumiem iegūstams, asprātīgi lietojot nevienādību $A \geq G$.

1. Saskaņā ar nevienādību $3A \geq 3G$:

$$(a + b) + (b + c) + (c + a) \geq 3 \Rightarrow a + b + c \ge \frac{3}{2}.$$

2. Saskaņā ar nevienādību $2A \geq 2G$, ko lietojam katrai no trīs iekavām:

$$1 = (a + b)(b + c)(c + a) \ge 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc \Rightarrow abc \le \frac{1}{8}$$

3. No vienādības

$$(a + b)(b + c)(c + a) + abc = (ab + bc + ca)(a + b + c),$$

kuras pareizību var pārbaudīt, atverot iekavas vai ievietojot trīs vērtības $c = -a$, $c = -b$ un $c = 0$, iegūstam:

$$ab + bc + ca = \frac{1 + abc}{a + b + c} \le \frac{1 + \frac{1}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}.$$

52. uzdevums. Pozitīviem a, b, c pierādīt nevienādību [5)]

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}.$$

Nevienādībai zināmi vairāki pierādījumi. Iepazīsimies ar diviem no tiem.

1. Grāmatā [Nev, 130] dotais pierādījums:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c} - 1 + \frac{a+b+c}{c+a} - 1 + \frac{a+b+c}{a+b} - 1 =$$

$$= (a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) - 3.$$

$$3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \le (a+b) + (b+c) + (c+a) \Rightarrow a+b+c \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)} \{(b+c)(c+a) + (c+a)(a+b) + (a+b)(b+c)\} \ge$$

$$\ge \frac{3}{(a+b)(b+c)(c+a)} \sqrt[3]{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot \frac{3}{(a+b)(b+c)(c+a)} \sqrt[3]{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} - 3$$

2. Īsāku pierādījumu iegūst, izmantojot nevienādību $A \geq H$. Apzīmē: $x = a + b$, $y = b + c$, $z = c + a$, A un H – skaitļu x, y un z vidējais aritmētiskais un vidējais harmoniskais.

Tad, ņemot vērā, ka $a + y = b + z = c + x = \frac{3A}{2}$:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a+y}{y}-1+\frac{b+z}{z}-1+\frac{c+x}{x}-1=\frac{9A}{2H}-3\overset{?}{\geq}\frac{3}{2} \Leftrightarrow A\geq H.$$

Tēma patstāvīgam darbam

Kurus no K. Šteinera mācību līdzeklī [Š1] dotajiem ekstrēmu uzdevumiem jūs varat atrisināt, izmantojot nevienādību $A \geq G$ vai no tās izrietošās sekas SK vai RK? Vai visus šajā sarakstā iekļautos uzdevumus varat atrisināt ar elementārām metodēm? Tāds pats jautājums par uzdevumu krājumā [KZZ] dotajiem ekstrēmu uzdevumiem. Kvadrātiekavās minēti daži avoti, kur vēl atrodami šie uzdevumi.

VINGRINĀJUMI [Š1]

159. Sadalīt skaitli 10 divos saskaitāmajos tā, lai to reizinājums būtu vislielākais. [GL, 326; Oz, 160; Min, 149]

160. No visiem taisnstūriem, kuru laukums ir S, noteikt to taisnstūri, kura perimetrs ir vismazākais. [Čez, 279; Ze, 56; Nag, 46]

161. Atrast divus skaitļus, kuru starpība ir vienāda ar 5, bet reizinājums ir vismazākais. [KZZ, 161]

162. Jāizbūvē vaļēja tvertne, kuras tilpums ir 32 m^3 un pamats ir kvadrāts. Kādiem jābūt tvertnes izmēriem, lai būvei tiktu izlietots vismazāk materiāla?
(Droši vien domāts, ka tvertnei ir taisna paralēlskaldņa forma.)
[GL, 327; Min, 149; Oz, 160; BM, 25]

163. Pierādīt, ka no visiem dotajā riņķī ievilktajiem vienādsānu trijstūriem vislielākais laukums ir vienādmalu trijstūrim. [GL, 326]

164. No visiem dotajā pusriņķī ievilktajiem taisnstūriem atrast to taisnstūri, kura laukums ir vislielākais. [Ber 86; Si1, 72]

165. No stikla gabala, kuram ir trijstūra forma, jāizgriež taisnstūrveida loksne tā, lai tās laukums būtu vislielākais un viena mala atrastos uz trijstūra malas. Kā to izdarīt? [Nag, 47; BM, 22; T, 30; Si1, 71]

166. Kādai ir jābūt riņķa cilindra veida konservu kārbas augstuma un rādiusa attiecībai, lai tās izgatavošanai tiktu izlietots vismazāk materiāla? [Vig1, 198; Ber 85]

167. Ap puslodi apvilkts konuss. Kādai jābūt konusa augstuma un rādiusa attiecībai, lai tā tilpums būtu vismazākais? [Ze, 85; GK, 114; Si1, 73]

168. Taisnstūra paralēlskaldņa tilpums ir *V*, bet pamata malu attiecības ir 1 : 2. Kādām jābūt paralēlskaldņa šķautnēm, lai tā pilnās virsmas laukums būtu vismazākais? Atrast šķautņu attiecību. [Ber, 84]

169. Tuneļa šķērsgriezums ir taisnstūris, kas noslēdzas ar pusriņķi. Šķērsgriezuma perimetrs ir 18 m. Kādam ir jābūt pusriņķa rādiusam, lai tuneļa šķēluma laukums būtu vislielākais? [Nag, 7; Min, 149]

170. Grāmatas lapas laukums ir S cm^2. Drukātajam tekstam labajā pusē jāatstāj a cm plata mala, bet virs un zem teksta – b cm plata mala. Kādai jābūt lapas izmēru attiecībai, lai ar tekstu aizpildītās lapas daļas laukums būtu vislielākais? [Nag, 49; Ze, 61; GK, 116; Ber, 88]

171. No trīs vienāda platuma dēļiem jāizgatavo ūdens noteces rene, kuras šķērsgriezumam ir vienādsānu trapeces veids. Kādam jābūt leņķim starp trapeces sānu malu un pamatu, lai renes caurlaides spēja būtu vislielākā, t. i., lai trapeces laukums būtu vislielākais? [Nag, 49]

172. Tūrists iet no punkta *A*, kas atrodas uz šosejas, uz punktu *B*, kura attālums līdz šosejai ir 8 km. Attālums starp *A* un *B* ir 17 km. Kurā vietā tūristam jānogriežas no šosejas, lai visīsākā laikā nonāktu punktā *B*, ja viņa pārvietošanās ātrums pa šoseju ir 5 km/h, bet pēc nogriešanās no šosejas – 3 km/h? [KZZ, 166]

173. Rūpnīca A atrodas attālumā b no pilsētas B un attālumā a no dzelzceļa, kas iet uz pilsētu B. Kādā leņķī pret dzelzceļu jābūvē šoseja, lai kravas pārvadājumu izmaksa no rūpnīcas uz pilsētu būtu vismazākā, ja pārvadājumi pa šoseju izmaksā k reizes dārgāk nekā pa dzelzceļu? [Nag, 51]

174. No apaļa filtrpapīra izgriež riņķa sektoru un no tā izgatavo konusveida piltuvi. Kādam jābūt izgrieztā sektora centra leņķim, lai piltuves tilpums būtu vislielākais? [Nag, 52; Ber 85]

175. Apaļa galda rādiuss ir R. Cik augstu virs galda centra jāpaceļ gaismas avots, lai galda malā apgaismojums būtu vislabākais? [GK, 116; GL, 329; Vig1, 224; Nag, 50]

176. Strāvas avota iekšējā pretestība ir r. Kādai ir jābūt ārējai pretestībai R, lai strāvas jauda ārējā ķēdē būtu vislielākā? (Strāvas jauda ārējā ķēdē ir $P=I^2R$, kur $I=\dfrac{E}{R+r}$, E – elektrodzinējspēks.) [Vig1, 223; Nag, 49; Oz, 161]

177. Kādā leņķī pret kustības virzienu jābūt vērstai ragaviņu saitei, lai, velkot aiz saites, ragaviņas pa horizontālu plakni varētu vienmērīgi pārvietot ar vismazāko spēku? Ragaviņu slieču un sniega berzes koeficents ir k. [Nag, 51; Ke]

178. Televizors, kura ekrāna platums vertikālā virzienā ir 50 cm, zālē novietots tā, ka tā apakšējā mala ir 2 m virs skatītāju acu augstuma. Cik lielā attālumā no ekrāna plaknes jāatrodas skatītājam, lai redzes leņķis vertikālajā virzienā būtu vislielākais? [Nag, 49; Nat, 21]

179. Ķermeni izsviež ar sākuma ātrumu v_0 virzienā, kas ar horizontu veido leņķi α. Kādam ir jābūt α, lai lidojuma tālums būtu vislielākais (gaisa pretestību neņemt vērā)? [Nag, 49; Oz, 153]

180. Lietus pile, kuras sākuma masa ir m_0, brīvi krītot, vienmērīgi iztvaiko tā, ka masas zudums ir proporcionāls laikam (proporcionalitātes koeficients k). Pēc cik sekundēm no krišanas sākuma tās kinētiskā enerģija ir vislielākā? (Gaisa pretestību neievērot.) [Ber 85; Vil, 171-172]

181. Ja elektriskā ķēdē ar pretestību R plūst strāva I, tad 1 laika vienībā ķēdē izdalās siltuma daudzums $Q = kI^2R$. Ķēdes sazarojumā strāva I jāsadala divās daļās I_1 un I_2 pa pretestībām R_1 un R_2 tā, lai kopīgais izdalītais siltuma daudzums būtu vismazākais. Noteikt I_1 un I_2 un atrast to attiecību.

182. Veicot eksperimentus, katru mērījumu atkārto n reizes. Rezultātā iegūst n mērskaitļus $x_1, x_2, \dots, x_n$, kas mērīšanas kļūdu dēļ nav vienādi. Ir pierādīts, ka mērāmā lieluma visvarbūtīgākā vērtība ir skaitlis x, ar kuru summai $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$ ir vismazākā vērtība. Atrast x. [GL, 322; Smir, 137; Nag, 48]

183. Neaizvākotai bišu šūnai ir regulāras sešstūra prizmas forma. Ar medu piepildītu šūnu bites aizvāko tā, lai, nemainot tās tilpumu, izlietotu vismazāk vaska. Rezultātā šūna tiek pārsegta ar daudzskaldni, ko veido trīs vienādi rombi ar kopīgu virsotni. Šo daudzskaldni iegūst, ja uz prizmas ass virs augšējā pamata izraugās punktu P, prizmas augšējā pamatā novelk trīs īsākās diagonāles un caur katru no šīm diagonālēm un punktu P velk plakni. Kādam ir jābūt romba virsotnes leņķim, lai aizvākotas šūnas virsmas laukums būtu vismazākais? (Izteikt virsmas laukumu kā funkciju $Q = Q(x)$, kur x ir romba mala; atrisinājumā var izmantot šādus apzīmējumus: a – sešstūra mala, h – lielākās sānu šķautnes garums.) [Nag, 21; Oz, 159; GK, 116-117]

7. nodaļa **Kubiska funkcija**

Daudzi ekstrēmu uzdevumi, to skaitā arī saistoši, reducējami uz kubiskas funkcijas ekstrēmu meklēšanu. Elementāras metodes kubiskas funkcijas ekstrēmu noteikšanai, manuprāt, nav plaši zināmas.

Kvadrātfunkcijai, kā zināms, ekstrēmpunktu var atrast pēc saknēm, proti, kā šo sakņu viduspunktu. Kubiskajai parabolai šāda analoģija nav spēkā.

Uzdevums. Noskaidrot, vai ir tāda kubiska funkcija, kurai trīs sakņu vidējais aritmētiskais ir lokālā ekstrēma punkts.

Vispirms aplūkosim kubiskas funkcijas divus speciālus, bet nozīmīgus gadījumus, uz kuriem var reducēt vairākus klasiskus uzdevumus.

1. Kubiskai funkcijai ir divkārša sakne

1. teorēma. Ja d ir dots pozitīvs skaitlis un $f(x) = x^2(d - x)$, $x \geq 0$, tad

$$\max f(x) = f\left(\frac{2d}{3}\right) = \frac{4d^3}{27}.$$

Pierādījums. Ievērosim, ka funkcija f pieņem pozitīvas vērtības tikai intervālā $(0, d)$ un lietosim nevienādību $G \leq A$.

$$2f(x) = x \cdot x(2d - 2x) \leq \frac{8d^3}{27}.$$

Nevienādība kļūst par vienādību, ja $x = \frac{2d}{3}$.

2. Kubiskai funkcijai saknes veido aritmētisko progresiju

2. teorēma. Ja d ir dots pozitīvs skaitlis un $f(x) = x(d^2 - x^2)$, $x \geq 0$, tad

$$\max f(x) = f\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}d^3}{9}.$$

Pierādījums. Dotajiem x funkcija f ir pozitīva tikai intervālā $(0, d)$, kas nozīmē, ka tikai šajā intervālā funkcija f var sasniegt savu maksimālo vērtību. Izteiksmē

$$2f^2 = (2x^2)(d^2 - x^2)(d^2 - x^2)$$

reizinātāju summa ir konstants lielums, tāpēc saskaņā ar sekām SK reizinājums būs vislielākais, ja šie reizinātāji ir vienādi, t. i., ja $3x^2 = d^2$.

Sekas. Funkcijas $g(x) = x(d - x)(x - 2d)$, $x \geq 0$, maksimuma punkts ir

$$d_{\max} = d + \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Šī teorēma (vai attiecīgās sekas) ir ērts līdzeklis vairāku klasisku uzdevumu risināšanā.

Tartaļjas uzdevums

Es liku lietā savu dedzību, centību un prasmes,
lai atrastu recepti kubisko vienādojumu risināšanai
un, pateicos labvēlīgajam liktenim, tas man izdevās.
(*N. Tartaļja*)

Īsas vēsturiskas ziņas. Itāļu matemātiķis Nikolo Tartaļja (1500-1557), īstajā uzvārdā Fontana, kļuva slavens 1535. gadā, kad publiskā matemātikas disputā pārliecinoši uzvarēja disputa ierosinātāju Fiori. Fiori bija viens no pazīstamās Boloņas universitātes profesora Scipiona del Ferro (1456-1526) skolēniem, kuram profesors īsi pirms savas nāves atklājis lielo noslēpumu – likumu, ar kura palīdzību var atrisināt speciāla veida kubiskos vienādojumus. Tartaļja saprata, ka sacensību tēma būs kubiskie vienādojumi un ka viņa reputācijai draud nopietnas briesmas. Viņam nekas cits neatlika kā pašam saviem spēkiem ar milzīgu garīgo piepūli atrast metodi kubisko vienādojumu risināšanai. Tajā laikā Itālijā matemātiķi visai bieži sacentās grūtu uzdevumu risināšanā. Skatītājiem tā droši vien bija izklaide, bet ne pašiem sāncenšiem. Uzvara bieži vien nozīmēja zinātnieka reputāciju, nākamo amatu un karjeras iespējas. 1539. gadā Tartaļja beidzot "padevās" neatlaidīgajam D. Kardāno un aizšifrētas dzejas veidā deva pavedienu, kā iegūt recepti kubisko vienādojumu risināšanai. Talantīgajam Kardāno pietika ar šo uzvedinošo pavedienu un tālāko viņš izdomāja pats. 1545. gadā Kardāno publicē darbu "Algebrisko likumu lielā māksla" (citā tulkojumā "Lielā māksla jeb par algebriskiem likumiem") un lielo noslēpumu izpauž citiem. Kaut gan Kardāno savā darbā norāda, ka atklājuma gods pieder "manam draugam Tartaļjam", mūsdienās kubisko vienādojumu risināšanas formula tiek saukta Kardāno vārdā. Plašāku vēsturisku informāciju var atrast, piemēram, grāmatā [Sm1].

Tartaļjas uzdevums. *Skaitli* 8 *sadalīt divās tādās daļās tā, lai to reizinājuma reizinājums ar starpību būtu maksimāls.* [T, 39]

Meklējamās daļas apzīmēsim ar x un y. Tad

$$x + y = 8,\ \ \max\,(x - y\,)xy = ?$$

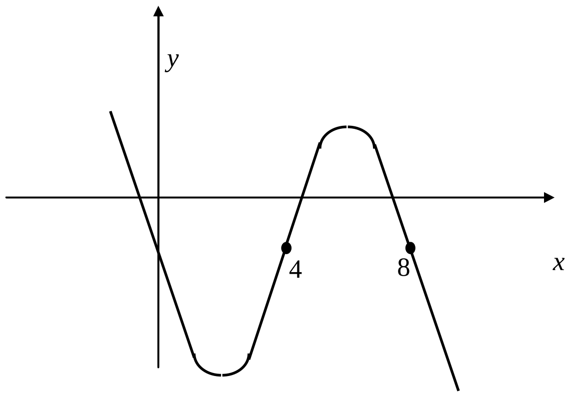
Precizēsim, ka x un y jābūt pozitīviem skaitļiem. Aizstājot y ar $8 - x$, iegūsim, ka maksimums jāmeklē trešās pakāpes funkcijai

$$T(x) := x(8 - x)(2x - 8) = -x^3 + 24x^2 - 64x,$$

kuras grafika skice dota 38. zīmējumā.

Tiem, kas zina matemātiskās analīzes elementus, Tartaļjas uzdevums ir parasts tipveida vingrinājums. Bet kā šo uzdevumu varēja atrisināt tad, kad vēl nepazina tādu metodi kā atvasinājumu lietošana? Tartaļjas domu gājiens ir aprakstīts V. Tihomirova grāmatā [T, 39-41].

Tagad iepazīsimies ar citu metodi, kas turklāt derīga patvaļīgam polinomam. Šo metodi atradu, domājot tieši par Tartaļjas uzdevumu un tikai pēc tam konstatēju, ka Tartaļjas uzdevumu var atrisināt vēl vienkāršāk – ar augstāk formulētās 2. teorēmas palīdzību.



38. zīm.

Tartaļjas funkcijas T saknes ir 0, 4 un 8 un, kā redzams, tās veido aritmētisko progresiju ar diferenci 4. Saskaņā ar teorēmu skaitlis 8 jāsadala šādās divās daļās

$$x = 4 + \frac{4}{\sqrt{3}}; \quad y = 4 - \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Der atzīmēt, ka Tartaļja savu uzdevumu risināja sarežģītākā veidā, vispirms reducējot funkciju T uz tādu kubisku funkciju, kurai ir divkārša sakne. Ideju par divkāršās saknes izmantošanu var piemērot patvaļīgai kubiskai funkcijai, sk. piemēram, [Nag, 26-27]. Šeit tas netiks darīts, jo ir cita – ērtāka metode, kā noteikt kubiskas funkcijas ekstrēmus.

Ekstrēmu noteikšana funkcijai $ax^3 + bx^2 + cx + d$

Atgādināsim, ka punktu x_0 sauc par funkcijas f: $R \rightarrow R$ lokālā maksimuma punktu, ja visiem x no kādas punkta x_0 apkārtnes ir spēkā nevienādība

$$f(x) \le f(x_0). \tag{1}$$

Izejot no šīs nevienādības, meklēsim tādu x_0, ka

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \le ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d \Leftrightarrow$$

$$a(x^3 - x_0^3) + b(x^2 - x_0^2) + c(x - x_0) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - x_0)[ax^2 + xx_0 + x_0^2 + b(x + x_0) + c] \le 0. \tag{2}$$

Funkciju kvadrātiekavās apzīmēsim ar Q un aplūkosim divus gadījumus.
Ja $x - x_0 > 0$, tad no (2) iegūstam, ka $Q(x) \le 0$. Savukārt ja $x - x_0 < 0$, tad $Q(x) \ge 0$. Tātad kvadrātfunkcijas Q nepārtrauktības dēļ: $Q(x_0) = 0$, kas dod sakarību

$$3ax_0^2 + 2bx_0 + c = 0 \tag{3}$$

ekstrēmpunkta x_0 atrašanai.

