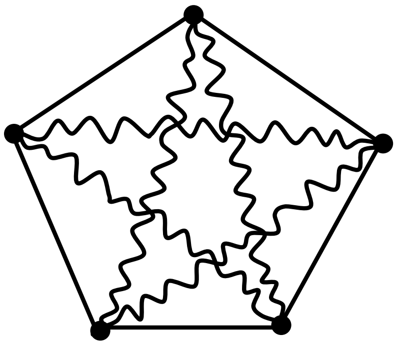
K.Čerāns

KAS IR MATEMĀTISKS PIERĀDĪJUMS?

1. daļa



Rīga 2009

UDK 51(075)
Če 581

K.Čerāns. ***Kas ir matemātisks pierādījums? 1. daļa.***
(2. izdevums)
Rīga: Latvijas Universitāte, 2009. – 78 lpp.

Grāmatas pamattēma – nostiprināt un precizēt intuitīvo priekšstatu par loģiski stingriem spriedumiem. Darbs izstrādāts LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skolā ar IZM atbalstu.

Darbs iekļauts Latvijas – Īslandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

ISBN 978-9984-45-128-2

SATURS

„Ja ir kāds, kam par kaut ko kaut kas zināms, – lācītis sprieda, –tad tā ir Pūce, jo viņa zina visu ko par visu ko, vai arī mani nesauc Vinnijs Pūks. Un, tā kā mani sauc Vinnijs Pūks, – viņš piebilda, – tad tā lieta ir skaidra.”

A.Milns „Vinnijs Pūks un viņa draugi”

IEVADS

1. KAS IR MATEMĀTIKA UN KĀPĒC CILVĒKI AR TO NODARBOJAS

Pierādījums matemātikā var tikt uzlūkots kā vienīgais līdzeklis dažādu matemātiska satura apgalvojumu pareizības pamatošanai.

Tomēr šāds pierādījuma jēdziena paskaidrojums nedod iekšēju apmierinātības izjūtu – paliek neskaidrs, kas tad īsti slēpjas aiz vārdiem „matemātiska satura apgalvojums" (kā, piemēram, atšķirt matemātiska satura apgalvojumus no, teiksim, fizikāliem apgalvojumiem: kā noteikt, vai apgalvojums „zaķis nevar ieskriet mežā dziļāk kā līdz vidum" ir vai nav matemātisks). Izrādās, ka šī neskaidrība ir būtiska – tieši matemātikas uzdevumu specifika nosaka pierādījuma lomu to risinājumā, kā arī metodes, kādas mēs drīkstam lietot matemātiskā pierādījumā. Kādas tad ir iezīmes, kas matemātiku atšķir no citām zinātnes nozarēm?

Matemātika – zinātne par sakarībām

Var ievērot, ka skolā matemātikas uzdevums bieži ir noformulēts tā, ka tajā ir kaut kādi doti lielumi un kādi nezināmi lielumi, kuru vērtības jāatrod, izejot no dotajiem lielumiem. Ilustrēsim šo ideju vispirms ar vienkāršu uzdevumu (atrisiniet to!).

„Zināms, ka no pilsētas A līdz pilsētai B pa dzelzceļu ir 120 km. Plkst. 9.00 no rīta no pilsētas A uz pilsētu B izbrauca pasažieru vilciens ar ātrumu 60 km/h, bet tam pretī no pilsētas B izbrauca preču vilciens ar ātrumu 40 km/h. Noteikt, kādā attālumā no pilsētas B šie vilcieni satiksies."

Šajā uzdevumā nav grūti izšķirt, kas ir dotie, kas – nezināmie lielumi. Tiešām, mēs tiekam nostādīti tādā situācijā, kad kāds jau ir papūlējies izmērīt attālumu starp pilsētām A un B (120 km), bez tam mums tiek pateikts arī, kurā virzienā un cikos sāk braukt katrs no vilcieniem, kā arī tas, cik ātri katrs no viņiem brauc. Mūsu kā matemātiķu uzdevums ir (tikai!?) atrast šo vilcienu satikšanās vietu. Matemātikā vispār nekad nav jāizdara dažādi mērījumi dabā un eksperimenti ar reāliem priekšmetiem, matemātiska uzdevuma nostādne jau ietver sevī visus vajadzīgos mērījumus kā izdarītus.