Sakarību (3) mēs ieguvām, meklējot maksimuma punktu trešās pakāpes polinomam. Nav grūti ievērot, ka, meklējot minimuma punktu, mēs iegūtu to pašu sakarību (3).

Ekstrēmu noteikšana polinomiem

Lietojot aprakstīto paņēmienu n-tās pakāpes polinomam

$$P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$

sakarības (3) vietā iegūtu, ka ekstrēmu punkts x_0 ir šāda (n – 1)-ās pakāpes polinoma sakne:

$$Q(x) = a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1} = 0.$$

Iegūto rezultātu formulēsim kā teorēmu.

<u>3. teorēma</u>. Ja x_0 ir funkcijas $ax^3 + bx^2 + cx + d$ lokālā ekstrēma punkts, tad

$$3ax_0^2 + 2bx_0 + c = 0.$$

Savukārt, ja x_0 ir polinoma P lokālā ekstrēma punkts, tad $Q(x_0) = 0$.

Šī metode dod tā saucamo ekstrēma eksistences nepieciešamo nosacījumu. Kaut gan nepieciešamais nosacījums, vispārīgi runājot, nav pietiekams, šī metode ir visai spēcīgs līdzeklis, ekstrēmu uzdevumu risināšanā.

Tartaļjas uzdevumā kubiskās funkcijas koeficienti ir: $a = -2$, $b = 24$, $c = -64$. Kvadrātvienādojumam (3) ar šādiem koeficientiem intervālā [4, 8] eksistē viena vienīga sakne

$$x_0 = 4 + \frac{4}{\sqrt{3}},$$

kas arī ir viena no skaitļa 8 meklējamām daļām.

Tartaļjas un tamlīdzīgu uzdevumu risināšanā var izmantot arī citu, ne tik ērtu paņēmienu kā iepriekšminētais. Tas saistīts ar visai asprātīgu nevienādības $G \le A$ izmantošanu. Piemeklēsim skaitļus p, q tā, lai

$$px = (8 - x)q = 2x - 8 \qquad (4)$$

un turklāt, lai šo trīs skaitļu summa būtu fiksēta (neatkarīga no x). Tā kā

$$px + (8 - x)q + 2x - 8 = (p - q + 2)x + 8q - 8,$$

tad jāņem $p - q + 2 = 0$ jeb $q = p + 2$. Izslēgsim p no sakarībām (4):

$$px = 2x - 8,$$
$$(8 - x)(p + 2) = 2x - 8,$$
$$(8 - x)(px + 2x) = 2x^2 - 8x,$$
$$(8 - x)(4x - 8)=2x^2 - 8x,$$
$$-6x^2 + 48x - 64 = 0.$$

Kā redzams, esam ieguvuši jau pazīstamo kvadrātvienādojumu (3) ar Tartaļjas uzdevumam atbilstošajiem koeficientiem.

Klasiski uzdevumi, kas saistīti ar kubisku funkciju

<u>Visizturīgākā sija</u>

Stiprības mācība pierāda, ka taisnstūrveida šķērsgriezuma sijas izturība ir proporcionāla platumam un augstuma kvadrātam. Kādam jābūt no apaļa koka ar caurmēru d izgatavotas sijas platumam x un augstumam y, lai sija būtu visizturīgākā?

(Atbilde: $y = \sqrt{2}$, $x = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$.) Sk., piemēram, [Oz, 155; GL, 325; GK. 114]

Atbilstošā funkcija, kas raksturo sijas izturību, ir tieši tā, kas aplūkota 2. teorēmā. Šis uzdevums ir analizēts 6. nodaļā “Nevienādība $A \geq G$ ”.

<u>Optimālais konuss</u>

No dota riņķa jāizgriež sektors, lai no atlikušās daļas varētu izveidot konusu ar vislielāko tilpumu.

No riņķa sektora ar dotu rādiusu tiek saritināta konusveidīga piltuve. Kādam centra leņķim tai ir vislielākais tilpums? [GK, 115]

Atrast vislielāko tilpumu konusam ar dotu veiduli l. [GK, 115]

Dots riņķis ar rādiusu L. Izgriezt no tā maksimālā tilpuma konusa izklājumu. [Pe; uzdevums atrisināts elementārā veidā]

Atbilstošā kubiskā funkcija ir tāda paša veida kā iepriekšējā uzdevumā. Uzdevumi par optimāliem konusiem plašāk ir analizēti 6. nodaļā.

<u>Optimālais cilindrs</u> (Keplera uzdevums)

Kāds ir maksimālais tilpums cilindram, kas ievilkts lodē ar rādiusu R? Šo uzdevumu Keplers izvirzīja un atrisināja savā darbā “Vīna mucu stereometrija” 1615. gadā. [GT, 170-171]

Atbilstošā funkcija ir $V(H) = \pi H(R^2 - \frac{\pi H^2}{4})$. Tās saknes veido aritmētisko progresiju, sk. arī 20. uzdevumu 45. lpp.

<u>Vislielākais apgaismojums</u>

Kādā augstumā virs apaļa galda centra jāatrodas spuldzītei, lai apgaismojums uz galda malas būtu vislielākais?

Apgaismojuma spožums izsakās ar formulu $f = \frac{m \sin\varphi}{r^2}$*, kur* φ *- staru slīpuma leņķis, r- attālums no laukuma līdz gaismas avotam, m- konstante* (*gaismas avota intensitāte*)*. Kādā augstumā h jānovieto lukturis uz staba, lai attālumā a esošā horizontālā laukuma apgaismojums būtu vislielākais?* [GK, 116; GL, 329]

Risinājums dots 6. nodaļā, sk. 30. uzdevumu.

<u>Kastīte ar vislielāko tilpumu</u>

No taisnstūrveida plāksnes, kuras malu garumi ir a un b, stūriem izgriezti četri vienādi kvadrāti. No atlikušās krustveida figūras izveidota kastīte, kuras augstums vienāds ar kvadrāta malu. Atrast izgriežamā kvadrāta malas garumu, kuram iznāk vislielākais kastītes tilpums. [GK, 114]. Izmantojot pirmos divus atvasinājumus, uzdevums atrisināts [Čez, 279]

Šis plaši pazīstamais uzdevums, izmantojot nevienādību $A \geq G$, konkrētām a un b vērtībām (a = 80, b = 50) detalizēti risināts vienā no sērijas “Populāras lekcijas matemātikā” grāmatiņām [Nat]. Ņemot a = 16 un b = 8, iegūtu, ka maksimums jāmeklē funkcijai

$$x(16 - 2x)(8 - 2x) = 2T(x),$$

kas atšķiras no Tartaļjas funkcijas T tikai ar reizinātāju (–2). Tas nozīmē, ka tas x, kuram atbilst kastītes vislielākais tilpums, ir tieši tas pats x, kuram atbilst vismazākā funkcijas T vērtība intervālā (0, 8). Tātad aplūkojamā gadījumā vislielāko tilpumu iegūsim, ņemot $x = 4 - \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Uzdevums par maksimālā tilpuma kasti ir aplūkots 6. nodaļā, sk. 39. uzdevumu.

Maksimālais taisnleņķa trijstūris

No visiem taisnleņķa trijstūriem, kuriem dota hipotenūzas un vienas katetes garumu summa, atrast to, kuram laukums maksimāls.

Uzdevums: "Pierādīt, ka taisnleņķa trijstūrim ar dotu hipotenūzas un vienas katetes garumu summu, vislielākais laukums ir tad, kad leņķis starp šīm malām ir 60^0" dots grāmatā [Har, 236], kur vēl atzīmēts, ka tas ir 1909. gada eksāmena uzdevums. Ievērosim, ka šādā formulējumā atbilde jau pateikta priekšā.

1. risinājums. Apzīmēsim ar a, b un c attiecīgi katešu un hipotenūzas garumu. Tad jāatrod maksimums reizinājumam

$$L = \frac{1}{2}ab, \text{ ja } a + \sqrt{a^2 + b^2} = k, \text{ kur } k \text{ fiksēts skaitlis.}$$

Izsakot no dotā nosacījuma b^2: $b^2 = (k - a)^2 - a^2 = k^2 - 2ka$, iegūsim kubisku funkciju: $4L^2 = a^2(k^2 - 2ka)$, kurai ir divkārša sakne. Saskaņā ar 1. teorēmu maksimuma punkts ir:

$$a_{\max} = \frac{k}{3} \Rightarrow b^2 = k^2 - \frac{2k^2}{3} = \frac{k^2}{3} \Rightarrow b = \frac{k}{\sqrt{3}} \Rightarrow c = \frac{2k}{3}.$$

Tātad maksimālajam trijstūrim katetes garums ir puse no hipotenūzas garuma, t. i., maksimālais trijstūris ir regulāra trijstūra puse. Zinot šo īpašību, viegli saskatīt citu, elegantāku risinājumu.

2. risinājums. Ievērosim, ka uzdevumu var pārformulēt šādi: no visiem vienādsānu trijstūriem ar dotu perimetru atrast to, kuram laukums maksimāls. Tagad atliek atsaukties uz zināmu faktu, ka no visiem trijstūriem ar dotu perimetru maksimālais laukums ir regulāram trijstūrim.

Piezīme. Saistošs piemērs, kur parādās kubiska funkcija ar divkāršu sakni, ir uzdevums par klepošanu. *Kad cilvēks klepo, traheja sašaurinās. Kādam trahejas rādiusam r gaisa plūsmas ātrums trahejā būs vislielākais?* Uzdevums, ieskaitot matemātiskā modeļa $v(r) = \frac{b\pi}{a}(r_0 - r)r^2$ iegūšanu, izvērsti risināts Jeļenas Navoičikas maģistra darbā [Nav], sk. arī [GLS, 153].

Uzdevumi no krājuma KZZ

No grāmatā [KZZ, 147-152] formulētajiem 74 ekstrēmu uzdevumiem vismaz 20% reducējami uz kubiskas funkcijas ekstrēmu noteikšanu.

162. Atrast tādu pozitīvu skaitli, lai šī skaitļa un tā kuba starpība būtu vislielākā.

163. Starpība starp viena un tā paša pozitīvā skaitļa kubu un kvadrātu ir vismazākā. Noteikt šo skaitli.

167. Skaitli 10 uzrakstīt kā divu pozitīvu skaitļu summu tā, lai summa, ko veido pirmā skaitļa kvadrāta puse un otrā skaitļa kubs, būtu vismazākā.

169. Skaitli 48 uzrakstīt kā divu pozitīvu skaitļu summu tā, lai pirmā skaitļa kuba un otrā skaitļa kvadrāta summa būtu vismazākā.

170. Skaitli 180 sadalīt trijos saskaitāmos tā, lai divu saskaitāmo attiecība būtu 1:2, bet triju saskaitāmo reizinājums būtu vislielākais.

Piezīme. Grāmatā [KZZ, 342] dota atbilde: "40; 80; 60". Šo skaitļu reizinājums ir 192000, bet tas nav vislielākais. Piemēram, ņemot $x = -100$, $y = -200$ un $z = 480$, iegūsim vēl vairāk. Droši vien uzdevuma formulējumā aizmirsta prasība, ka visiem saskaitāmajiem jābūt pozitīviem. Šo uzdevumu ērti risināt ar nevienādības $A \geq G$ palīdzību.

191. Riņķī, kura rādiuss ir R, ievilkts vienādsānu trijstūris. Kādai jābūt virsotnes leņķa α vērtībai, lai trijstūra augstumam, kas novilkts pret sānu malu, būtu vislielākais garums? Noteikt šo garumu.

201. Regulāras četrstūra piramīdas sānu virsmas laukums ir a^2. Noteikt šādas piramīdas vislielāko iespējamo tilpumu.

Piezīme. Grāmatā [Oz, 161] dots šāds formulējums: "Jāuzceļ telts regularas četrstūra piramidas veidā. Aprēķināt telts augstuma attiecību pret pamata malu, lai pie dotās telts sānu virsmas, tai būtu maksimalais tilpums. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$"

202. Regulāras četrstūra piramīdas sānu skaldnes laukums ir S, un tā veido ar pamata plakni leņķi α. Kādai jābūt α vērtībai, lai piramīdas tilpums būtu vislielākais?

213. Noteikt augstumu vislielākā tilpuma cilindram, kas ievilkts konusā ar augstumu H.

217. Aprēķināt vislielākā tilpuma cilindra pamata rādiusu un augstumu, ja cilindra pilnas virsmas laukums ir 2π.

219. No visiem konusiem, kuri ievilkti lodē ar rādiusu R, noteikt to, kuram sānu virsmas laukums ir vislielākais.

221. Aprēķināt cilindra augstumu, ja cilindrs ievilkts lodē ar rādiusu R un tā tilpums ir maksimālais.

223. Taisnleņķa trijstūris, kura hipotenūza ir d, rotē ap vienu no katetēm. Kādiem jābūt trijstūra šaurajiem leņķiem, lai rotācijas ķermeņa tilpums būtu vislielākais?

228. Regulāras četrstūra piramīdas $SABCD$ pamatā ir kvadrāts, kura mala ir a. Piramīdas sānu skaldnes veido ar pamata plakni 45^0 leņķi. Konusa virsotne sakrīt ar punktu S. Konusa pamata riņķa līnija pieskaras piramīdas pamata plaknei, un šīs riņķa līnijas centrs atrodas uz šķautnes SA. Noteikt vislielāko iespējamo tāda konusa tilpumu.

231. Regulāras četrstūra piramīdas augstums ir divas reizes lielāks nekā tās pamata diagonāle, piramīdas tilpums ir V. Dotajā piramīdā ievilktas regulāras četrstūra prizmas tā, ka to sānu šķautnes ir paralēlas piramīdas pamata diagonālēm, viena sānu skaldne pieder pie piramīdas pamata, bet pretējās skaldnes virsotnes atrodas uz piramīdas sānu virsmas. Noteikt minēto prizmu tilpuma vislielāko iespējamo vērtību.

8. nodaļa. **Sofismi**

Sofisms ir grieķu izcelsmes vārds, kas tulkojumā nozīmē veiklu, viltīgu paņēmienu. Matemātikā ar sofismu saprot šķietami nevainojamu spriedumu ķēdīti, kas noved pie absurda rezultāta, acīmredzamas kļūdas vai pretrunas. Protams, tas, kas vienam šķiet mistika, paša spēkiem neizskaidrojama pretruna, citam var būt ne vairāk kā vienkārša kļūda. Šajā nodaļā aplūkoti daži sofismi, kas saistīti ar ekstrēmu uzdevumiem. Plašāk ar vairākiem citiem sofismiem var iepazīties populārzinātniskajā žurnālā *Trivium* publicētajā materiālā [Cib4].

1. min $y = y(p)$, max $y = y(q) \Rightarrow p = q$?

Atrast vislielāko un vismazāko vērtību funkcijai $y = \sin x + \cos x$.

Anniņa. Izmantoju īpašību: ja funkcijai ekstrēms ir punktā x, tad arī funkcijas kvadrātam ekstrēms ir punktā x. Aprēķinu y^2.

$$y^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x \Rightarrow \max y^2 = 2. \qquad (*)$$

Tas nozīmē, ka funkcijai y vislielākā vērtība ir $\sqrt{2}$, ja $\sin 2x = 1$.

Lai atrastu vismazāko y vērtību, aplūkoju funkciju $g = -y$ un izmantoju īpašību: $\min y = -\max(-y) = -\max g$. Maksimālo vērtību funkcijai g atrodu tādā pašā veidā kā funkcijai y, sk. (*). Iegūstu, ka $\min y = \max g = -\sqrt{2}$, ja $\sin 2x = 1$.

Jānītis. Saskaņā ar Anniņas rezultātu funkcija y gan maksimumu, gan minimumu sasniedz tad, kad $\sin 2x = 1$, t. i., vienos un tajos pašos punktos, kas, manuprāt, ir absurds, jo funkcija y taču nav konstants lielums.

Maijiņa. Kļūda rodas tāpēc, ka funkcijai y nav minimālās vērtības.

Jurītis. Paņēmienu ar funkcijas kāpināšanu kvadrātā var izmantot tikai nenegatīvām funkcijām.

Paijiņa. Kļūda rodas tāpēc, ka īpašība $\min y = -\max(-y)$ nav pareiza.

Kam taisnība? Uzrādiet korektu risinājumu!

2. Kā izvēlēties vislielāko skaitli d ?

Skolotājs izvēlas trīs skaitļus a, b, c, bet skolēniem pēc tam jāizvēlas skaitlis d tā, lai visiem x būtu pareiza nevienādība

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2} \ge d.$$

Tas skolēns, kurš izvēlējies vislielāko šādu skaitli d, tiek pasludināts par uzvarētāju. Kādu d vajadzētu izvēlēties (tas būs atkarīgs, vispārīgi runājot, no a, b, c), lai kļūtu par uzvarētāju.

Jānītis. $d = a + \sqrt{b^2 + c^2}$. Šādu d iegūstam, ņemot $x = 0$.

Anniņa. $d = \sqrt{a^2 + c^2} + b$. Šādu d iegūstam, ņemot $x = c$.

Pēterītis. Jāņem d vienāds ar to skaitli no diviem iepriekš nosauktajiem, kurš lielāks.

Maijiņa. Simetrijas apsvērumu dēļ jāņem $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Pierādīšu, ka šī izvēle ir vislabākā.

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2} \ge \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Kāpinu abas puses kvadrātā:

$$a^2 + x^2 + 2\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + (c-x)^2)} + b^2 + (c-x)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

$$2\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + (c-x)^2)} \geq c^2 - x^2 - (c-x)^2 = 2cx - 2x^2$$

$$(a^2 + x^2)(b^2 + (c-x)^2) \geq (x(c-x))^2$$

$$a^2b^2 + a^2(c-x)^2 + x^2b^2 + x^2(c-x)^2 \geq x^2(c-x)^2$$

$$a^2b^2 + a^2(c-x)^2 + x^2b^2 \geq 0,$$

kas arī bija jāpierāda.

Ilzīte. Jāņem $d = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$. Pierādīšu, ka

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2} \geq \sqrt{(a+b)^2 + c^2}.$$

Pēc kāpināšanas kvadrātā iegūstu

$$a^2 + x^2 + 2\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + (c-x)^2)} + b^2 + (c-x)^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 + c^2$$

$$\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + (c-x)^2)} \geq cx - x^2 + ab.$$

Vēlreiz kāpinu kvadrātā:

$$(a^2 + x^2)(b^2 + (c-x)^2) \geq (x(c-x) + ab)^2$$

$$a^2b^2 + a^2(c-x)^2 + x^2b^2 + x^2(c-x)^2 \geq x^2(c-x)^2 + 2x(c-x)ab + a^2b^2$$

$$a^2(c-x)^2 + x^2b^2 - 2x(c-x)ab \geq 0$$

$$(a(c-x) - xb)^2 \geq 0,$$

kas arī bija jāpierāda.

Jautrīte. Ilzītes izvēle nav vislabākā. Piemēram, ja skolotājs būtu izvēlējies $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, tad Ilzīte iegūtu šādu nevienādību:

$$\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + (1-x)^2} \geq d = 1.$$

Acīmredzami, ka $d = 1$ nav vislielākais, jo

$$\sqrt{1 + x^2} \geq 1 \text{ un } \sqrt{1 + (1-x)^2} \geq 1.$$

Kāda ir pareizā atbilde?

3. Aprēķināt *ab*, ja *a* + *b* = 64 un $\boldsymbol{a^2 + b^2 = 2046}$

Anniņa. No formulas

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

izsaku *ab*:

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} = \frac{64^2 - 2046}{2} = 1025.$$

Jānītis. Aprēķins satur kļūdu, jo visiem *a*, *b* ir spēkā nevienādība

$$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

saskaņā ar kuru jābūt $ab \le \left(\frac{64}{2}\right)^2 = 1024$. Ja kāds šaubās par šo nevienādību, lūk, pierādījums:

$$ab \le \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \Leftrightarrow 4ab \le a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow 0 \le a^2-2ab+b^2 \Leftrightarrow$$

$$0 \le (a-b)^2.$$

Ilzīte. Arī Jānīša risinājumā kaut kas nav kārtībā, jo, izmantojot šo pašu nevienādību, es iegūstu:

$$0 \le (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$2ab \le a^2 + b^2 = 2046 \Rightarrow ab \le 1023.$$

Izskaidrojiet šo sofismu! [1)]

4. Paralēlskaldnis ar vislielāko virsmu

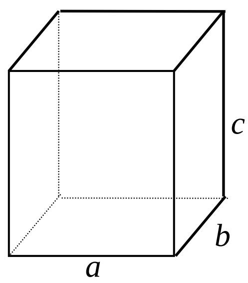
Noteikt, kāds var būt vislielākais sānu virsmas laukums taisnstūra paralēlskaldnim ar diagonāli 4 cm un pamata laukumu 3 cm^2.

Anniņa. Paralēlskaldņa malu garumus apzīmēšu ar *a*, *b*, *c*, sk. 39. zīm. Tad

$$ab = 3$$

$$a^2+b^2+c^2 = 16$$

$$S = 2(ac+bc) = \max = ?$$



39. zīm.

Ievērosim, ka izteiksmei

$$S^2 = 4c^2(a+b)^2 = 4c^2(a^2+b^2+2ab) = 4c^2(16-c^2+6) = 4c^2(22-c^2)$$

maksimālā vērtība ir pie tiem pašiem a, b, c kā izteiksmei *S*. Viegli redzēt, ka parabolai $4x(22-x)$ ir divas saknes $x_1 = 0$ un $x_2 = 22$ un zari vērsti uz leju, tāpēc tai maksimums ir punktā $x = \frac{x_1+x_2}{2} = 11$. Tātad izteiksmei S^2 vislielākā vērtība ir pie $c^2 = x = 11$ un tā ir vienāda ar $4 \cdot 11 \cdot (22-11) = 484$.

Jānītis. Ja $c^2 = 11$, tad $a^2+b^2 = 5$. Atņemot no šīs vienādības vienādību $2ab = 6$, iegūstu: $a^2+b^2-2ab = 5-6$ jeb $(a-b)^2 = -1$, kas nevar būt. Tātad Anniņas risinājumā kaut kur ir kļūda.

Kur? Atrodiet šī uzdevuma īsu un elementāru risinājumu.

5. Trijstūris ar vislielāko laukumu

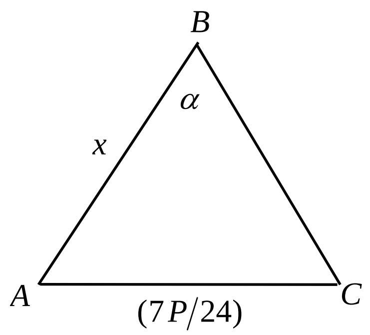
Aprēķināt maksimālo laukumu trijstūrim, ja tā perimetrs ir *P*, vienas malas garums $-\dfrac{7}{24}P$ un viens no leņķiem $-\alpha$. Kura atbilde –

$$\frac{5P^2\sin\alpha}{48(1+\cos\alpha)} \quad \text{vai} \quad \frac{35P^2\sin\alpha}{48(17-7\cos\alpha)} \; -$$

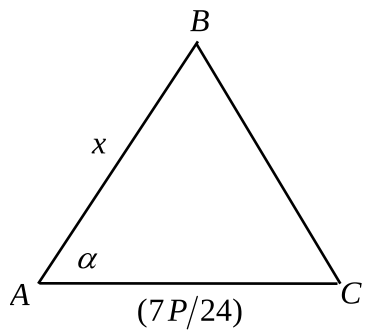
ir pareiza?

Vispirms atrisiniet šo uzdevumu patstāvīgi un tad iepazīstieties ar zemāk uzrādītajiem risinājumiem! Ļoti iespējams, ka jūsu pirmais risinājums pēc būtības sakritīs ar kādu no turpmāk dotajiem risinājumiem.

Maijiņa. Trijstūra *ABC* malas *AB* garumu apzīmēšu ar *x*, sk. 40. zīm.



40. zīm.



41. zīm.

Tad malas *BC* garums ir $P-x-\dfrac{7P}{24}=\dfrac{17P}{24}-x$, bet laukums

$$L_{ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|\sin\alpha=\frac{1}{2}x\left(\frac{17P}{24}-x\right)\sin\alpha=\left(\frac{17Px}{48}-\frac{x^2}{2}\right)\sin\alpha\,. \tag{1}$$

Ievērosim, ka parabolai $\left(\dfrac{17Px}{48}-\dfrac{x^2}{2}\right)$ zari vērsti uz leju un ka tā divos punktos:

$x_1=0$ un $x_2=\dfrac{17P}{24}$ krusto *X* asi. Tāpēc tās virsotne ir punktā

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{17P}{48},$$

kas ir tieši meklējamais maksimuma punkts. Ievietojot šo *x* vērtību laukuma izteiksmē (1), iegūstu

$$L_{\max}=\left(\left(\frac{17P}{48}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{17P}{48}\right)^2\right)\sin\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{17P}{48}\right)^2\sin\alpha\,.$$

Redzam, ka neviena no dotajām atbildēm nav pareiza.

Jānītis. Apzīmēju malas *BC* (sk. Maijiņas zīmējumu) garumu ar *y*. Tad

$$x+y=P-\frac{7P}{24}=\frac{17P}{24}\,.$$

Lietoju kosinusu teorēmu:

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = \left(\frac{7P}{24}\right)^2$$

$$(x+y)^2 - 2xy - 2xy\cos\alpha = \left(\frac{7P}{24}\right)^2$$

$$\left(\frac{17P}{24}\right)^2 - 2xy(1+\cos\alpha) = \left(\frac{7P}{24}\right)^2$$

$$\frac{5P^2}{12} = 2xy(1+\cos\alpha)\,.$$

No pēdējās vienādības izsaku *xy* un ievietoju laukuma izteiksmē:

$$L = \frac{1}{2}xy\sin\alpha = \frac{5P^2\sin\alpha}{48(1+\cos\alpha)}\,, \qquad (2)$$

kas nozīmē, ka pareiza ir pirmā atbilde.

Anniņa. Tā kā Maijiņas un Jānīša aprēķini dod dažādas atbildes, tad leņķis α droši vien ir izvēlēts nepareizi. Pieņemsim, ka α ir zināmās malas pieleņķis, bet malas *AB* garums – *x*, sk. 41. zīmējumu.

Tad malas *BC* garums ir $\frac{17}{24} - x$. Lietosim kosinusu teorēmu:

$$x^2 + \left(\frac{7P}{24}\right)^2 - \frac{7xP}{12}\cos\alpha = \left(\frac{17P}{24} - x\right)^2$$

$$\left(\frac{7P}{24}\right)^2 - \frac{7xP\cos\alpha}{12} = \left(\frac{17P}{24}\right)^2 - \frac{17Px}{12}$$

$$Px(17 - 7\cos\alpha) = 5P^2\,.$$

Tāpēc

$$L = \frac{1}{2}\cdot\frac{7P}{24}\cdot x\sin\alpha = \frac{35P^2\sin\alpha}{48(17-7\cos\alpha)}\,. \qquad (3)$$

Tātad pareiza ir otrā atbilde.

Lienīte. Pareizas atbildes ir gan Anniņai, gan Jānītim, tikai katrs no viņiem ir aplūkojis savu gadījumu.

Pēterītis. Nav tiesa, Lienīt! Ja jau abiem būtu pareizas atbildes, tad arī maksimālajam laukumam būtu divas dažādas vērtības, kas, protams, ir absurds. Te jāspriež šādi. Salīdzināsim Anniņas un Jānīša iegūtās laukuma izteiksmes L_A un L_J, sk. (2) un (3). No $L_A = L_J$ izriet, ka

$$\frac{7}{17 - 7\cos\alpha} = \frac{1}{1+\cos\alpha}$$

$$7 + 7\cos\alpha = 17 - 7\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{7}\,.$$

Ievērojot, ka trijstūra leņķiem $\sin\alpha > 0$, no šejienes iegūsim pareizo atbildi, proti,

$$L_{\max} = \begin{cases} L_A, \ ja \cos\alpha \geq \dfrac{5}{7}, \\ L_J, \ ja \cos\alpha \leq \dfrac{5}{7}. \end{cases} \tag{4}$$

Reti kurš šādā atbildē saskata kļūdu.

Kārlītis. Kādā no iepriekšējām nodarbībām mēs pierādījām, ka no visiem trijstūriem ar uzdotu perimetru un vienu malu vislielākais laukums ir vienādsānu trijstūrim. Vajadzības gadījumā es šo pierādījumu varu atkārtot. Mūsu gadījumā dotās malas garums ir $\dfrac{7P}{24}$, tāpēc katra no pārējām vienādsānu trijstūra malām ir $\dfrac{17P}{48}$. Pēc Hērona formulas šī vienādsānu trijstūra laukums ir $S = \dfrac{7P^2\sqrt{15}}{576}$. Acīmredzot jābūt $S \geq L_{\max}$, jo pieprasot, lai viens no trijstūra leņķiem ir α, laukumu var tikai samazināt. Taču, ja $\alpha = 60^0$, tad $\cos\alpha = \dfrac{1}{2} < \dfrac{5}{7}$, kas saskaņā ar Pēterīša atbildi (4) dod

$$L_{\max} = L_J = \frac{5\sqrt{3}P^2}{48\cdot 3}.$$

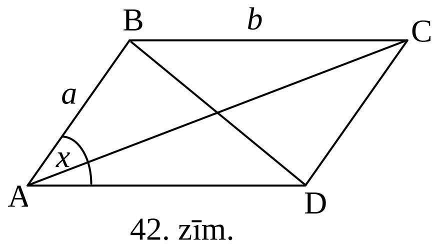
Nekā nesaprotu! No visām iepriekšējām atbildēm Pēterīša atbilde šķita nevainojama.

Kur kļūda? Kāda tad galu galā ir pareizā atbilde?

6. Paralelograma diagonāļu summas ekstrēmi

Paralelograma malas ir *a* un *b*. Noteikt diagonāļu summas maksimumu un minimumu.

Anniņa. $BD = d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos x}$ un $AC = d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos x}$, kur *x* ir šaurais leņķis starp malām *a* un *b*, sk. 42. zīmējumu.



42. zīm.

Aplūkoju funkciju

$$f(x) = d_1 + d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos x} + \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos x}.$$

Pierādīšu, ka tā ir monotona.

Tā kā *f* ir pozitīva, tad *f* monotonitāte ir līdzvērtīga funkcijas f^2 monotonitātei.

$$f^2(x) = 2a^2 + 2b^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2\cos^2 x}.$$

Ievērosim, ka $\cos x$ un arī $\cos^2 x$ ir monotona funkcija intervālā $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Tātad f^2 un arī f ir monotona funkcija. Monotonas funkcijas savas ekstremālās vērtības sasniedz intervāla galapunktos.

$$f(0) = |a-b| + |a+b|$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Tātad:

$$\max(d_1 + d_2) = 2\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\min(d_1 + d_2) = |\ a-b\ | + |\ a+b\ |.$$

Jānītis. No vienādībām

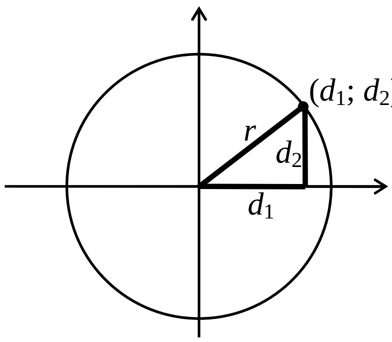
$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos x$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos x$$

iegūstu $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2+b^2)$.

Doto uzdevumu var aizstāt ar šādu:

Atrast punktu (d_1; d_2) uz riņķa līnijas ar rādiusu $r = \sqrt{2(a^2+b^2)}$, lai $d_1 + d_2$ pieņemtu ekstremālās vērtības, sk. 43. zīmējumu.



43. zīm.

Summa $d_1 + d_2$ būs maksimāla tad, kad maksimāls būs šīs summas kvadrāts, t. i., tad, kad $(d_1 + d_2)^2 = r^2 + 2d_1 d_2$ būs maksimāls. Iegūtā izteiksme saskaņā ar nevienādību $G \leq A$ maksimumu sasniedz, ja $d_1 = d_2$. Tātad

$$2d_1^2 = 2(a^2+b^2) \Rightarrow d_1 = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow \max(d_1+d_2) = 2\sqrt{a^2+b^2}\ ,$$

kas saskan ar Anniņas rezultātu.

Tā kā $d_1 + d_2 \geq r$ (trijstūra nevienādība), tad

$$\min(d_1+d_2) = r = \sqrt{2(a^2+b^2)}\ .$$

Mans rezultāts ir labāks nekā Anniņas, jo, piemēram, ņemot a = 2, b = 1, es dabūju $\sqrt{2(a^2+b^2)} = \sqrt{10}$, bet Anniņa vairāk: $|a-b| + |a+b| = 4$.

Kāda ir pareizā atbilde? Kam taisnība?

Atbildes

1. Uzdevumu var atrisināt pavisam īsi.

$$y^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x \Rightarrow y^2 \le 2 \Rightarrow |y| \le \sqrt{2} \Rightarrow$$
$$-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}.$$

Minimālā un maksimālā vērtība tiek sasniegta attiecīgi punktos

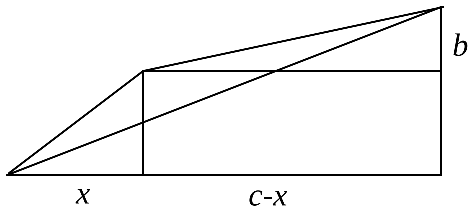
$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \; k \in Z.$$

Ne visi x, kuriem $\sin 2x = 1$, ir maksimuma punkti. Kāpinot kvadrātā, var rasties liekas saknes. Šeit arī slēpjas nepilnības Anniņas risinājumā. Zinot atbildi, komentējiet pārējo četru bērnu izteikumu patiesumu.

2. Lai šajā spēlē jūs neviens nevarētu uzvarēt, d jāizvēlas šādi:

$$d = \begin{cases} \sqrt{(a+b)^2 + c^2}, & a+b \ne 0 \\ \sqrt{4a^2 + c^2}, & a+b = 0. \end{cases}$$

Gadījumā, kad $a+b \ne 0$, d optimalitātes pierādījumu ir devusi Ilzīte. Pēc viņas parauga var aplūkot arī gadījumu, kad $a+b=0$. Taču eksistē elegantāks d noteikšanas paņēmiens, kas saistīts ar pētāmās nevienādības ģeometrisko interpretāciju. Pirmajā gadījumā d iegūst kā taisnleņķa trijstūra, ar malām c un $a+b$, hipotenūzas garumu, sk. 44. zīmējumu. Bet, kādu nogriežņu garumu (un kādā zīmējumā) raksturo d otrajā gadījumā, to atrodiet patstāvīgi.



44. zīm.

3. Ja, ilgāku laiku domājot, tomēr nevarat izskaidrot šo sofismu, atrodiet a un b vērtības atklātā veidā.

4. Zināms, ka $a^2 + b^2 \ge 2ab = 6$. Tāpēc $c^2 = 16 - (a^2 + b^2) \le 16 - 6 = 10$ un maksimālais sānu virsmas laukums S būs vienāds ar kvadrātsakni no $4c^2(22 - c^2) = 4 \cdot 10 \cdot 12$. Šo maksimumu dod tas paralēlskaldnis, kuram pamats ir kvadrāts ar malas garumu $\sqrt{3}$. Tagad, jācer, bez grūtībām atradīsiet Anniņas kļūdu.

5. Šo uzdevumu esmu piedāvājis matemātikas nometņu un Mazās universitātes dalībniekiem, 1. - 4. kursu studentiem, kā arī skolotājiem. [2)] Un gandrīz visi, kas iesniedza risinājumus, agrāk vai vēlāk ir "iekrituši". Ar "vēlāk" te domāts, ka atsevišķi "tālredzīgākie" risinātāji ir "paklupuši" tur, kur Pēterītis.

Risinot šo uzdevumu, ir kļūdījušies pat zinātniskos grādus ieguvušie pasniedzēji. Kāda te ir tā smalkākā kļūda?

Šo kļūdu raksturosim ar matemātiskās folkloras palīdzību. Uz ielas satiekas divi paziņas.

-Vai, kur tas laiks, kā neesi redzēts. Kā dzīvo, ko strādā ?

-Esmu kļuvis par ekstrasensu.

-Tiešām? Negribu ticēt.

-Tūlīt tu pārliecināsies. Es paskatīšos, piemēram, uz to aizejošo dāmu, un viņa atskatīsies. (Tā arī notiek).

-Nu tas taču nav nekas sevišķs.

-Tagad es iedomāšos, lai tas kungs tur uz tilta iemet savu diplomātu upē. (Pēc dažām sekundēm diplomātu met.)

-Hm. Bet tagad iedarbojies, lūk, uz to iedzīvotāju (norāda uz kādu daudzstāvu mājas logu), lai viņš izmet pa logu savu televizoru.

-Labi, skaties. (Pēc neilga laika pie norādītā loga parādās kāds cilvēks un pēkšņi pazūd. Ekstrasenss nosvīst, taču turpina skatīties. Tad cilvēks pienāk pie loga, atver to un izkliedz: "Man nav televizora!")

Tagad nav grūti nojaust, kas tad ir galvenais klupšanas akmens šajā uzdevumā, proti, - meklējamā trijstūra pastāvēšana.

Atcerēsimies, ka Jānītis aplūkoja situāciju, kad α ir malas ar doto garumu pretleņķis. Veiksmīgi operējot ar lielumu *x* un *y*, viņš ieguva laukuma izteiksmi L_J (sk. pirmo atbildi), nemaz nezinot konkrētās *x* un *y* vērtības.