Ievērosim, ka šajā konkrētajā uzdevumā atrast meklējamo lielumu nebija grūti: tas ir tāpēc, ka mums labi zināmas **sakarības**, kas saista tajā dotos lielumus ar meklējamo. Uzdevuma atrisināšanai bija vajadzīgas tikai šīs vienkāršās sakarības un nekas vairāk. Uzdevuma risinājums ir arī pilnīgi neatkarīgs no tā, tieši kuras pilsētas ir apzīmētas ar burtiem A un B; rezultāts, kas ir iegūts, ir viens un tas pats visiem gadījumiem. Vēl vairāk, lai atrisinātu šo uzdevumu, mums nav nekādas nepieciešamības pārliecināties, ka šādas pilsētas A un B tiešam kaut kur ir un ka kādurīt vilcieni no vienas pilsētas uz otru tiešām ar tādiem ātrumiem ir braukuši viens otram pretī. Nedz vilcieni, nedz arī pašas pilsētas mūsu risinājumam nav vajadzīgi, to var vispār nebūt. Tā ir ārkārtīgi būtiska iezīme matemātikas uzdevumos: matemātika pēta, **kas notiktu, ja izpildītos** zināmi nosacījumi (piem., attālums starp pilsētām ir ..., vilciena ātrums ir ..., utt.), un dod savu slēdzienu par to; tajā pašā laikā jautājums to, vai šādi nosacījumi **faktiski izpildās** konkrētajā reālajā situācijā, tiek noskaidrots, lietojot dažādas nematemātiskas metodes (tas, protams, attiecas ne tikai uz gadījumu ar pilsētām un vilcieniem, kas šeit ņemts piemēra pēc).

Ilustrējot matemātiku kā zinātni par sakarībām, aplūkosim vēl vienu piemēru:

„Atrisināt vienādojumu $x+17=59-2x$."

Šajā uzdevumā dotais ir pats vienādojums, bet kā atbildi no mums prasa uzrādīt visas tās x vērtības, kas apmierina šo vienādojumu (šoreiz gan tā būs tikai viena, bet, ja vienādojums būtu sarežģītāks, tad tādas varētu būt vairākas).

Lai atrisinātu šo vienādojumu, mēs atkal izmantojam **sakarību** (šoreiz tādu, kas savā starpā saista lineārus vienādojumus ar 1 nezināmo un to atrisinājumus). Vienādojums ir **dots**, mēs neinteresējamies par to, no kurienes un kādā veidā tas pie mums nonācis. Mūsu kā matemātiķu uzdevums sākas ar to brīdi, kad vienādojums jau ir mūsu priekšā. Der ievērot, ka vienādojuma risināšanas metodes (kā arī matemātiska uzdevuma risināšanas metodes vispār) nav atkarīgas no tā, no kurienes šis vienādojums (uzdevums) radies – vienalga, vai tas apraksta kādu fizikālu procesu, vai arī, piemēram, pircēja – pārdevēja attiecības tirgū vai veikalā;

tikpat labi vienādojumu kāds varēja uzrakstīt, savas iekšējās zinātkāres vai vēl kādu citu apsvērumu vadīts.

Tāpat kā uzdevumi, arī sakarības matemātikā var būt ļoti dažāds. Ir daudz tādu sakarību, par kuru esamību Jūs pašreiz nevarat pat iedomāties, ir arī ļoti daudz tādu uzdevumu, kuru risināšanai vēl neviens pasaulē nav atradis vajadzīgo sakarību. Bet tieši tas lielā mērā nosaka matemātikas kā zinātnes par sakarībām skaistumu.

Kāpēc cilvēki pēta sakarības

No sakarībām sastāv visa mūsu dzīve. Var pat teikt, ka visa pasaule ir viena ārkārtīgi liela un daudzpusīga sakarība. Droši vien tādu sarežģītu sistēmu, kāda ir pasaule mums visapkārt un kāda tā ir katrā no mums, mēs visā pilnībā līdz galam tā arī nekad neizzināsim, taču cilvēka prāta centieni izprast jaunas un jaunas vispārējā kopsakara puses ir viens no galvenajiem faktoriem ,kas cilvēkam ļāvis izveidoties par tādu apzinīgu būtni, kāds tas ir šodien.

Mazliet ilustrējot šo domu, paskatīsimies, kas notiek, ja mums apkārt esošā daba apzināti ļaunprātīgi vai arī aiz nolaidības vai nezināšanas netiek uzlūkota visā tās sakarību bagātībā.