Tos, kuri uzdevumu ir risinājuši tā kā Pēterītis, vajadzētu palūgt, lai viņi uzrāda arī trijstūra malu AB un BC garumus, piemēram, ja $\alpha = 90^0$. Daži studenti pret šādu prasību ir protestējuši, jo, lūk, viņi uzdevumu esot atrisinājuši, bet aprēķināt malu garumu uzdevuma noteikumos nav prasīts. Beidzot piekrituši, viņi pēc Pitagora teorēmas aprēķina *x*:

$$x^2 + \left(\frac{17P}{24} - x\right)^2 = \left(\frac{7P}{24}\right)^2, \quad 2x^2 - \frac{17Px}{12} + \frac{10P^2}{24} = 0,$$

$$x^2 - \frac{17Px}{24} + \frac{5P^2}{24} = 0, \qquad (*)$$

$$x_{1,2} = \frac{17P}{48} \pm \sqrt{\left(\frac{17P}{48}\right)^2 - \frac{5P^2}{24}} = \frac{17P}{48} \pm \frac{P}{48}\sqrt{289-480}\ ???$$

Tad pēc ilgām pārdomām secina, ka tiešām apskatāmajā gadījumā meklētais trijstūris vispār nepastāv. Tālāk pareizo atbildi viņi iegūst bez grūtībām. Vienādojuma (*) vietā vispārējā gadījumā jārisina vienādojums

$$x^2 - \frac{17Px}{24} + \frac{5P^2}{24(1+\cos\alpha)} = 0.$$

Derēs tikai tādi α, kuriem $D \geq 0$, t. i.,

$$D = \left(\frac{17P}{24}\right)^2 - \frac{20P^2}{24(1+\cos\alpha)} \geq 0 \Leftrightarrow 17^2(1+\cos\alpha) \geq 480,$$

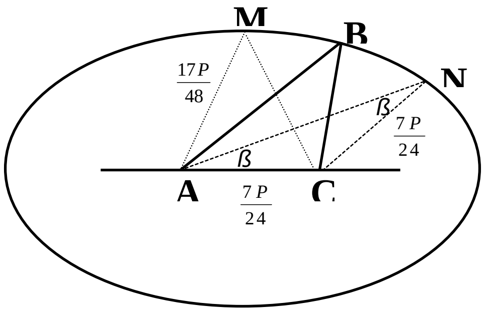
$$\cos\alpha \geq \frac{191}{289}.$$

Ievērosim, ka gadījumā, ko aplūkojusi *Anniņa* (α - malas *AC* pieleņķis), meklējamais trijstūris pastāvēs jebkuram $0 < \alpha < 180^0$.

Tā kā $\frac{191}{289} < \frac{5}{7}$ (abas dotās laukuma izteiksmes sakrīt, ja $\cos\alpha = \frac{5}{7}$), tad, izdarot Pēterīša atbildē labojumus, iegūsim pareizo atbildi:

$$L_{max} = \begin{cases} L_J, \text{ ja } \dfrac{191}{289} \le \cos\alpha \le \dfrac{5}{7}, \\ L_A \qquad\qquad \text{citiem } \alpha. \end{cases} \qquad (**)$$

Šim uzdevumam pastāv skaistāks risinājums, kas saistīts ar elipsi. Kā jāizvēlas *ABC* virsotne *B* uz elipses, sk. 45. zīmējumu, lai iegūtu trijstūri ar maksimālo laukumu? Turklāt vienam no *ABC* leņķiem jābūt α. Apskatāmās elipses katram punktam *X* ir spēkā $|XA| + |XC| = \dfrac{17P}{24}$ Viegli iedomāties, kā šādu elipsi var iegūt praktiski, izmantojot divos punktos *A* un *C* nostiprinātu diegu.



45. zīm.

Vispirms noskaidrosim, kādās robežās var mainīties leņķis *B*. Šī leņķa augšējo robežu γ var atrast no vienādsānu trijstūra *AMC* pēc kosinusu teorēmas:

$$2|AM|^2 - 2|AM|^2 \cos\gamma = |AC|^2,$$

$$1 - \cos\gamma = \frac{|AC|^2}{2|AM|^2} = \frac{98}{289}$$

$$\cos\gamma = \frac{191}{289}.$$

Redzam, ka esam ieguvuši vienu no atbildē (**) uzrādītajiem skaitļiem. Otru skaitli $\dfrac{5}{7}$ iegūst no vienādsānu trijstūra *ANC*: $\cos\beta = \dfrac{|AN|}{2|AC|} = \dfrac{5}{7}$.

Tagad atliek pierādīt, ka intervālā $\beta < \alpha < \gamma$ lielāku laukumu iegūst, ja a ņem kā ΔABC malas *AC* pretleņķi, bet ārpus šī intervāla - kā malas *AC* pieleņķi. Šim apgalvojumam ir vienkāršs ģeometrisks pamatojums, ko ieteicams atrast patstāvīgi.

6. Taisnība ir Anniņai. Atrodiet kļūdu Jānītim. Vai, izlabojot Jānīša kļūdu, varat iegūt vienkāršāku uzdevuma risinājumu nekā Anniņas dotais?

9. nodaļa **Košī nevienādība**

Košī nevienādībai ir nozīmīga loma matemātikā un dažādos tās lietojumos, piemēram, matemātiskajā fizikā, statistikā. Taču šajā nodaļā tā mums kalpos kā elementāra metode (paņēmiens, līdzeklis) skolēniem piemērotu ekstrēmu uzdevumu risināšanā. Olimpiādēs nereti sastopami uzdevumi, kuru risināšanā šī slavenā, bet skolas matemātikā maz pazīstamā nevienādība ir ļoti noderīga.

Košī nevienādība publicēta 1821. gadā. Dažkārt to sauc par Švarca, Buņakovska, Košī-Švarca [AMS, AZ, Ku], Košī-Buņakovska-Švarca [1] [Lau], Buņakovska-Košī-Švarca [Nev], Košī-Buņakovska [Si2] vai pat otrādi par Buņakovska-Košī nevienādību [Sm]. Buņakovskis ieguva aplūkojamā veida nevienādību integrāļiem 1859. gadā, bet Švarcs – divkāršajiem integrāļiem 1875. gadā. Trīs slavenu autoru grāmatā [HLP, 28] ir atzīmēts, ka šo nevienādību parasti sauc par Košī nevienādību un ka atbilstošo nevienādību integrāļiem parasti sauc par Švarca nevienādību, kaut gan to pirmais droši vien ir formulējis Buņakovskis, kā arī dotas norādes uz pirmavotiem.

Turpmāk ir uzrādīti daži vienkārši un īsi Košī nevienādības pierādījumi, tās ģeometriskā interpretācija un atrisināti samērā daudzi dažādas grūtības pakāpes (ieskaitot starptautiskās matemātikas olimpiādes) uzdevumi.

Visiem reāliem skaitļiem ir spēkā nevienādība

$$(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)^2 \le (x_1^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+\cdots+y_n^2) \qquad \text{(KN)}$$

jeb kompaktākā pierakstā

$$x_1y_1+\cdots+x_ny_n \le |x|\cdot|y|, \quad |x|:=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2},\ |y|:=\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}.$$

Šo nevienādību turpmāk sauksim par Košī nevienādību un saīsināti apzīmēsim ar (KN)

Pierādījums. Viens no īsākajiem pierādījumiem ir šāds.

Saskaitīsim nevienādību $2a_ib_i \le a_i^2+b_i^2$, $i = 1, ..., n$, kreisās un labās puses un ņemsim $a_i = \dfrac{x_i}{|x|}$, $b_i = \dfrac{y_i}{|y|}$. Tad

$$\frac{2}{|x|\cdot|y|}(x_1y_1+\cdots+x_ny_n) \le \frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{|x|^2} + \frac{y_1^2+\cdots+y_n^2}{|y|^2} = 2,$$

no kurienes izriet (KN).

Ievērosim, ka nevienādība pārvēršas par vienādību, ja

$$a_i = b_i \Rightarrow \frac{x_i}{|x|} = \frac{y_i}{|y|} \Rightarrow \frac{x_i}{y_i} = \frac{|x|}{|y|} = \text{const.}$$

Piezīme. Šo nosacījumu parasti raksturo ar vārdiem, ka vektori $x = (x_1,\ldots, x_n)$ un $y = (y_1,\ldots, y_n)$ ir proporcionāli. Lietojot apzīmējumu $(x, y):= x_1y_1 +\ldots+ x_ny_n$), ko sauc par divu vektoru skalāro reizinājumu, Košī nevienādību var pierakstīt tā:

$(x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$ vai vēl īsāk $(x,y) \le |x|\cdot|y|$. Pēdējo nevienādību lasa tā: divu vektoru skalārais reizinājums nepārsniedz šo vektoru moduļu reizinājumu.

Lietderīgi zināt arī šādu īsu pierādījumu:

$$(x_i - ty_i)^2 = x_i^{\ 2} - 2x_i y_i t + (ty_i)^2 \ge 0.$$

Ņemot $i = 1, ..., n$, un saskaitot šīs nevienādības, iegūsim kvadrātnevienādību attiecībā pret t

$$|x|^2 - 2Bt + |y|^2\ t^2 \ge 0,$$

kur $B = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$. Tā kā kvadrātnevienādība ir pareiza visiem t, tad tās diskriminantam jābūt nepozitīvam, t. i., $B^2 \le |x|^2 |y|^2$, kas arī bija jāpierāda. Arī no šī pierādījuma viegli saskatīt augstāk minēto proporcionalitātes nosacījumu, kad nevienādība kļūst par vienādību.

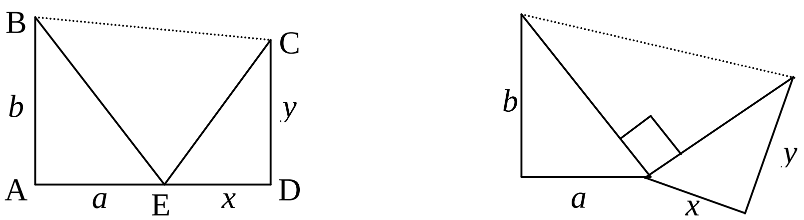
Cits īss pierādījums, kas, manuprāt, skolēniem tomēr ir grūtāk uztverams nekā augstāk uzrādītie, balstās uz identitāti [HLP, 28]

$$\sum a^2 \sum b^2 - \left(\sum ab\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

Šo identitāti mēdz dēvēt par Lagranža [Lau] vai Košī-Lagranža identitāti [BB, 83]. To savā pierādījumā izmantoja pats Košī.

Ģeometriska rakstura pierādījums

Aplūkosim taisnleņķa trijstūrus ABE un CDE, kuriem katešu garumi attiecīgi ir a, b, x un y (sk. 46. zīmējumu). Rotējot trijstūri CDE ap punktu E, mainās trijstūra BEC laukums. Kad trijstūra BEC laukums būs vislielākais? Gandrīz vai acīmredzams, ka tad, ja $\angle$ E = 90^0.



46. zīm.

Salīdzināsim zīmējumā redzamo figūru (trapeces un piecstūra) laukumu izteiksmes:

$$L_{ABCD} = \frac{b+y}{2}(a+x) \le \frac{ab}{2} + \frac{xy}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$$

$$ab + ay + bx + xy \le ab + xy + \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$$

$$ay + bx \le \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Tātad esam ieguvuši (KN) divu saskaitāmo gadījumā. Vai no šejienes var izsecināt arī vispārīgo gadījumu? Var, piemēram, pēc indukcijas:

$$ax+by+cz = ax+\sqrt{c^2+b^2}\,\frac{by+cz}{\sqrt{c^2+b^2}} \le \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{x^2+\frac{(by+cz)^2}{c^2+b^2}} \le$$

$$\le \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{x^2+\frac{(c^2+b^2)(y^2+z^2)}{c^2+b^2}} \le \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

<u>Sekas KS1</u> (1. sekas no Košī nevienādības). Ja $x_1^2+\cdots+x_n^2=c$, tad

$$\max(x_1+\cdots+x_n)=\sqrt{nc}\ .$$

Tiešām, no Košī nevienādības izriet, ka

$$(x_1\cdot 1+\cdots+x_n\cdot 1)^2 \le (x_1^2+\cdots+x_n^2)\cdot n = cn.$$

Vienādība tiek sasniegta, ja $x_1=\cdots=x_n=\sqrt{\frac{c}{n}}$.

Pirmais uzrādītais (KN) pierādījums balstās uz vairākkārtēju ļoti vienkāršas nevienādības

$$2xy \le x^2+y^2$$

izmantošanu. Var "raudzīties arī pretējā virzienā" un tikko minēto nevienādību izsecināt no (KN).

<u>Sekas KS2</u>. $2xy = xy + yx \le \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{y^2+x^2} = x^2+y^2$.

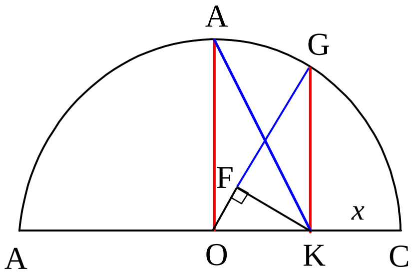
Ja x un y ir nenegatīvi skaitļi, tad no šejienes izriet nevienādība, kas saista ģeometrisko un kvadrātisko vidējo:

$$\sqrt{xy} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\ .$$

Atzīmēsim, ka starp četriem vidējiem: harmonisko, ģeometrisko, aritmētisko un kvadrātisko pastāv šādas nevienādības $H \le G \le A \le K$, t. i.,

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \le \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\ .$$

Iepazīsimies ar šo nevienādību ģeometrisku ilustrāciju, sk. 47. zīm., kur |KC| = x un |AK| = y.



47. zīm.

FG ≤ KG ≤ OA = $r = \frac{x+y}{2} \le$ AK

KG = $\sqrt{xy}$

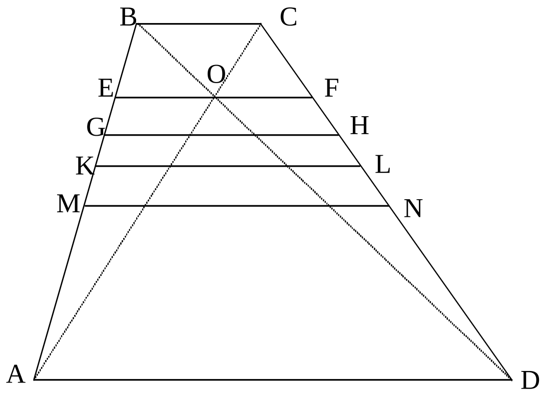
AK = $\sqrt{r^2+(r-x)^2} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = K$

FG = GO – OF = $r - \frac{(r-x)^2}{r} = H$

Paskaidrosim, ka OF iegūts no proporcijas OF:OK = OK:OG un

$$r-\frac{(r-x)^2}{r}=r-\frac{r^2-2rx-x^2}{r}=\frac{2rx-x^2}{r}=\frac{(x+y)x-x^2}{r}=\frac{xy}{r}=\frac{2xy}{x+y}=H.$$

Ir pazīstama (sk., piemēram, [BS, 91; KŠ]) arī šāda nevienādības: $H \le G \le A \le K$, ģeometriska ilustrācija (sk. 48. zīmējumu).



48. zīm.

Šeit pieņemts, ka |BC| = x, |AD| = y un nogriežņi EF, GH, KL un MN paralēli trapeces pamatiem. Ir spēkā:

- nogriežņa EF, kas iet caur trapeces diagonāļu krustpunktu, garums ir (skaitļu x un y) vidējais harmoniskais;
- nogriežņa GH, kas trapeci sadala divās līdzīgās trapecēs BCHG un GHDA, garums ir ģeometriskais vidējais;
- trapeces viduslīnijas KL garums ir aritmētiskais vidējais;
- nogriežņa MN, kas trapeci sadala divās pēc laukuma vienādās trapecēs, garums ir kvadrātiskais vidējais.

Pārbaudiet šo apgalvojumu pareizību patstāvīgi!

<u>Sekas KS3</u>. Košī nevienādības svarīgas sekas ir nevienādība $H \le A \le K$ attiecīgi starp harmonisko, aritmētisko un kvadrātisko vidējo vispārīgā gadījumā, t. i.,

$$H=\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}\le A=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\le K=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$

Lūk, kā īsi iegūstama nevienādība $H \le A$:

$$n\cdot n=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2\le\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\Rightarrow H\le A.$$

Savukārt Košī nevienādībā ņemot visus y_i vienādus ar 1 un abas nevienādības puses izdalot ar n, iegūst $A \le K$.

Uzrakstīsim Koši-Lagranža identitāti un no tās izrietošo Koši nevienādību gadījumā $n = 2$.

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = \frac{1}{2}[(ad - bc)^2 + (bc - ad)^2] = (ad - bc)^2$$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \geq (ac + bd)^2.$$

Tātad Koši nevienādība šajā gadījumā uzrakstāma kā

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2,$$

un tā kļūst par vienādību, ja $ad = bc$.

Piezīme. Identitātei

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2,$$

kas izsaka divu kvadrātu summas reizinājumu kā divu kvadrātu summu, ir nozīmīga loma skaitļu teorijā. Saskaņā ar [Dev] šī identitāte pieder Fibonači (Leonardo no Pizas), kurš to ir uzrādījis savā 1202. gadā publicētajā grāmatā *Liber abaci*.

Vingrinājums. Uzrakstiet Koši-Lagranža identitāti un no tās izrietošo Koši nevienādību gadījumā $n = 3$.

Sekas KS4.

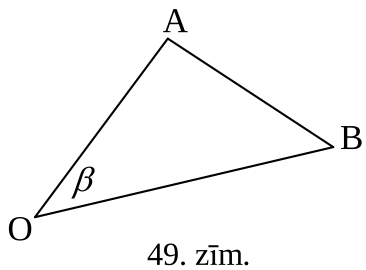
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}}$$

jeb kompaktākā pierakstā $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Pierādījumu iegūst, kāpinot abas puses kvadrātā un lietojot (KN).

Koši nevienādības ģeometriskā interpretācija

Aplūkosim trijstūri OAB ar virsotnēm O = (0, 0), A = (a, b) un B = (c, d). Leņķi starp malām OB un OC apzīmēsim ar β, sk. 49. zīmējumu.



49. zīm.

Pēc kosinusu teorēmas: $|OB|^2 + |OA|^2 - 2|OB|\cdot|OA|\cos\beta = |AB|^2$ jeb

$$c^2 + d^2 + a^2 + b^2 - 2|OB|\cdot|OA|\cos\beta = (a - c)^2 + (b - d)^2$$

$$-2|OB|\cdot|OA|\cos\beta = -2ac - 2bd$$

$$\cos\beta = \frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}} \quad \Leftrightarrow \quad ac+bd \le \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\,.$$

Tātad Košī nevienādību var interpretēt kā to, ka atbilstošā trijstūra leņķa kosinuss nepārsniedz 1.

Vingrinājums. Aplūkojot trijstūri OAB telpā, kad O = (0, 0, 0), A = (a, b, c) un B = (x, y, z), iegūstiet vienādību

$$\cos\beta = \frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

un no tās izrietošo Košī nevienādību

$$ax+by+cz \le \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.$$

1. uzdevums. Lietojot (KN), iegūt šādu nevienādību

$$2kxy \le x^2 + k^2y^2.$$

Tas izdarāms pavisam vienkārši:

$$2kxy = x\cdot ky + ky\cdot x \le \sqrt{x^2+(ky)^2}\cdot\sqrt{(ky)^2+x^2} = x^2+(ky)^2\,.$$

Prasīto var iegūt vēl vienkāršāk, proti, no nevienādības $(x - ky)^2 \ge 0$.

2. uzdevums. Atrast funkcijas $y = \sin x + \cos x$ maksimālo vērtību.

Tā kā $\sin^2 x + \cos^2 x = c = 1$, tad saskaņā ar sekām KS1

$$\max(\sin x + \cos x) = \sqrt{2\cdot 1}\,.$$

Vienādība tiek sasniegta, ja $\sin x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. uzdevums. Atrast funkcijas $y = 2\sin x + \cos x$ maksimālo vērtību.

Pēc Košī nevienādības

$$y \le \sqrt{2^2+1^2}\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x} = \sqrt{5}\,.$$

Vienādība tiek sasniegta, ja x izvēlas tā, lai

$$\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5},\ \sin x = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

4. uzdevums. Dots, ka a un b ir reāli skaitļi, $|a| \le 1$ un $|b| \le 1$. Pierādīt, ka $\left|ab+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\right| \le 1.$ (Sagatavošanas olimpiāde, 12. klase, 2001./2002. māc. g.)

Lietojot sekas KS2, uzdevums atrisināms vienā rindiņā:

$$\left|2ab+2\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\right| \le a^2+b^2+1-a^2+1-b^2 = 2.$$

5. uzdevums. Atrast funkcijas $y = \sin x + \cos x$ minimālo vērtību. Lai varētu lietot KN, meklēsim maksimālo vērtību funkcijai ($-y$). Pēc 2. uzdevuma tā ir vienāda ar $\sqrt{2}$. Tas nozīmē, ka

$$\min(\sin x + \cos x) = -\sqrt{2}\,.$$

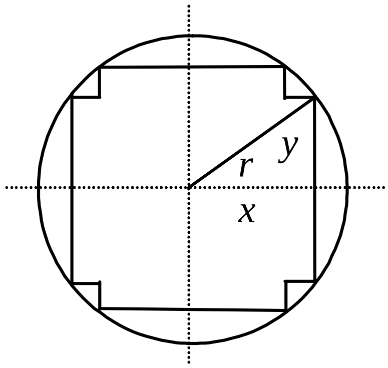
Vienādību iegūst, ņemot $\sin x = \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

<u>6. uzdevums</u>. Atrast funkcijas $y = a\sin x + b\cos x$ maksimālo vērtību.

Pēc (KN): $y \le \sqrt{a^2+b^2}$. Maksimāla vērtība tiek sasniegta, ja $\mathrm{tg}x = \dfrac{a}{b}$. Ja $b = 0$, tad maksimālā vērtība $y_{\max} = |a|$ tiek sasniegta, ņemot $\sin x = \pm 1$ atkarībā no a zīmes.

Uzdevums par transformatoru

<u>7. uzdevums</u>. *Konstruējot maiņstrāvas transformatoru, svarīgi, lai spoles iekšiene tiktu aizpildīta ar iespējami liela laukuma dzelzs krustveida serdi. Kādiem jābūt serdes šķēluma izmēriem x, y, ja spoles rādiuss ir r, sk. 50. zīm?* [Mar, 144; Sm2]



50. zīm.

Studentiem paredzētajā mācību literatūrā [Mar] šo uzdevumu, acīm redzot, ir iecerēts risināt ar diferenciālrēķinu palīdzību. Elementārs risinājums, izmantojot Košī nevienādību, ir dots žurnālā *Квант* [Sm2].

Apzīmēsim ar α leņķi, ko veido 50. zīmējumā attēlotais rādiuss ar horizontālo asi, un ar L – pirmajā kvadrantā ietilpstošās krustveida serdes daļas laukumu. Tad $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$. Lielumu L var izteikt kā divu kvadrātu laukumu starpību:

$$L = x^2 - (x-y)^2 = 2xy - y^2 = r^2(2\cos\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha),\ 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha,$$

$$4L = 2r^2(2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - 1),$$

$$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \le \sqrt{2^2+1^2}\,\sqrt{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha} = \sqrt{5},$$

Serdes laukuma maksimālā vērtība $4L = 2r^2(\sqrt{5} - 1)$ tiek sasniegta, ja

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2}{1} \Rightarrow \mathrm{tg}2\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}2.$$

<u>8. uzdevums</u>. Atrast funkcijas $L = 2xy - y^2$ maksimālo vērtību, ja $x^2 + y^2 = r^2$.

Šāda funkcija parādījās, risinot iepriekšējo uzdevumu. Tās maksimums tika atrasts ar trigonometriskas substitūcijas palīdzību. Tagad atrisināsim uzdevumu ar citu paņēmienu. Lietosim nevienādību $2kxy \le x^2 + k^2y^2$ (sk. 1. uzdevumu). Tad

$$2xy - y^2 \le \frac{x^2}{k} + ky^2 - y^2 = \frac{x^2}{k} + (k-1)y^2.$$

Izvēlēsimies $k > 0$ tā, lai koeficienti pie x^2 un y^2 būtu vienādi, t. i.,

$$\frac{1}{k} = k - 1 \Rightarrow k^2 - k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Tad $L \le (k-1)r^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r^2$. Nevienādība $(x - ky)^2 \geq 0$ kļūst par vienādību, ja $x = ky$. Zinot šo sakarību un nosacījumu $x^2 + y^2 = r^2$, lielumus x un y izteiksim atklātā veidā.

$$(k^2 + 1)\, y^2 = r^2 \Rightarrow y = \frac{r}{\sqrt{k^2+1}} = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}},\ \ x = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

9. uzdevums. No riņķa sektora AOB ar AO = OB = r un leņķi AOB 45° izgriezt taisnleņķa trapeci, kurai divas malas paralēlas X-asij un kurai laukums ir vislielākais.

Ievērosim, ka šis uzdevums ir iepriekšējā uzdevuma cits formulējums. Atzīmēsim, ka optimālās trapeces malu garumu attiecība $x : y$ ir tieši zelta griezuma skaitlis $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Keplera planimetriskais uzdevums

10. uzdevums. *Dotajā riņķī ievilkt taisnstūri ar vislielāko laukumu.* [T, 51; Nat, 15] *Pierādīt, ka no visiem taisnstūriem, kas ievilkti dotajā riņķī, vislielākais laukums ir kvadrātam* [Si1, 651. uzd.] *Dotajā pusriņķī ievilkt taisnstūri ar vislielāko laukumu* [Ze, 54]

Uzdevumu var atrisināt ar dažādiem elementāriem paņēmieniem, piemēram, ar nevienādības $G \leq A$ palīdzību, sk. 6. nodaļu. Tagad šo uzdevumu ar Košī nevienādības palīdzību atrisināsim vēl īsāk. Taisnstūra ABCD laukums (sk. KS1 vai KS2)

$$|AD|\cdot|CD| = 2x\sqrt{r^2 - x^2} \le x^2 + r^2 - x^2 = 2r^2$$

būs maksimāls, ja $x^2 = r^2 - x^2$ jeb $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$, sk. 51. zīmējumu.

Ar Košī nevienādības palīdzību var īsi atrisināt arī šādu aplūkotā uzdevuma vispārinājumu.

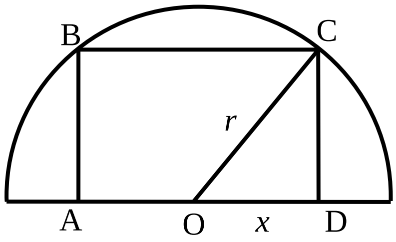
11. uzdevums. Aprēķināt max xy, ja $ax^2 + by^2 = c$, kur a, b un c – doti pozitīvi skaitļi.

Pēc (KN): $2pqxy = px\cdot qy + qy\cdot px \leq p^2x^2 + q^2y^2$. Jeb $2\sqrt{ab}xy \le ax^2 + by^2$ (šī nevienādība iegūstama vēl īsāk, izveidojot pilno kvadrātu $(\sqrt{a}x - \sqrt{a}y)^2 \ge 0$). Tātad

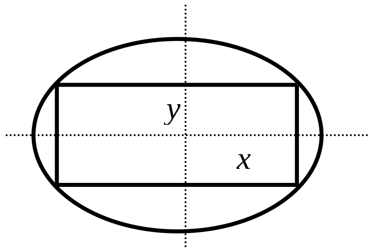
$$xy \le \frac{ax^2 + by^2}{2\sqrt{ab}} = \frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Maksimālā vērtība $\max xy = \frac{c}{2\sqrt{ab}}$ tiek sasniegta, ja $x = \sqrt{\frac{c}{2a}},\ y = \sqrt{\frac{c}{2b}}$.

Piezīme. Uzdevumam ir vienkārša ģeometriska interpretācija. Izteiksme $4xy$ izsaka elipsē $ax^2 + by^2 = c$ ievilkta taisnstūra, kam malas paralēlas koordinātu asīm, laukumu, sk. 52. zīm.



51. zīm.



52. zīm.

Aplūkosim Keplera uzdevuma vispārinājumu un atrisināsim to ar (KN) palīdzību.

12. uzdevums. Noteikt trīs pozitīvu skaitļu reizinājuma maksimumu, ja dota to kvadrātu summa.

13. uzdevums. No dotajā lodē ievilktiem taisnstūra paralēlskaldņiem atrast to, kuram ir vislielākais tilpums.

14. uzdevums. Noteikt k pozitīvu skaitļu reizinājuma maksimumu, ja dota to kvadrātu summa.

Ievērosim, ka 12. un 13. uzdevums raksturojams ar šādu matemātisko modeli.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad \max(xyz) = ?$$

Lietosim nevienādību $G \leq K$:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

Vienādība tiek sasniegta, ja $x = y = z$, kas nozīmē, ka paralēlskaldnis ir kubs.

Tāpat ar nevienādības $G \leq K$ palīdzību ļoti īsi atrisināms arī 14. uzdevums:

$$\sqrt[k]{x_1 x_2 \cdots x_k} \leq \frac{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}}{\sqrt{k}} = \frac{c}{\sqrt{k}}.$$

Nākamajos uzdevumos tiek meklēts minimums summām, kas sastādītas no visiem divu pozitīvu skaitļu reizinājumiem, ja dots šo skaitļu reizinājums:

$$x_1 x_2 \ldots x_k = \text{const} \;\Rightarrow\; \max(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots\, x_{k-1}x_k) = ?$$

15. uzdevums. Atrast minimālo vērtību izteiksmei $a^2 + b^2 + ab$, ja $ab = 1$.

Pēc vienkāršiem pārveidojumiem: $a^2 + b^2 \geq 2ab \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 + ab \geq 3ab = 3$. Vienādība tiek sasniegta, ja $a = b = 1$.

16. uzdevums. (Viskrievijas matemātikas olimpiāde, 1962, sk. [VJ, 24]) a, b, c, d – pozitīvi skaitļi, kuru reizinājums ir 1. Pierādiet, ka

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^{\,2} + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10.$$

Izmantojot nevienādību $A \geq G$ un to, kas lietota iepriekšējā uzdevumā, iegūsim:

$$ab + cd \geq 2\sqrt{abcd} = 2, \quad ac + bd \geq 2\sqrt{abcd} = 2, \quad ad + bc \geq 2\sqrt{abcd} = 2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2ab + 2cd \geq 4.$$

Saskaitot šo četru nevienādību kreisās un labās puses, dabū prasīto novērtējumu.

Piezīme. Uzdevums ir atrodams arī 1966. g. izdotajā krājumā [Si1], kur tas risināts, izmantojot nevienādību $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

17. uzdevums. Pozitīviem a, b un c, kuru reizinājums 1, atrast minimālo vērtību funkcijai $f = a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc$.

Tā kā

$$(a^2 + b^2) + (c^2 + a^2) + (b^2 + c^2) \geq 2ab + 2ac + 2bc,$$

tad $f \geq 2ab + 2ac + 2bc$. Ņemot vērā nosacījumu $abc = 1$ un izmantojot nevienādību $A \geq G$, iegūsim novērtējumu:

$$ab + ac + bc \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 3.$$

Minimālo vērtību – $\min f = 6$ – iegūst, ņemot $a = b = c = 1$.

Piezīme. Kā sekas no šī uzdevuma risinājuma var iegūt klasiskā uzdevuma par paralēlskaldņa ar vismazāko virsmas laukumu atrašanu (ja tam ir dots tilpums) risinājumu.

Tagad aplūkosim vispārīgo gadījumu.

18. uzdevums. Pozitīviem skaitļiem x_1, x_2, …, x_k, kuru reizinājums ir 1, atrast minimālo vērtību summai S, kas sastādīta no visiem iespējamajiem reizinājumiem $x_m x_n$.

Īsi šo summu var pierakstīt tā

$$S = \sum_{1 \leq m \leq n \leq k}^{k} x_m x_n .$$

Summas S daļu, kas sastāv no visu skaitļu kvadrātiem, novērtēsim, lietojot nevienādību $K \geq G$:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_k^2}{k}} \geq \sqrt[k]{x_1 x_2 \cdots x_k} = 1 \Rightarrow x_1^2 + \cdots + x_k^2 \geq k .$$

Ievērosim, ka summas S otrajā daļā ir $c = \frac{k(k-1)}{2}$ saskaitāmo. Lietosim nevienādību $A \geq G$.

$$x_1 x_2 + \cdots x_1 x_k + \cdots + x_{k-1} x_k \geq c \cdot \sqrt[c]{x_1^{k-1} x_2^{k-1} \cdots x_k^{k-1}} = c.$$

No abiem novērtējumiem izriet, ka $S \geq k + c = \frac{k(k+1)}{2}$. Vienādība tiek sasniegta, ja visi skaitļi ir 1.

Piezīme. 15.-18. uzdevumu var atrisināt vēl īsāk. Tā kā summas S locekļu reizinājums ir konstants lielums, tad S būs minimāls, ja visi saskaitāmie vienādi.

19. uzdevums. Atrast izteiksmes $x^4 + y^4$ minimumu, ja $x + y = k$.

Piezīme. Maskavas universitātes mehānikas-matemātikas fakultātes neklātienes olimpiādē (1984. g.) uzdevums: "Pierādīt, ka, ja $a+b>2$, tad $a^4+b^4>2$." bija paredzēts 7. klases skolēniem. Žurnālā *Математика в школе*, 1984, N2, 54. lpp. dots šāds risinājums.

$$a^4+b^4=\frac{1}{2}(a^2+b^2)^2+\frac{1}{2}(a^2-b^2)^2\geq\frac{1}{2}(a^2+b^2)^2=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(a-b)^2\right)^2\geq\frac{1}{8}(a+b)^4>2.$$

Savukārt 1960. gadā izdotajā krājumā [KUK] atrodams uzdevums: "Pierādīt nosacīto nevienādību: ja $a + b \geq 1$, tad $a^4+b^4\geq\frac{1}{8}$." un šāds konspektīvs tā atrisinājums: "Izsakot a un b formā:

$$a=\frac{1}{2}-x,\ b=\frac{1}{2}+y,\ \text{jābūt}\ y\geq x.\ \text{Tad}\ a^4+b^4=\left(\frac{1}{2}-x\right)^4+\left(\frac{1}{2}+y\right)^4=$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}(y-x)+\frac{3}{2}(y^2+x^2)+2(y^3-x^3)+(y^4+x^4)\geq\frac{1}{8}."$$

Izmantojot nevienādību $A \leq K$, uzrādīsim īsāku risinājumu.

$$A^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leq\frac{a^2+b^2}{2}\leq\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}\ \Rightarrow a^4+b^4\geq 2A^4=\frac{k^4}{8}.$$

Vienādību iegūst, ņemot $a=b=\frac{k}{2}$. Atzīmēsim, ka k var būt arī negatīvs.

20. uzdevums. Atrast minimumu izteiksmei $\mathrm{tg}^2x + \mathrm{tg}^2y + \mathrm{tg}^2z$, ja $x+y+z=\frac{\pi}{2}$.

Pastāvot dotajam nosacījumam, ir spēkā formulas:

$$\mathrm{tg}z=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}-x-y)=\mathrm{ctg}(x+y)=\frac{1-\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y}{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}\Rightarrow\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y+(\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y)\mathrm{tg}z=1,$$
$$\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y+\mathrm{tg}y\cdot\mathrm{tg}z+\mathrm{tg}z\cdot\mathrm{tg}x=1,$$

Lietojot Košī nevienādību, dabū:

$$1=\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y+\mathrm{tg}y\cdot\mathrm{tg}z+\mathrm{tg}z\cdot\mathrm{tg}x\leq\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}^2y+\mathrm{tg}^2z.$$

Minimums tiek sasniegts, ja $x=y=z=\frac{\pi}{6}$.

Piezīme. Uzdevumu krājumos var atrast līdzīgu uzdevumu:

"Pierādīt nevienādību $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq 1$, ja $\alpha+\beta+\gamma=\pi$." un formulu $\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y+\mathrm{tg}y\cdot\mathrm{tg}z+\mathrm{tg}z\cdot\mathrm{tg}x=1-\frac{\cos(x+y+z)}{\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z}$. [Si1, 424]

Daži olimpiāžu uzdevumi

21. uzdevums. [Liu, 19] Pierādīt, ka

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geq x_1+x_2+\ldots+x_n,$$

kur $x_1,\ x_2, ...x_n$ ir reāli pozitīvi skaitļi.

Minētajā grāmatā doti 4 atrisinājumi. Viens no tiem pamatojas uz (KN) izmantošanu. Ņemam $x_{n+1} = x_1$. Tad pēc Košī nevienādības

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = (\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_{i+1}}\ \frac{x_i}{\sqrt{x_{i+1}}})^2 \le (\sum_{i=1}^{n} x_i)\ (\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_{i+1}}),$$

kas arī bija jāpierāda.

<u>22. uzdevums</u>. [Liu, 27] Dažādu pozitīvu *m* pārskaitļu un *n* nepārskaitļu summa ir 1987. Kāda ir maksimālā 3*m* + 4*n* vērtība?

"Skaidrs, ka

$$1987 \ge (2 + 4 + \ldots + 2m) + (1 + 3 + \ldots + (2n - 1)) =$$
$$= (m + \frac{1}{2})^2 + n^2 - \frac{1}{4}$$

vai

$$(m + \frac{1}{2})^2 + n^2 \le 1987 + \frac{1}{4}.$$

Pēc Košī nevienādības

$$3m + 4n = 3(m + \frac{1}{2}) + 4n - \frac{3}{2} \le \sqrt{3^2 + 4^2}\ \sqrt{(m + \frac{1}{2})^2 + n^2}\ - \frac{3}{2} \le 5\sqrt{1987 + \frac{1}{4}} - \frac{3}{2} < 222.$$

Tātad 3*m* + 4*n* ≤ 221. Diofanta vienādojumam 3*m* + 4*n* = 221 ir daudz pozitīvu atrisinājumu, bet *m* un *n* nevajadzētu daudz atšķirties. Izdalot 221 ar 3 + 4 = 7, dalījums ir 31 un atlikums 4. Tātad (*m*, *n*) = (31, 32) ir atrisinājums. Taču 1 + 2 + … + 63 = 2016, kas par 29 pārsniedz 1987. Lai samazinātu šo summu, aizvietosim četrus pārskaitļus ar trim nepārskaitļiem. Ievērosim, ka

(54 + 56 + 58 + 62) – (65 + 67 + 69) = 29.

Ja ņemsim 27 pārskaitļus 2, 4, …, 50, 52, 60 un 35 nepārskaitļus 1, 3, …, 69, to summa būs tieši 1987. Tātad 3*m* + 4*n* vērtība ir 221."

<u>23. uzdevums</u>. (24. starptautiskā matemātikas olimpiāde, Parīze, 1983) Pieņem, ka *a*, *b* un *c* – patvaļīga trijstūra malu garumi. Pierādīt, ka

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \ge 0.$$

Noskaidrot, kādos gadījumos izpildās vienādība.