Kad Austrāliju atklāja eiropieši, šajā kontinentā nebija trušu. Trušus uz Austrāliju atveda 18. gadsimta beigās, un, tā kā tur nebija plēsoņu, kas iznīcina trušus, tad šo grauzēju vairošanās risinājās neparasti ātrā tempā. Drīz vien milzīgi trušu bari pārplūdināja visu Austrāliju, nodarīdami ārkārtīgi lielus zaudējumus lauksaimniecībai un pārvērzdamies par īstu nelaimi. (Situācijas apraksts ņemts no J.Perelmaņa grāmatas „Dzīvā matemātika”.)

Ir ārkārtīgi viegli izjaukt līdzsvaru dabā, bet tagad, kad tas jau izdarīts pietiekoši dziļi, ir daudz grūtāk „aizlāpīt” radušās sekas, un ar daudz ko vēl pagaidām nezināmu mums nāksies sastapties turpmāk.

Matemātisko sakarību abstraktums un vispārīgums

Kā jau iepriekš redzējām, matemātiskās sakarības attiecas nevis uz kādu konkrētu situāciju reālajā dzīvē, bet gan uz kādu **cilvēku iztēles radītu** situāciju, kurai tieša analoga reālajā pasaulē varbūt nemaz nav. Sakarības matemātikā atšķiras no sakarībām reālajā dzīvē vēl arī tāpēc, ka matemātikā tās saista dažādus speciāla veida izdomātus objektus – skaitļus, ģeometriskas figūras, vienādojumus, funkcijas utml., kurus apkārtējā realitātē tieši uzrādīt nevar (ja neticat, tad padomājiet, piem., kurā vietā Jūsu istabā atrodas **skaitlis 17** (pats skaitlis, bet nevis tā pieraksts ar cipariem desmitnieku skaitīšanas sistēmā; tas nu nekādi nav viens un tas pats, tāpat kā atšķiras dārzenis gurķis no vārda „gurķis").

Ko cilvēki iegūst no šādu abstraktu sakarību pētīšanas un kāpēc tās vispār ir atzītas par uzmanības vērtām? Aplūkosim dažus vienkāršus piemērus.

Mēs visi labi zinām, ka $7-3=4$. Tā ir kaut kāda sakarība starp cilvēku izdomātiem tēliem, kurus tie sauc par skaitļiem. Tomēr ir pamats uzskatīt, ka tieši šī abstraktā (t.i. ar konkrētiem priekšmetiem nesaistītā) sakarība **izsaka** to reālās apkārtējās pasaules īpašību, ka tas objektu daudzums, kas jāpievieno pie 3 kaut kāda veida objektiem, lai iegūtu 7 tādus pašu objektus, ir 4, neatkarīgi no tā, vai par šiem objektiem mēs ņemam ābolus, automašīnas, zīmuļus, spēļu lācīšus vai arī vēl pavisam ko citu. Tādējādi jau šī pavisam vienkāršā sakarība mums par pasauli pastāsta fantastiski daudz! Mēs varam iet vēl tālāk un aplūkot, piemēram, naturālu skaitļu saskaitīšanas komutativitātes īpašību: „katriem diviem naturāliem skaitļiem a un b pastāv vienādība $a+b=b+a$". Starp daudz ko citu tā izsaka **būtību** apgalvojumam „ja es paņemtu 58557 ābolus un pēc tam vēl 42693 ābolus, tad man beigās būtu tikpat daudz ābolu, kā gadījumā, ja es sākumā būtu paņēmis 42693 ābolus, bet pēc tam 58557 ābolus". Mēs nešaubāmies par šī konkrētā apgalvojuma patiesumu, kaut arī neviens no mums to nav pārbaudījis (jeb varbūt kādam ir vēlēšanās pamēģināt?). Nešaubāmies tāpēc, ka zinām iepriekš minēto matemātikas likumu (un **ticam** šim likumam), ka naturālo skaitļu saskaitīšana ir komutatīva. Nešaubāmies, neskatoties uz to, ka āboli nebūt nav tas pats, kas skaitļi!

Padomājiet arī par to, kāda milzīga cilvēces uzkrātā pieredze slēpjas aiz ārēji ļoti vienkārša un pašsaprotama matemātiska apgalvojuma, kas izsaka reizināšanas distributīvo īpašību: „Katriem trim naturāliem skaitļiem a, b un c ir spēkā vienādība $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$"! Vai Jums nav nācies to bieži lietot savā darbībā?