Žurnālā *Математика в школе*, 1984, N2, 54. lpp. dots šāds uzdevuma autora risinājums:

"Pārejot uz jauniem mainīgajiem *x* + *y* = *c*, *y* + *z* = *a*, *z* + *x* = *b* (*x*, *y*, *z* – nogriežņi, kādos trijstūra malas sadala tajā ievilkta riņķa pieskaršanās punkti) pēc vienkāršiem, bet daudz vietas aizņemošiem pārveidojumiem dotā nevienādība reducējas uz

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \ge xyz\ (x + y + z).$$

Šī sakarība ir ekvivalenta šādai:

$$(xy^3 + yz^3 + zx^3)(x + y + z) \ge (\sqrt{xyz}\ (x + y + z))^2.$$

Pēdējās nevienādības pareizība izriet no Košī-Buņakovska nevienādības $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \le (\vec{a} \cdot \vec{a})\ (\vec{b} \cdot \vec{b})$, kas lietota trīsdimensiju telpas vektoriem

$$\vec{a} = (y\sqrt{xy},\ z\sqrt{yz},\ x\sqrt{zx}) \text{ un } \vec{b} = (\sqrt{z},\ \sqrt{x},\ \sqrt{y}).$$

Kā zināms, $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = (\vec{a}\cdot\vec{a})\,(\vec{b}\cdot\vec{b})$ tikai gadījumā $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, tāpēc vienādība dotajā sakarībā tiek sasniegta tikai tad, kad $\frac{xy^3}{z}=\frac{yz^3}{x}=\frac{zx^3}{y}$, t. i., kad $x = y = z$, kas ir spēkā tikai vienādmalu trijstūrim."

Risinājums ir konspektīvs. Viena no iespējām, kā veikt minētos garos pārveidojumus, ir atrast koeficientus pie z pakāpēm izteiksmē:

$$(z^2+2yz+y^2)(z+x)(y-x)+$$
$$(z^2+2xz+x^2)(z-y)(x+y)+$$
$$(-z^2+z(x-y)+xy)(x+y)^2.$$

$z^3: y-x+x+y=2y;$

$z^2: (x+2y)(y-x)+(-y+2x)(x+y)-(x+y)^2=-2xy;$

$z^1: (2yx+y^2)(y-x)+(-2xy+x^2)(x+y)+(x-y)(x+y)^2=...=2x^3-2xy(x+y);$

$z^0: y^2x(y-x)-x^2(x+y)y+xy(x+y)^2=2xy^3.$

Pamācošs ir olimpiādes dalībnieka – Ļvovas skolēna L. Parnovska atrastais "tiešais" risinājums. Tiesa, arī tas nav no īsākajiem.

"Pieņem, ka c – visīsākā trijstūra mala. Tad $a=c+\alpha, b=c+\beta,$ kur $\alpha\ge 0, \beta\ge 0$. Ievietojot šīs izteiksmes nevienādības kreisajā pusē un pārveidojot to, iegūstam šādu izteiksmi

$$S=(\alpha-\beta)^2c^2+\alpha\beta c^2+(\alpha^3+\beta(\alpha-\beta)^2)c+\alpha^2\beta(\alpha-\beta).$$

Lai pierādītu tās nenegativitāti, nākas izskatīt divus gadījumus $\alpha\ge\beta$ un $\alpha<\beta$ …Gadījumā $\alpha<\beta$ izmantojam papildus apsvērumus. Pēc trijstūra nevienādības

$b<a+c$, t. i., $\beta<c+\alpha$, tad $\alpha-\beta>-c,\ c>\beta-\alpha$. No divām pēdējām nevienādībām iegūstam:

$$\begin{aligned}S&=(\alpha-\beta)^2c^2+\alpha\beta c\cdot c+(\alpha^3+\beta^3+\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2)c+\\&+\alpha^2\beta(\alpha-\beta)\ge(\alpha-\beta)^2c^2+\alpha\beta(\beta-\alpha)c+(\alpha^3+\beta^3+\\&+\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2)c-\alpha^2\beta c=(\alpha-\beta)^2c^2+(\alpha^3+\beta^3+\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2-\\&-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta)c=(\alpha-\beta)^2c^2+(\alpha^3+\beta^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2)c=\\&=(\alpha-\beta)^2c^2+(\beta^2-\alpha^2)(\beta-\alpha)c>0,\text{ jo }\beta>\alpha.\end{aligned}$$

Uzrādīsim īsāku un vienkāršāku risinājumu. Uzskatīsim, ka trijstūra malas ir sakārtotas secībā $a\le b\le c$. Apzīmēsim $b=ax$, $c=ay$. Tad $1\le x\le y<1+x$. Nevienādība $y<1+x$ iegūta no trijstūra malu īpašības: $c<a+b \Leftrightarrow ay<a+ax$. Pārrakstot doto nevienādību jaunajos mainīgajos, iegūsim

$$x(1-x)+x^2y(x-y)+y^2(y-1)\ge 0.$$

Pārveidosim nevienādības kreiso pusi kā nenegatīvu saskaitāmo summu

$$x(1-x)+x^2y(x-y)+y^2(y-x+x-1)=y(y-x)(y-x^2)+(x-1)(y^2-x)=$$

$$=y(y-x)^2+y(y-x)(x-x^2)+(x-1)(y^2-x)=$$

$$= y(y-x)^2 + (x-1)[y^2 - x - xy(y-x)] =$$

$$= y(y-x)^2 + (x-1)(y-x) + (x-1)^2 y(x+1-y) \geq 0.$$

Vienādība tiek sasniegta, ja $x = y = 1$, t. i., ja $a = b = c$.

<u>24. uzdevums</u>. (33. starptautiskā matemātikas olimpiāde, 1992, Maskava.)
"Pieņem, ka $Oxyz$ – taisnleņķa koordinātu sistēma telpā, S – galīga telpas punktu kopa un S_x, S_y, S_z – ortogonālo projekciju kopa attiecīgi uz plaknēm Oyz, Ozx, Oxy. Pierādīt, ka

$$|S^2| \leq |S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|.$$

(Ar |A| tiek apzīmēts galīgas kopas elementu skaits. Punkta ortogonālā projekcija uz plakni ir perpendikula, kas novilkts no šī punkta uz plakni, pamats)" [SMO, 20] [2)]

"Pierādījumu veiksim ar indukciju pēc kopas S punktu skaita $|S|$.

1°. No viena elementa sastāvošai kopai S uzdevuma apgalvojums ir acīmredzams.

2°. Pieņem, ka šis apgalvojums ir patiess kopām, kurām $|S| < N$, kur N – vesels skaitlis, kas lielāks par 1. Aplūkosim patvaļīgu tādu kopu S, ka $|S| = N$. Skaidrs, ka eksistē plakne, kas paralēla vienai no koordinātu plaknēm un kas neiet caur kopas S punktiem, kura sadala S divās netukšās kopās S_1 un S_2:

$$N = |S_1| + |S_2|, \ |S_1| < N, \ |S_2| < N.$$

Apzīmēsim:

$$a = |S_x|, \ b = |S_y|, \ c = |S_z|;$$

$$a_i = |S_{ix}|, \ b_i = |S_{iy}|, \ c_i = |S_{iz}|, \ i = 1, 2.$$

Tad pēc indukcijas pieņēmuma

$$|S_1|^2 \leq a_1 b_1 c_1, \quad |S_2|^2 \leq a_2 b_2 c_2.$$

Neierobežojot vispārīgumu, var uzskatīt, ka S sadalošā plakne ir paralēla Oxy. Acīmredzami, ka

$$a_1 + a_2 = a, \ b_1 + b_2 = b, \ c_1 \leq c, \ c_2 \leq c.$$

No šejienes ar Košī-Buņakovska nevienādības

$$\left(\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2}\right)^2 \leq (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \text{ [3)]}$$

palīdzību iegūsim prasīto novērtējumu:

$$|S|^2 = \left(|S_1| + |S_2|\right)^2 \leq \left(\sqrt{a_1 b_1 c_1} + \sqrt{a_2 b_2 c_2}\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\sqrt{a_1 b_1}\cdot\sqrt{c} + \sqrt{a_2 b_2}\cdot\sqrt{c}\right)^2 \leq c(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = abc."$$

<u>25. uzdevums</u>. (36. starptautiskā matemātikas olimpiāde, 1995, Kanāda.)

"Pieņem, ka a, b, c – tādi pozitīvi skaitļi, ka $abc = 1$. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}."$$

Atrisinājums dots olimpiāžu uzdevumu krājumā [SMO, 143-144] "Ērti pāriet uz jauniem mainīgajiem $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$, kas arī ir pozitīvi un saistīti ar nosacījumu $xyz = 1$. Dotā nevienādība ir ekvivalenta šādai [4)]:

$$S = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

To var pierādīt ar dažādiem paņēmieniem, gandrīz visos no tiem tiek izmantota nevienādība starp trīs skaitļu vidējo aritmētisko un ģeometrisko.

Droši vien visīsāko atrisinājumu ir piedāvājis M. Klamkins (ASV); tajā vēl tiek izmantota Košī nevienādība skalārajam reizinājumam

$$(u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2)^2 \le (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) .$$

Lietojot to vektoriem $\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{z+x}}, \frac{z}{\sqrt{x+y}} \right)$ un $\left(\sqrt{y+z}, \sqrt{z+x}, \sqrt{x+y} \right)$,

iegūstam

$$(x + y + z)^2 \le S \cdot 2(x + y + z) ,$$

t. i., $S \ge \frac{1}{2}(x + y + z)$. Tagad, izmantojot nevienādību $\frac{1}{3}(u + v + w) \ge \sqrt[3]{uvw}$, iegūstam

$$S \ge \frac{1}{3}(x + y + z) \cdot \frac{3}{2} \ge \sqrt[3]{xyz} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.”$$

<u>26. uzdevums</u>. (28. starptautiskā matemātikas olimpiāde, 1987, Kuba.)

“Pieņem, ka x_1, x_2, …, x_n – reāli skaitļi un

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1.$$

Pierādīt, ka katram veselam skaitlim $k \geq 2$ eksistē tādi veseli skaitļi a_1, a_2, …, a_n, kuri vienlaicīgi nav vienādi ar nulli, ka $|a_1| < k - 1$, $i = 1, 2, …, n$ un

$$\left| a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \right| \le \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.”$$

Pēc Košī nevienādības

$$|x_1| + ... + |x_n| \le \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n}.$$

“Apskatīsim k^n skaitļus ar veidu $l_1x_1 + ... + l_nx_n$, kur $l_1, ..., l_n \in \{0, 1, ..., k-1\}$.

Visi šie skaitļi ir izvietoti nogrieznī ar garumu $\left(|x_1| + ... + |x_n|\right)(k-1)$, kurš nepārsniedz $(k-1)\sqrt{n}$, un sadala šo nogriezni k^n – 1 nešķeļošos intervālos (daži no tiem var būt tukši). Vismaz viena šāda intervāla (u, v) garums nepārsniedz $\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$. Tad $u - v$ ir skaitlis ar veidu $a_1x_1 + ... + a_Nx_N$, kur ne visi a_i ir vienādi ar nulli, jo u un v atbilst dažādām koeficientu kopām $l_1, ..., l_N$, $|a_i| \le k - 1, i = 1, ..., n$ un skaitļa $u - v$ modulis nepārsniedz

$\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$.” [SMO, 95]

Žurnālā *Квант*, 1972, N°1, patstāvīgai risināšanai (lietojot Košī nevienādību) piedāvāti vairāki uzdevumi.

Atrast vislielāko vērtību funkcijām:

$$y = a\sin x + b\sin(\frac{\pi}{3} + x) + c\sin(\frac{\pi}{3} - x) \quad (a > 0, b > 0, c > 0, 0 < x < \frac{\pi}{3});$$

$$z = a\sin(x + y) + b\sin(x - y) + c\sqrt{\cos 2x \cdot \cos 2y} \quad (a > 0, b > 0, c > 0, 0 < x, y < \frac{\pi}{4});$$

$$u = a\cos x + b\cos y + c\cos z + d\sqrt{2\cos x \cos y \cos z},$$

kur a, b, c, d – pozitīvi skaitļi, x, y, z – trijstūra šaurie leņķi;

$$u = a\sin x + b\sin y + c\sin z + d\sin t + e\sqrt{2\cos(x+y)\cdot\cos(y+z)\cdot\cos(z+x)},$$

kur a, b, c, d, e – pozitīvi skaitļi, $x + y + z + t = 2\pi$;

$$y = \frac{(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \quad (a_i > 0,\ x_i > 0).$$

Piezīme. Šis uzdevums nav nekas cits kā (KN) pieraksts dalījuma veidā. Pievienotie ierobežojumi par a_i un x_i pozitivitāti ir lieki.

Noteiksim vislielāko vērtību funkcijai

$$y = a\sin x + b\sin(\frac{\pi}{3} + x) + c\sin(\frac{\pi}{3} - x) \ \ (a > 0, b > 0, c > 0, 0 < x < \frac{\pi}{3});$$

Anniņa. Pārveidošu doto funkciju, izmantojot divu leņķu summas sinusa un starpības sinusa formulas:

$$y = a\sin x + b\sin\frac{\pi}{3}\cos x + b\cos\frac{\pi}{3}\sin x + c\sin\frac{\pi}{3}\cos x - c\cos\frac{\pi}{3}\sin x,$$

$$y = [a + (b-c)\cos\frac{\pi}{3}]\sin x + (b+c)\sin\frac{\pi}{3}\cos x.$$

Saskaņā ar Košī nevienādību:

$$y_{\max} = \sqrt{(a + \frac{b-c}{2})^2 + \frac{3}{4}(b+c)^2}, \text{ ja } \operatorname{tg}x = \frac{2a+b-c}{(b+c)\sqrt{3}}.$$

Vai uzdevums atrisināts pareizi?

Jānītis. Izvēlēsimies $a = 3$, $b = c = 1$. Tad $\operatorname{tg}x = \sqrt{3}$, kas neatbilst dotajam nosacījumam $0 < x < \frac{\pi}{3}$. Tātad Anniņa uzdevumu nav atrisinājusi pareizi.

Anniņa. Tā kā $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, tad mans risinājums ir pareizs, ja vien to papildina ar nosacījumu $0 < x \le \frac{\pi}{3}$. Uzdevuma formulējumā droši vien ir ieviesusies drukas kļūda vai arī uzdevuma sastādītājs nav bijis īpaši uzmanīgs.

Jānītis. Izvēlēsimies $a = 4$, $b = c = 1$. Tad $\operatorname{tg}x = \frac{4}{\sqrt{3}}$, kas neatbilst pat Anniņas precizētajam nosacījumam $0 < x \le \frac{\pi}{3}$.

Anniņa. Papildināšu savu risinājumu vēlreiz.

$$\operatorname{tg}x = \frac{2a+b-c}{(b+c)\sqrt{3}} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \ \Rightarrow\ \frac{2a+b-c}{(b+c)\sqrt{3}} < \sqrt{3} \ \Rightarrow 2a + b - c < 3(b+c).$$

Tātad, lai uzdevumam būtu atrisinājums intervālā $0 < x < \frac{\pi}{3}$, jāprasa, lai $a < b + 2c$.

Jānītis. Skaitļiem $a = 1$, $b = 1$ un $c = 3$, kuri apmierina nosacījumu $a < b + 2c$, ir spēkā $\mathrm{tg}x = 0$, kas pretrunā ar to, ka $0 < x < \frac{\pi}{3}$. Tātad Anniņai kārtējo reizi jāprecizē atrisinājums.

Palīdziet Anniņai pabeigt uzdevuma risinājumu!

Tagad noteiksim maksimumu funkcijai z.

Anniņa. Pēc (KN)

$$z \le \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{\sin^2(x+y) + \sin^2(x-y) + \cos 2x \cos 2y} .$$

Pārveidošu trigonometrisko izteiksmi

$$\frac{1-\cos(2x+2y)}{2} + \frac{1-\cos(2x-2y)}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos\left(2x-2y\right) + \left(2x+2y\right)\right) = 1 .$$

Tātad $\max z = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Turklāt maksimums nav atkarīgs no x, y jo trigonometriskā daļa visiem x un y ir vienāda ar 1.

Vai iegūtā atbilde ir pareiza? Vai Anniņas risinājums ir korekts?

Jānītis. Šķiet, ka jā. Tomēr pārbaudīšu. Izvēlēšos $x = y = 0$. Tad $z = c$. Tas nozīmē, ka maksimums ir atkarīgs no x, y.

Anniņa. Tāda izvēle nemaz neder, jo x, y pēc dotā ir pozitīvi lielumi.

Jānītis. Tas nekas, ka neder. Ja būtu prasība meklēt maksimumu nenegatīviem x, y, tad Anniņas atrisinājums no tā nemainītos.

Paijiņa. Jānīša piemērs neapgāž Anniņas atbildi, jo $c < \max z$.

Kārlītis. Lai Košī nevienādība kļūtu par vienādību, jāizpildās proporcionalitātes nosacījumam:

$$a : b : c = \sin(x+y) : \sin(x-y) : \sqrt{\cos 2x \cdot \cos 2y}$$

$$a^2 : b^2 : c^2 = \sin^2(x+y) : \sin^2(x-y) : (\cos 2x \cdot \cos 2y).$$

Tā kā trīs locekļu, kas atrodas pa labi no vienādības zīmes, summa ir 1, bet kreisajā pusē tā var arī nebūt, piemēram, kad $a = b = c = 1$, tad Anniņas risinājums nav pareizs.

Palīdziet Anniņai aizstāvēties.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

27. uzdevums. Atrast funkcijas $y = 5\sin x + 12\cos x$ maksimālo vērtību.

28. uzdevums. Atrast funkcijas $f = 2xy - y^2$ maksimālo vērtību, ja $x^2 + y^2 = r^2$.

29. uzdevums. Atrast funkcijas $g = 2xy + y^2$ maksimālo vērtību, ja $x^2 + y^2 = r^2$.

30. uzdevums. Atrast funkcijas $g = 2xy + y^2$ maksimālo vērtību, ja $x^2 + 2y^2 = 4$.

31. uzdevums. Atrast funkcijas $g = 2xy + y^2$ maksimālo vērtību, ja $2x^2 + y^2 = 4$.

32. uzdevums. Atrast funkcijas $g = axy + by^2$ maksimālo vērtību, ja $cx^2 + dy^2 = u^2$, kur c un d ir pozitīvi skaitļi.

33. uzdevums. Atrast x, kuram $f = (\sqrt{x+4} + \sqrt{6-x})$ ir maksimāls.

34. uzdevums. No riņķa sektora AOB, kuram AO = OB = r un leņķis AOB vienāds ar 45°, izgriezt taisnleņķa trapeci, kurai laukums ir vislielākais.

35. uzdevums. Lietojot Košī nevienādību, pierādīt, ka

$$xy \le p^2x^2 + q^2y^2, \text{ ja } 2pq = 1.$$

36. uzdevums. Lietojot (KN), pierādīt, ka $xy \le px^2 + qy^2$, ja p, $q > 0$ un $4pq = 1$.

Nākamajā uzdevumā ietvertās nevienādības, kas patstāvīgai risināšanai piedāvātas žurnālā *Квант*, 1972, N1, ir tiešas Košī nevienādības sekas.

37. uzdevums. Pierādīt nevienādības (visi tajās ietilpstošie lielumi ir pozitīvi).

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i y_i} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i} ;$$

$$(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i b_i})^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{x_i} ;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_i} \ge \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 .$$

38. uzdevums. No vienības lodē ievilktiem taisnstūra paralēlskaldņiem atrast to, kuram visu šķautņu garumu summa ir vislielākā.

39. uzdevums. Noteikt trīs skaitļu reizinājuma maksimumu, ja dota to kvadrātu summa.

40. uzdevums. Noteikt 3 pozitīvu skaitļu reizinājuma xyz maksimumu, ja $ax^2 + by^2 + cz^2 = k$.

41. uzdevums. Atrast vismazāko vērtību izteiksmei pozitīvos skaitļos

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}).$$

42. uzdevums. Noteikt k skaitļu reizinājuma $x_1 \ldots x_k$ maksimumu, ja $q_1x^2 + \ldots + q_kx^k = \text{const}$, kur $q_1, \ldots, q_k$ – doti pozitīvi skaitļi.

43. uzdevums. Noteikt reizinājuma xyz maksimumu, ja $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Dot uzdevuma ģeometrisko interpretāciju. [5)]

44. uzdevums. (Математика в школе, 1984, N6) Regulārā n-stūra piramīdā divplakņu kaktu leņķi pie pamata šķautnes un sānu šķautnes ir attiecīgi α un β. Atrast vislielāko vērtību izteiksmei $y = \cos\alpha + \cos\frac{\beta}{2}$.

(Norādījums. Iegūt sakarību $\cos\frac{\beta}{2} = \sin\alpha \sin\frac{\pi}{n}$.)

Sofisms par Košī nevienādības $\left(\sum x_i y_i\right)^2 \leq \sum x_i^2 \cdot \sum y_i^2$ izmantošanu.

Uzdevums. Atrast $ab + bc + ac$ vismazāko un vislielāko vērtību, ja

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Anniņa. Pēc Košī nevienādības:

$$(ab + bc + ca)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + a^2) = 1,$$

no kā izriet, ka $-1 \leq ab + bc + ac \leq 1$.

Jānītis.

$$0 \leq (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 1 + 2(ab + bc + ac).$$

Tas nozīmē, ka

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ac.$$

Tātad Anniņa apakšējo robežu nav noteikusi pareizi.

Anniņa. Pārsteidzoši! Līdz šim es uzskatīju, ka Košī nevienādība ir precīza. Pārbaudīšu savus un Jānīša spriedumus divu mainīgo gadījumā, t. i., kad $a^2 + b^2 = 1$ un jāatrod $ab + ba = 2ab$ ekstremālās vērtības. Pēc analoģijas:

$$(ab + ba)^2 \leq (a^2 + b^2)(b^2 + a^2) = 1 \Rightarrow -1 \leq ab + ba \leq 1$$

$$0 \leq (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2(ab + ba) = 1 + 2ab \Rightarrow -1 \leq 2ab.$$

Tagad mums abiem apakšējais novērtējums sakrīt. Tā kā Jānīša rezultāts ir vienpusējs, tas ir nepilnīgs un kā tāds nav absolūti pareizs.

Jānītis. Atliek secināt, ka Košī nevienādība, sākot ar trim mainīgajiem, kļūst neprecīza.

Piezīme. Izrādās, ka ar šo sofismu ir saskāries kāds students, kurš raksta: *Es nejauši uzdūros interesantam jautājumam, par kuru es konsultējos ar dažiem maniem matemātikas skolotājiem un dažiem matemātikas studentiem entuziastiem. Taču arī viņi bija nesaprašanā tāpat kā es, un mēs nevaram atrast izskaidrojumu.* [Bar, 21].

Komentāri

Ievads

[1)] Piemēram, pamatskolas ģeometriju aptverošajā mācību līdzeklī
Januma S., Lude I. *Uzdevumu krājums ģeometrijā pamatskolai*, Zvaigzne ABC, 2001, 176 lpp., kas turklāt ir ieguvis atzinību apgāda Zvaigzne ABC rīkotajā konkursā "Izglītība Latvijas nākotnei", ekstrēmu uzdevumi, kā saka, pat ar uguni nav sameklējami.

[2)] 2) *C. Muses*, Kanāda. Viņš atzīmē, ka: "dažus gadus pēc Ramčandras atklāšanas es iepazinos ar I. Nivena lieliski uzrakstīto grāmatu *Maxima and Minima without Calculus* (Mathematical Association of America, 1981) Lai gan Nivens aplūko tās pašas idejas un pat daļu no uzdevumiem, kurus aplūkojis Ramčandra, viņš neko nav zinājis par savu indiešu priekšgājēju, neskatoties uz izcilā Morgana pūlēm… Ramčandra neparādās ne Nivena tekstā, ne alfabētiskaja rādītājā, ne bibliogrāfijā."

[3)] Skolotājiem paredzētajā grāmatā [Nev] nav dots izmantotās literatūras saraksts, tomēr 183. lpp. ir norādīts, ka uzdevumus, kas saistīti ar maksimumu un minimumu meklēšanu, var atrast lieliskajā, bet nedaudz novecojušajā Ž. Bertrana mācību līdzeklī algebrā, kā arī Abelsona grāmatā *Максимум и минимум*, 1935. Ievērību pelna pirms simts gadiem izdotā grāmata [H], kuras autors (atšķirībā no daudziem mūsdienu mācību līdzekļu sastādītājiem) sniedz vēsturisku informāciju par vairākiem grāmatā iekļautajiem ekstrēmu uzdevumiem. Piemēram, 15. lpp. rakstīts: „$x(x-a)$ has its greatest value when $x=\frac{a}{2}$ (Euclid, Book VI, Prop. 27) Cantor (*Geschichte der Math.*, Vol. I, p. 288) says that this is the first example of a maximum in the history of mathematics."

1. nodaļa

[1)] Kaut arī šī grāmata ir it kā recenzēta, tajā mudž no kļūdām, turklāt to *Atļāvusi lietot Latvijas Republikas Izglītības un zinātnes ministrija*.

[2)] Mācību literatūrā agrāk tika lietotas šādas definīcijas:

1912
Saka, ka funkcijai $f(x)$ ir maximum vai minimum pie vērtības $x = a$, ja starpība $f(a + h) - f(a)$ saglabā zīmi, nepārvēršoties nullē, visām h vērtībām, kas pēc absolūtās vērtības mazākas par pietiekami mazu pozitīvu skaitli ε; maximum atbilst tam gadījumam, kad starpība šī ir negatīva un tad $f(a) > f(x)$ tām x vērtībām, kas pietiekami tuvas a…[Val, 127]

1927
Saka, ka nepārtrauktai funkcijai vai līknei $y = f(x)$ punktā $x = \xi$ ir maksimums (minimums), ja vismaz kaut kādā punkta ξ apkārtnē visas funkcijas $f(x)$ vērtības pie $x \neq \xi$ ir mazākas nekā $f(\xi)$ [lielākas nekā $f(\xi)$]. [Kur, 189]

1933
Funkcijas "Maximum" ir tāda tās vērtība, kura ir lielāka par jebkurām pirms un pēc tās esošajām vērtībām tiešajā tās tuvumā. [GL, 311]

1936
Pieņem, ka $f(x)$ ir funkcija, kas nepārtraukta intervāla (a, b) *iekšienē*, un c – punkts šajā intervālā. Funkcijai $f(x)$ ir maksimums vai minimums pie $x = c$, ja var atrast tādu pietiekami mazu pozitīvu skaitli η, ka starpība $f(c+ h) - f(c)$, kas pārvēršas nullē pie $h = 0$, saglabā nemainīgu zīmi visiem citiem h, kas atrodas starp $-\eta$ *un* $+\eta$. Ja šī starpība pozitīva, tad funkcijas $f(x)$ vērtība pie $x = c$ būs mazāka nekā pie visām citām x vērtībām, kas tuvas c; tātad $f(x)$ pie $x = c$ iet caur minimumu… [Gur, 104]

1943
Saka, ka nepārtrauktai funkcijai vai līknei y = f (x) *punktā* x= ξ *ir* *maksims* *vai* *minims*, *ja šā punkta apkārtnē visas funkcijas* f (x) *vērtības, kas atbilst argumenta* x ≠ ξ *vērtībām, ir mazākas vai lielākas par* f (ξ) . *Ar punkta* x= ξ *apkārtni* *saprot intervallu* $\alpha \le x \le \beta$, *kas satur šo punktu savā iekšpusē. Ģeometriski runājot, šādi maksimi un minimi ir līknes izdobumi un iedobumi.* [Lei, 78] (Mūsdienās ar punkta apkārtni, kā likums, saprot vaļēju intervālu.)

1946
Pieņemam, ka $f(x)$ *intervalā* (α, β) ir vienvērtīga un nepārtraukta. Tādai funkcijai šā intervāla vietā $x = a$ ir maksims, ja ap $x = a$ varam noteikt tādu apkārtni, ka $f(a)$ vērtība ir lielāka par visām citām funkcijas $f(x)$ vērtībām šinī apkārtnē. [Ciz, 78-79]

1947
Funkcijas maksimuma stingra definīcija ir šāda: *funkcijai* $f(x)$ *ir maksimums pie* $x = c$, *ja var atrast tādu apkārtni, kurā pie* $x \neq c$ *vienmēr ir apmierināta nevienlīdzība* $f(x) < f(c)$. [Vin, 239]

Funkcijas maksims ir funkcijas nozīme, kas lielāka par katru pēc patikas tuvu stāvošu kaimiņu nozīmi. [Oz, 146]

1952
Minimuma analītiskā definīcija ir šāda: *funkcija* $f(x)$ *sasniedz minimumu punktā* $x = x_2$, *ja ir izpildīts nosacījums* $f(x_2 + h) - f(x_2) > 0$ *visām pozitivām un negativām, pēc absolūtās vērtības pietiekami mazām* h *vērtībām*. [Smir, 126]

1958
Par kādas funkcijas *maksimālo* vērtību sauksim to, kura *lielāka* kā citas vērtības pietiekami tuvām argumenta vērtībām. [Luz, 173]

Saka, ka funkcija $y = f(x)$ *sasniedz maksimumu punktā* $x = x_0$, *ja tās vērtība* $f(x_0)$ *šajā punktā ir lielāka par visām vērtībām tuvākajos punktos pa labi un pa kreisi*. [Mil, 92]

1968
Tādējādi par *ekstrēmu punktiem sauc punktus, kurus pārejot atvasinājums maina zīmi*. (Tā ir nepieciešamā un pietiekamā pazīme). [Miš, 239]

Saka, ka funkcijai $f(x)$ ir maksimums punktā $x = a$, ja šī punkta pietiekami tuvā apkārtnē visām x vērtībām (kas ir kā lielākas, tā arī mazākas par a) atbilst $f(x)$ vērtības, kas ir mazākas par $f(a)$. [Vig2, 397]

1982
Funkcijas f definīcijas kopas punktu x_0, sauc par šīs funkcijas maksimuma punktu, ja eksistē punkta x_0 tāda apkārtne, ka visiem šīs apkārtnes punktiem, kas nesakrīt ar x_0, ir pareiza nevienādība $f(x) < f(x_0)$. [REM, 287]

Diemžēl arī mūsdienu mācību līdzekļu un rokasgrāmatu autori tiražē ne tās labākās vai pat kļūdainas definīcijas:

2003
Punktu x_0 sauc **funkcijas maksimuma (minimuma) punktu**, ja šajā punktā funkcija ir nepārtraukta un visām x vērtībām $(x \neq x_0)$ no šī punkta kaut kādas ε - apkārtnes (ε > 0) ir spēkā nevienādība $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$). [RPGB, 88]

Punktu x_0 sauc funkcijas $f(x)$ lokālā maksimuma (minimuma) punktu, ja, pirmkārt, funkcija ir nepārtraukta dotajā punktā un, otrkārt, var atrast tādu punkta x_0 apkārtni, kurā visiem x ir spēkā $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$). [GKo, 238]

2004
Punktu $M_0(x_0, y_0)$ sauc par funkcijas $z = f(x, y)$ lokālā maksimuma (minimuma) punktu, ja funkcijas definīcijas apgabalā D eksistē tāda šī punkta apkārtne, ka visos tās punktos $M(x, y)$ pastāv nevienādība $f(x_0, y_0) > f(x, y)$; ($f(x_0, y_0) < f(x, y)$). [Tok, 89]

2006

Punktu x_0 sauc par funkcijas $f(x)$ maksimuma punktu, ja šim punktam eksistē tāda apkārtne, ka visām x vērtībām no šīs apkārtnes ir spēkā nevienādība $f(x) < f(x_0)$. (No RTU mācību materiāliem.) Nākamā tabulas veidā dotā definīcija ņemta no [SŠ, 166]

Funkcijas lokālā maksimuma punkts	Punkts x_0, ja šim punktam eksistē tāda apkārtne, ka visiem šīs apkārtnes punktiem $x \neq x_0$ ir $f(x) < f(x_0)$
Lokālais maksimums	$f_{max}(x_0)$

3) Mēģinājumi noskaidrot motivāciju noveda pie fundamentāla darba – 1952. g. izdotās enciklopēdijas [EEM3, 360]: *“Saka, ka funkcijai $f(x)$ pie $x = x_0$ ir maksimums, ja eksistē tāds nogrieznis $[p, q]$, kas punktu x_0 satur savā iekšienē (t. i., $p < x_0 < q$) un kas pats iekļaujas funkcijas definīcijas kopā, ka visiem x no $[p, q]$ izrādās $f(x) \leq f(x_0)$.*
Termins ekstrēms kalpo kā apvienojošs termins maksimumam un minimumam. Der pasvītrot, ka pēc pašas definīcijas tam punktam, kurā funkcijai ir ekstrēms, jāatrodas intervāla iekšienē, bet ne tā galapunktā. Tāds ierobežojums ir iekļauts ekstrēma definīcijā tādēļ, lai punktos, kuros ir ekstrēms, varētu lietot Fermā teorēmu. Tātad motivācija sašaurināt ekstrēma jēdzienu ir meklējama Fermā teorēmā, jo tā var nebūt lietojama intervāla galapunktos. Manuprāt, lietderīgāk sašaurināt nevis jēdzienu, bet vajadzības gadījumā precizēt tās vai citas teorēmas nosacījumus. Kāpēc, definējot ekstrēmus, pamatā jāņem tieši Fermā teorēma, ja ekstrēmu uzdevumu teorijā ne mazāk svarīga ir Veierštrāsa teorēma? Uz brīdi iedomāsimies, ka par trijstūriem būtu saucami tikai tie, kuriem spēkā Pitagora teorēma.

4) Pārlapojot vairākas mācību grāmatas, kas atrodamas LU bibliotēkā (Fizikas un matemātikas nodaļā), konstatēju, ka jau 1968. gadā, turklāt koledžām paredzētajā kursā “A programmed course in calculus” [Pcc], tiek lietotas tieši šādas definīcijas. Jāuzsver, ka šo mācību līdzekli ir sagatavojusi Amerikas matemātikas asociācijas Izglītības komiteja, iesaistot darbā plašu autoru kolektīvu. Iespēju definēt ekstrēmus ar nestingrās nevienādības palīdzību ir minējis jau slavenais angļu matemātiķis Hardi (1877-1947) savā “Tīrās matemātikas kursā” (1. izdevums publicēts 1908. g.): *Saka, ka funkcijai $\varphi(x)$ pie $x = \xi$ ir maksimums $\varphi(\xi)$, ja $\varphi(\xi)$ ir lielāks par jebkuru citu vērtību, ko $\varphi(x)$ pieņem tiešajā $x = \xi$ tuvumā, t. i., ja mēs varam atrast tādu x vērtību intervālu $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$, ka $\varphi(\xi) > \varphi(x)$, kad $\xi-\varepsilon < x < \xi$ un kad $\xi < x < \xi+\varepsilon$.* [Har, 229] Nākamajā lappusē autors atzīmē: *Maksimums, kā tas definēts augstāk, ir maksimums šā vārda stingrā nozīmē: $\varphi(\xi) > \varphi(x)$ visiem x, kas tuvi ξ. Mēs varētu pavājināt mūsu definīciju un prasīt tikai nevienādības $\varphi(\xi) \geq \varphi(x)$ izpildīšanos visiem x, kas tuvi ξ. Pie tādas definīcijas konstantai funkcijai būtu, piemēram, maksimums (un minimums) pie katras mainīgā vērtības.*

Arī itāļu matemātiķa Ernesto Čezaro (1895-1906) grāmatā [Čez, 264] dotā definīcija nozīmē nestingro minimumu:

Saka, ka $f(x)$ iet caur minimumu, kad $x = a$, jeb, ka $f(a)$ ir funkcijas minimums, ja neviena no $f(x)$ vērtībām skaitļa a apkārtnē nav mazāka par $f(a)$…Maksimumu un minimumu, kādi funkcijai ir dotajā intervālā sauc par funkcijas v i s l i e l ā k o u n v i s m a z ā k o v ē r t ī b u… Intervālā var būt vairāki maksimumi un minimumi un tikai viena vislielākā un vismazākā vērtība.

Ekstrēma definīcija ar nestingrās nevienādības palīdzību latviešu valodā izdotajā mācību literatūrā ir sastopama jau 1981. gadā: ”Punktu x_0, sauc par *funkcijas f minimuma punktu*, ja eksistē punkta x_0 tāda apkārtne, ka visiem x no šīs apkārtnes $f(x_0) \leq f(x)$.” [Aae, 77]. Atzīmēsim, ka šī mācību grāmata izdota A. Kolmogorova redakcijā.

Grāmatā [VG], kurā esot aplūkoti daudzi 4.- 8. klašu matemātikas kursā sastopami uzdevumi, nav dota funkcijas minimuma definīcija, toties ir dota minimizācijas uzdevuma definīcija: *Pieņemsim, ka $\forall \in U$ ir definēta funkcija $F\{u\}$ un uzdota tāda kopa C, ka $C \subset U$. Ar $F\{u\}$ minimizācijas uzdevumu kopā C sapratīsim sekojošo: atrast tādu $u^* \in C$, ka $F^* = F(u^*) = \min F(u), u \in C$, vai arī pārliecināties, ka tāds u^* neeksistē.*

2. nodaļa

1) Šajā grāmatā nav nedz atsauces uz Galileju, nedz vispār uz izmantoto literatūru. Grāmatā [Vig1, 197-199] ar diferenciālrēķinu palīdzību risināts šāds uzdevums: “No zenītieroča vertikāli augšup izlido lode ar ātrumu 196 m/sek. Pēc cik ilga laika tā sasniegs maksimālo augstumu?”

2) Fermā, iespējams, esot dzimis 1607. gadā. Sk. referatīvo žurnālu MR 2002i:01017. Barner Klaus “How old did Fermat become?”, *NTM (N. S.)* 9 (2001), no. 4, 209-228.

3. nodaļa

1) Jautājumu par plaknes sadalīšanu šūnās ir aplūkojis jau sengrieķu matemātiķis Papps (3. gs.). Sen izvirzīto pieņēmumu (*honeycomb conjecture*), ka plaknes sadalījumam regulāros sešstūros ir vismazākais perimetrs salīdzinājumā ar jebkuru citu sadalījumu vienāda laukuma apgabalos, 1999. gadā esot atrisinājis Tomass Heils, sk. http://www.sciencenews.org/sn_arc99/7_24_99/bob2.htm; http://xxx.lanl.gov/abs/math.MG/9906042/

4. nodaļa

1) Labāk – Košī nevienādība, sk. arī 9. nodaļas ievadu.

2) Recepte no [Ged, 63]. Tas ir kārtējais mācību līdzeklis, kurā pausts novecojis uzskats, ka intervāla galapunkti nevar būt ekstrēmu punkti, jo *tikai kritiskie punkti var būt par funkcijas ekstrēmu punktiem.* [Ged, 56]. *Funkcijas stacionāros punktus un tos definīcijas apgabala iekšējos punktus, kuros funkcija nav diferencējama, sauc par tās kritiskajiem punktiem.* Salīdziniet šo recepti ar mācību grāmatā [KRB, 304] doto!