Saprotams, ka skaitlis nav vienīgais jēdziens matemātikā, kā arī saprotams, ka matemātiskās sakarībās atspoguļojas ne tikai situācijas, kurās ir jānodarbojas ar atsevišķu priekšmetu skaitīšanu. Cilvēks ir izgudrojis tādus objektus kā punkts (arī taisne, plakne u.c. ģeometrijas jēdzieni), koordinātu sistēma, funkcija un vēl daudzus citus. Pētot šos sava prāta izveidotos objektus (piem. punkts taču reāli apkārtējā pasaulē nekur nepastāv, kur nu vēl funkcija!), izrādās, ka cilvēks spēj ārkārtīgi daudz ko nozīmīgu uzzināt par reālo pasauli sev apkārt. Līdzīgi kā naturālie skaitļi atspoguļo dažādu skaitāmu priekšmetu īpašības, punkti Eiklīda ģeometrijas aksiomu sistēmā pietiekoši labi atspoguļo dažādo „gandrīz punktu" īpašības reālajā dzīvē. Piemēram, runājot par planētu kustību ap sauli, ir ārkārtīgi izdevīgi uzskatīt, ka gan planētas, gan Saule ir punkti, t.i. reālās situācijas vietā pētīt situāciju, kad viens abstrakts objekts – punkts riņķo ap citu abstraktu objektu – arī punktu. Rezultāti, kas iegūti no pētījuma abstraktajā sistēmā, kā izrādās, bieži vien ir pietiekoši atbilstoši tiem rezultātiem, kas tiek eksperimentāli novēroti reālajā sistēmā (bet, kā jau iepriekš vienojāmies, **matemātiķa kompetencē ietilpst tikai darbs ar abstrakto sistēmu**).

Varam teikt, ka matemātika pēta skaitļu, punktu un citu objektu īpašības atrauti no tā satura, kam šie objekti atbilst reālā dzīvē. Tā, piemēram, izsakot dažādus apgalvojumus par skaitļiem, mēs ne vienmēr iedomājamies asociēt ar tiem atbilstošas ābolu kaudzītes. Tas būtu pat ļoti neloģiski, jo skaitļu īpašības, pārtulkotas „ābolu terminos", ne vienmēr iznāk pildītas ar zināmu saturīgu informāciju. Matemātika kā zinātne ir ļoti interesanta un arī absolūti nepieciešama, jo sakarības starp matemātikas jēdzieniem atspoguļo sakarības starp objektiem reālā dzīvē, turklāt matemātika ir vienīgais līdz šim zināmais līdzeklis, kā pētīt vispārīgas sakarības, t.i. tādas sakarības, kas attiecas reizē uz ļoti daudzām situācijām.

2. KAS IR PIERĀDĪJUMS UN KĀPĒC TAS VAJADZĪGS

Ikdienā mēs no apkārtējās pasaules uztveram dažādu informāciju un uz tās bāzes pieņemam dažādus lēmumus. Kā gan mums gribētos, lai uz visiem šiem jautājumiem, kurus mēs sev uzstādām, mēs iegūtu pareizas atbildes! Nepareizai atbildei, ar kuru mēs saskaņojam savu tālāko rīcību, var būt vairāk vai mazāk smagas sekas, reizēm tās var izrādīties pat visai postošas.

Kā mēs cenšamies pārliecināties par savas atbildes pareizību? Mēs meklējam šai atbildei **pamatojumu** – izdarām dažādus novērojumus un spriedumus, kas varētu liecināt par vai pret tās pareizību. Šāds pamatojums, kuram mēs uzticamies, tad arī kalpo par **garantijām** atbildes pareizībai. **Ja mēs rīkosimies saskaņā ar pamatotu atbildi, mēs nekļūdīsimies** (ja vien pamatojums pats nebūs kļūdains).

Līdzīgi kā ikdienas dzīvē, arī matemātikā nepieciešams izdarītos spriedumus un apgalvojumus pamatot. Matemātikā noteikta apgalvojuma pareizības pamatojumu sauc par **pierādījumu**.

Vispārīgāk sakot – **pierādījums ir pamatojums, ka Jūsu izvēlētā atbilde ir pareiza**.

No vienas puses, mēs šajā vietā varētu brošūru pabeigt, jo mēs tagad zinām, kas ir pierādījums un kam tas ir domāts. Tomēr šāds slēdziens ir maldinošs, jo mēs vēl neko nezinām par to, **kādus līdzekļus un metodes drīkst un kādas nedrīkst lietot matemātiskas dabas apgalvojumu pareizības pamatošanā**. Tieši šī jautājuma detalizētai analīzei pamatā veltīta šī brošūra.