3) Laukumu izsaka kvadrātfunkcija

$$S(r) = 2\pi\left(r^2 + rH(1-\frac{r}{R})\right),$$

kurai jāmeklē maksimums, ņemot vērā nosacījumu $0 \le r \le R$. Šeit r ir nezināmais cilindra rādiuss. Grāmatā [Smir, 138] uzdevuma risinājums, izmantojot 1. un 2. kārtas atvasinājumus, aizņem vienu lappusi. Daudz vienkāršāks un īsāks ir šāds risinājums. Parabola ekstrēmu sasniedz sakņu viduspunktā $r_0 = \dfrac{rH}{2(R-H)}$ vai intervāla $(0, R)$ galapunktos, t. i., max $S(r)$ = max $\{S(0); S(r_0); S(R)\}$. Salīdzinot trīs vērtības:

$$S(0) = 0,\ S(r_0) = \frac{\pi r H^2}{2(R-H)},\ S(R) = 2\pi R^2,$$

dabūjam, ka $\max S = S(r_0)$, ja $H > R$. Pretējā gadījumā, kad konusa augstums nav lielāks par tā pamata rādiusu, $\max S = S(R)$, kas nozīmē, ka cilindra pamats sakrīt ar konusa pamatu, un šādam deģenerētam cilindram augstums ir nulle.

6. nodaļa

1) Šī nevienādība uzdevumu krājumā [Si2, 21] nosaukta par Košī nevienādību (nenorādot pirmavotu). Līdzīgi tas darīts mācību līdzeklī [VR, 45]. Žurnālā *Математика в школе*, 2001, N9, 14. lpp., tā lietota gadījumā $n = 2$ un nosaukta par Eiklīda nevienādību.

2) Neliela apjoma grāmatā [Mil, 108] klasiskais ekstrēmu uzdevums par sijas izzāģēšanu no apaļa baļķa papildināts ar šādu informāciju (citos avotos es tādu nebiju sastapis). *Par cik kļūdās namdari, kuri izzāģējot siju no baļķa, rīkojas šādi: šķērsgriezuma diametru MN*

sadala trīs vienādās daļās, no dalījuma punktiem novelk perpendikulus un atzīmē to krustpunktus C un D ar riņķa līniju diametra pretējās pusēs. Pēc tam punktus C, N, D un M savieno ar taisnām līnijām un iegūst vajadzīgo šķēlumu ...Namdari nekļūdās!

3) Šāda veida uzdevums ir formulēts O. Ozola grāmatā [Oz, 160], diemžēl nekorekti: "Bezvāka rezervuara dibena laukums ir kvadrats ar malu *a* un tā tilpums ir *V*. Cik liels jāņem rezervuara augstums, lai rezervuara pagatavošanai būtu vajadzīgs vismazāk materiala?". Ja tiek uzdots kvadrāta malas garums *a*, tad "rezervuara" (paralēlskaldņa) augstums *h* nosakāms viennozīmīgi ($h = \frac{V}{a^2}$) un nav ekstrēmu uzdevuma kā tāda. Vēl agrāk uzdevums ir formulēts grāmatā [GL, 327], kur tā risināšanā, domājams, paredzēts lietot diferenciālrēķinus. Nosacījums, ka kaste ir 'vaļēja', no risināšanas viedokļa nav būtisks. Līdzīga uzdevuma par noslēgtu kasti atbilde būtu kubs.

4) Saistībā ar šo uzdevumu grāmatā [AMS, 96] piedāvātas vēl šādas nevienādības:

$$|p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2| \le 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)};$$
$$24Rr - 12r^2 \le a^2 + b^2 + c^2 \le 8R^2 + 4r^2;$$
$$6\sqrt{3}r \le a+b+c \le 4R + (6\sqrt{3}-8)r, \ (p \text{ – pusperimetrs}).$$

5) Nevienādība pazīstama ar nosaukumu *Nesbita nevienādība* (1903), sk, piemēram, http://en.wikipedia.org/wiki/Nesbitt's_inequality

8. nodaļa

1) Šo sofismu var atrast ne tikai darbā [Cib4], bet arī Daugavpils 1. vidusskolas 12. klases skolnieces Kristīnes Beinarovičas plaģiātā *Sofismi aritmētikā un algebrā. Radošais darbs matemātikā*, Daugavpils, 1998, 27 lpp., bet ne tajos 13 avotos, kas minēti šī "radošā" darba literatūras sarakstā.

2) Šis zemūdens akmeņiem bagātais uzdevums pirmoreiz publicēts 1994. gadā Latvijas Universitātes A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas izdevumā *Daudzskaldnis*, N3, pēc tam – sofismiem speciāli veltītajā darbā [Cib4].

9. nodaļa

1) Košī (*Augustin Cauchy*, 1789-1857), ļoti ražīgs franču matemātiķis, matemātiskās analīzes pamatlicējs, publicējis vairāk nekā 800 darbu. Buņakovskis (Буняковский Виктор Яковлевич, 1804-1889), krievu matemātiķis. Grāmatā "Matemātikas vēsture" [Ta, 121], kur dots cits Buņakovska miršanas gads, acīm redzot, ir ieviesusies drukas kļūda. Švarcs (*Carl Hermann Amandus Schwarz*, 1843-1921), vācu matemātiķis.

2) Formulējumā, šķiet, ir ieviesusies drukas kļūda. Apzīmējuma $|S^2|$ vietā vajadzētu būt $|S|^2$.

3) Nevienādības labajā pusē ieviesusies drukas kļūda, vajadzētu būt $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$.

4) Salīdziniet šo nevienādību ar 6. nodaļas 52. uzdevumā aplūkoto nevienādību.

5) Uzdevums par vislielākā paralēlskaldņa (pēc tilpuma) ievilkšanu elipsoīdā bez diferenciālrēķinu palīdzības ir risināts 1850. gadā izdotajā Ramčandras grāmatā "*Maksimumi un minimumi, risināti ar algebru*", sk. [Mus].

Literatūra

[A] Актершев С. П., *Задачи на максимум и минимум*, Санкт-Петербург, БХВ-Петербург, 2005, 188 с.

[Aae] Algebra un analīzes elementi, 9.-11. kl., Rīga, Zvaigzne, 1981, 352 lpp. (Mācību līdzeklis A. Kolmogorova redakcijā. Tulk. no krievu val.)

[AB] Andžāns A., Bērziņš A., *Latvijas atklāto matemātikas olimpiāžu uzdevumi un atrisinājumi*, Rīga, Zvaigzne ABC, 1998, 224 lpp.

[AMS] Andreescu T., Mushkarov O., Stoyanov L., *Geometric problems on maxima and minima*, Birkhäuser, Boston, 2006, 264 pp. (Based on original Bulgarian edition, *Ekstremalni zadachi v geometriata*, Narodna Prosveta, Sofia, 1989)

[AZ] Aigner M., Ziegler G. M., *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998, 200 pp.

[AZT] Andžāns A., Ziļicka T., Treilibs O., *Uzdevumi matemātikas olimpiādēs*, Rīga, Zvaigzne, 1977, 390 lpp.

[Bar] Barbeau E., *Mathematical fallacies, flaws, and flimflam*, The Mathematical Association of Amerika, Washington, 2000, 183 pp.

[Ber] Берман Г. Н., *Сборник задач по курсу математического анализа*, 20-ое изд., М., Наука, 1985, 384 с. (1. izdevums – 1947. g.)

[BB] Бородин А. И., Бугай А. С., *Биографический словарь деятелей в области математики*, Киев, Радянська школа, 1979, 608 с.

[BB1] Бэккенбах Э., Беллманн Р., *Введение в неравенства*, Москва, Мир, 1965, 166 с.

[BB2] Бэккенбах Э., Беллманн Р., *Неравенства*, Москва, Мир, 1965, 286 с.

[BM] Беляев Э. С., Монахов В. М., *Экстремальные задачи*, Москва, Просвещение, 1977, 64 с.

[BS] Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И., Мордкович А. Г., *Математика. Лекции, задачи, решения*, Изд. Альфа, Минск, 1994(?), 638 с.

[Cib1] Cibulis A., *Ekstrēmu uzdevumi, I daļa*, Rīga, Latvijas Universitāte, 2003, 104 lpp.

[Cib2] Cibulis A., *Ekstrēmu uzdevumi, II daļa*, Rīga, Latvijas Universitāte, 2006, 102 lpp.

[Cib3] Cibulis A., *Skaitlis e*, "Zvaigžņotā debess", 1996, Rudens, 51. - 54. lpp.

[Cib4] Cibulis A., *Vai vari atrast kļūdu? Sofismi*, "Trivium", *FORTECH*, 1997, N4, 31 lpp.

[Ciz] Cizarevičs J., *Diferenciālrēķini un integrālrēķini*, Latvijas valsts izdevniecība, Rīga, 1946, 548 lpp.

[Čez] Чезаро Э., *Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых.* Ч 1, Ленинград-Москва, ОНТИ, Главная ред. общетехнической литературы, 1936, 592 с. (1. izdevums krievu val. 1913. g.)

[Dev] Дэвенпорт Г., *Высшая арифметика*, Москва, Наука, 1965, 176 с.

[En] Engelsons J. *Optimizācijas metodes*, Rīga, LVU, 1985, 100 lpp.

[EEM3] *Энциклопедия элементарной математики, кн. III*, Москва-Ленинград, 1952, 560 с.

[EEM5] *Энциклопедия элементарной математики, кн. V*, Москва, Наука, 1966, 624 с.

[EV] *Энциклопедический словарь юного математика*, Москва, Педагогика, 1989, 352 с.

[Ged] Gedroics V., *Viena argumenta funkciju diferenciālrēķini*, DU izdevniecība "Saule", 2002, 100 lpp.

[Gur] Гурса Э., *Курс математического анализа Т1*, изд. 3, Москва-Ленинград, ОНТИ, 1936, 592 с. (Tulk. no fr. val.)

[GG] Gedroica V., Gedroics V., *Daži paņēmieni funkcijas ekstremālo vērtību atrašanā*, DPU Zinātniskie raksti, A5, DPU izdevniecība "Saule", 1997, 53.- 55. lpp.

[GK] Гюнтер Н. М., Кузьмин Р.О., *Сборник задач по высшей математике, том 1*, ГИТТЛ, Москва, 1957, 282 с. (1. izd. 1912. g.)

[GKo] Grīnglazs L., Kopitovs J., *Augstākā matemātika ekonomistiem*, Rīga, RSEBBA, 2003, 380 lpp.

[GL] Грэнвиль В., Лузин Н., *Курс диференциального и интегрального исчисления, часть 1*, Москва-Ленинград, ГТТИ, 1933, 586 с. (12. izdevums.)

[GLS] Goldstein L., Lay D., Schneider D., *Calculus and its applications*, Englewood Cliffs (N.J.), Prentice-Hall, 1987, 4th edition, 644 p. (1. izdevums 1977. g.)

[GT] Галеев Э. М., Тихомиров В. М., *Краткий курс теории экстремальных задач*, Издат. Московск. университета, 1989, 206 с.

[H] Hancock H., Theory of maxima and minima, Ginn and Company, Proprietors, Boston, U.S.A., 1917, 216 p. http://2020ok.com/227380.htm

[Har] Харди Г. Х., *Курс чистой математики*, Москва, ИЛ, 1949, 512 с. (1. izdevums angļu val. 1908. g.)

[Hur] Hurley J. F., *Calculus*, USA, Wadsworth Publish. comp., 1987.

[HLP] Харди Г. Г., Литллвуд Д. Е., Полиа Г., *Неравенства*, Москва, ИЛ, 1948 (1932), 456 с.

[Ke] Кембровский Г., *Экстремумы в задачах по физике*, Квант, 1993, N.3/4, 59-62 с.

[Ko] Кокстер Г. С. М., *Введение в геометрию*, Москва, Наука, 1966, 648 с.

[Ku] Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа Т1*, М., Высшая школа, 1981, 688 с.

[Kr] Крыжановский Д. А., *Изопериметры*, Физматгиз, 1959, 116 с.

[Kur] Курант Р., *Курс диференциального и интегрального исчисления*, том 1, изд. 4, Москва, Наука, 1967, 704 с. (vācu val. iznākusi 1927. g.)

[KR] Курант Р., Роббинс Г., *Что такое математика?*, Москва, Просвещение, 1967, 558 с.

[KRB] Kronbergs E., Rivža P., Bože D., *Augstākā matemātika 1. daļa*, Rīga, Zvaigzne, 1988, 534 lpp.

[KŠ] Калинин С. И., Шилова З. В., *К вопросу о геометрической иллюстрации средних величин*, Математика в школе, 2001, N9, 70-73.

[KUK] *Konkursa uzdevumu krājums algebrā, ģeometrijā un trigonometrijā*, Rīga, LVU, 1960, 218 lpp.

[KZZ] Kriķis D., Zariņš P., Ziobrovskis V., *Diferencēti uzdevumi matemātikā, 1. daļa*, Rīga, Zvaigzne ABC, 1991 (1. izdevums), 368 lpp.

[Lau] Lausch H., *Herman Amandus Schwarz: the sesquicentennial of his birth*, Mathematics and Informatics Quarterly, 1993, v.3, no.1, 18-21.

[Lei] Leimanis E., *Ievads augstākā matemātikā, I daļa. Diferenciālrēķini*, Rīgā, 1943, Univ. Studentu padomes grāmatnīca, 130 lpp.

[Liu] Chinese Mathematics Competitions and Olympiads, 1981- 1993, ed. A. Liu, Australian Mathematics Trust, 1998, 194 pp.

[Luz] Лузин Н. Н., *Дифференциальное исчисление*, изд. 6, Москва, Советская Наука, 1958, 473 с.

[LM] Lial M., Miller C., *Finite mathematics and calculus with applications, 3rd ed.*, USA, Scott, Foresman and Company, 1989.

[Mar] Марон И. А., *Диференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах*, Москва, Наука, 1970, 400 с.

[Mil] Милованова Л. Н., *Функции и их исследование*,
Москва, Изд . Академии пед. наук РСФСР, 1958, 124 с.
[Min] Минорский В. П., *Сборник задач по высшей математике*,
Москва, Физматгиз, 1959, 360 с. (5. izdevums.)
[Mir] Миракян Г. М., *Прямой круговой цилиндр*,
ГИТТЛ, Москва,1955, 40 с.
[Miš] Miškis A., *Augstākā matemātika*, Rīga, Zvaigzne, 1968, 621 lpp.
[Mus] Muses C., *De Morgan's Ramanujan: An incident in recovering our endangered cultural memory of mathematics*,
The Mathematical Intelligencer, 1998, v.20, no.3, 47-51.
[Nag] Нагибин Ф. Ф., *Экстремумы*, Москва, Просвещение, 1969, 120 с.
[Nat] Натансон И. П., *Простейшие задачи на максимум и минимум*,
ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1952, 32 с.
[Nav] Navoičika J., *Elementāri risināmi ekstrēmu uzdevumi dabaszinātnēs*,
maģistra darbs, Rīga, 2007, 84 lp.
[Nev] Невяжский Г.Л., *Неравенства. Пособие для учителей*,
Учпедгиз, Москва,1947, 204 с.
[Niv] Niven I. *Maxima and Minima Without Calculus*,
Dolciani Mathematical Expositions, Math. Assoc. of America, No. 6, 1981, 303 pp.
[Oz] Ozols O., *Ievads augstākā matemātikā*,
Latvijas valsts izdevniecība, Rīga, 1947, 326 lpp.
[Pet] Петров С. М., *Конус максимального объема в природе*,
Квант, 1972, N4, 28-29 с.
[Pcc] *A Programed Course in Calculus I. Functions, Limits, and the Derivative*,
W. A. Benjamin, Inc, New York, Amsterdam, 1968, 295 pp.
[REM] *Rokasgrāmata elementārajā matemātikā*, Rīga, Zvaigzne, 1982, 512 lpp.
[RPGB] Revina I., Peļņa M., Gulbe M., Bāliņa S., *Matemātika ekonomistiem*,
SIA Izglītības soļi, LU, Rīga, 2003, 306 lpp.
[Si1] Сивашинский И. Х., *Задачник по элементарной математике*,
Москва, Наука, 1966, 512 с.
[Si2] Сивашинский И. Х., *Неравенства в задачах*,
Москва, Наука, 1967, 304 с.
[Sm1] Смышляев В. К., *О математике и математиках*,
Йошкар-Ола, Марийское книжное издательство, 1977, 224 с.
[Sm2] Смышляев В. К., *Применение неравенства Буняковского-Коши к решению некоторых задач*, Квант, 1972, N^{o}1, 33-35.
[Smir] Smirnovs V. L., Augstākās matemātikas kurss, 1. sēj., LVI, Rīga, 1952, 468 lpp.
(Смирнов В. И., *Курс высшей математики, T1*, 1933, изд. 6, 442 с., 1. izd. 1923. g.)
[SMO] *Международные математические олимпиады*,
Москва, Дрофа, 1998, 160 с.
[SŠ] Siliņa B., Šteiners K., *Rokasgrāmata matemātikā*,
Rīga, Zvaigzne ABC, 2006, 368 lpp.
[Š1] Šteiners K., *Matemātiskās analīzes elementi*, Rīga, Zvaigzne, 1993, 320 lpp.
[Š2] Šteiners K., *Augstākā matemātika III. Lekciju konspekts inženierzinātņu un dabaszinātņu studentiem*, Rīga, Zvaigzne ABC, 1998, 192 lpp.
[ŠČJ] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., *Геомерические неравенства и задачи на максимум и минимум*, Москва, Наука, 1970, 336 с.
[T] Тихомиров В. М., *Рассказы о максимумах и минимумах*,
Москва, Наука, 1986, 190 с.
[Ta] Taimiņa D., *Matemātikas vēsture*, Rīga, Zvaigzne, 1990, 200 lpp.

[Tok] Tokarenko A., *Uzdevumu krājums augstākā matemātikā ekonomistiem, 2. d.*, Rīga, Ekonomikas un kultūras augstskola, 2004, 120 lpp.
[Val] Валле-Пуссен Ш. Ж., *Курс анализа бесконечно малых*, ГТТИ, 1933, 464 c. (Tulk. no fr. 3. izdevuma, 1912)
[Vig1] Выгодский М. Я., *Основы исчисления бесконечно-малых*, изд. 2, Москва-Ленинград, ГТТИ, 1932, 456 c.
[Vig2] Vigodskis M., Augstākās matemātikas rokasgrāmata, Rīga, Liesma, 1968, 948 lpp. (Tulk. no krievu val.)
[Vil] *Задачник по курсу математического анализа*, *ч.1*, под ред. Н. Я.Виленкина, Москва, Просвещение, 1971, 350 c.
[Vin] Vinogradovs S. P., *Augstākā matemātika. Īss kurss*. (Pārstrādājis B. V. Kutuzovs), LVI, 1947, 416 lpp.
[VG] Возняк Г. М., Гусев В. А., *Прикладаные задачи на экстремумы*, Москва, Просвещение, 1985, 144 c.
[VJ] Васильев Н. Б., Егоров А. А., *Задачи всесоюзных математических олимпиад*, Москва, Наука, 1988, 288 c.
[VR] Vasiļevska A., Ramāna L., *Ekstrēmu uzdevumu risināšanas metodes*, Rīga, LU, 1997, 66 lpp.
[Zet] Зетель С. И., *Задачи на максимум и минимум*, Москва-Ленинград, ГИТТЛ, 1948, 224 c.
[Zor] Зорич В.А., *Математический анализ часть 1*, Москва, Наука,1981, 544 c.
[ZS] Ziobrovskis V., Siliņa B., *Algebra vidusskolai, 1. daļa*, Rīga, Zvaigzne ABC, 1999, 344 lpp.

Sērija „LAIMA” matemātikā

Redakcijas padome: A. Andžāns, B. Johannessons, L. Ramāna, F. Bjernsdottira, A. Cibulis
Mākslinieciskā noformētāja: L. Kalniņa

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

Sērijas „LAIMA” grāmatas

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-9. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999.-2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības**

4. –9. klasēm. Rīga: LU, 2006.

19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1997. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. -9. klases.** Rīga: Turība, 2007.
23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa.** 2. izdevums. Rīga: Mācību grāmata, 2007.