3. KAS IR PIERĀDĪJUMS MATEMĀTIKĀ UN KO SAUC PAR PIERĀDĪJUMU CITĀS ZINĀTNĒS

Saprast šo atšķirību ir ļoti būtiski. Tā izriet no matemātisko sakarību vispārīgās dabas.

Ikdienā mēs savus pieņemamos lēmumus pamatojam ar dažādām metodēm. Bieži šis pamatojums balstās pat vairāk uz konkrētā momenta emocijām nekā uz noteiktu faktu un iespēju analīzi.

Matemātikā, tāpat kā jebkurā citā zinātnē, no personiskajām emocijām vien nekāda apgalvojuma vai sprieduma pareizību pamatot nevar – zinātnes mērķis ir **izstrādāt noteiktu jēdzienu un faktu sistēmu**, kas būtu pēc iespējas universāla, t.i. derīga iespējami plašākam situāciju lokam. Ko gan tad var dot tādi spriedumi, kas man šodien šķiet patiesi, bet rīt vai pēc nedēļas, mainoties garastāvoklim, vairs nē? Ko patiesības izzināšanas ainā dod spriedumi, kas vienam cilvēkam šķiet patiesi, bet kurus otrs uzskata par pilnībā aplamiem?

Tomēr pierādījumi matemātikā atšķiras arī no pierādījumiem citās zinātnēs (piem., fizikā vai sabiedriskās zinātnēs).

Matemātikā ir zināms precīzs kritērijs tam, kādi spriedumi ir un kādi nav pieļaujami dažādu apgalvojumu pamatošanā – matemātisks pierādījums ir **loģiski stingru secinājumu virkne**, kas ved no dotajiem apgalvojumiem uz pierādāmo, neatkarīgi no tā, kāds ir šo apgalvojumu saturs un ietekme uz mūsu dzīvi.

Kādi spriedumi ir un kādi nav loģiski stingri – to katrs intuitīvā nozīmē saprot. Mūsu brošūras uzdevums ir palīdzēt precizēt šo priekšstatu, lai vēlāk varētu loģiski precīzi veidot uzdevumu risinājumus. Bet jau ar šo intuitīvo priekšstatu pietiek, lai saprastu, ka tikai slikts matemātiķis, pārbaudījis pirmos 99 naturālos skaitļus, un ievērojis, ka visi tie mazāki par 100, var secināt, ka **visi naturālie skaitļi** mazāki par 100.

Mēdz gan jokot: fiziķis tic, ka 60 dalās ar visiem naturālajiem skaitļiem, ja pārbaudījis, ka tas dalās ar 1, 2, 3, 4, 5, 6, kā arī dažiem, kā viņš saka „nejauši ņemtiem" skaitļiem 10, 20, 30. Savukārt inženieris spējīgs eksperimentāli konstatēt, ka visi nepāra skaitļi ir pirmskaitļi: novienosimies 1 uzskatīt par pirmskaitli, tad nāk 3, 5, 7 – neapšaubāmi pirmskaitļi. Pēc tam nāk 9 – skumjš gadījums, 9 droši vien nav pirmskaitlis. Bet 11 un 13 , protams ir pirmskaitļi. Atgriezīsimies pie 9 – es secinu, ka tai jābūt eksperimenta kļūdai.

Matemātisks pierādījums, protams, var ietvert sevī dažādu gadījumu pārlasi. Jāievēro tikai viens nosacījums –gadījumu pārlasei jābūt **pilnīgai**. Jāaplūko **visi iespējamie** gadījumi (atšķirībā no „pierādījuma" tikko aplūkotajā piemērā). Viegli redzēt, ka principā nav iespējams pārbaudīt citu aiz cita bezgalīgu daudzumu dažādu gadījumu, šādās situācijās acīmredzot jāmeklē citādas spriešanas metodes.

Pretstatā pierādījumam matemātikā kā loģiski stingrai secinājumu virknei **fizikā** par pierādījumu sauc kādas izvirzītas hipotēzes eksperimentālu apstiprināšanu; pie tam jāņem vērā, ka hipotēze, kas apstiprinājusies dažos eksperimentos, var neapstiprināties citos eksperimentos citā, iepriekš neredzētā situācijā. Šī iemesla dēļ pierādījums fizikā nav uzskatāms par loģiski stingru un neapgāžamu.

Vēl brīvāk vārds „pierādījums" tiek lietots t.s. **sabiedriskajās zinātnēs** (vēsture, filozofija u.tml.). Par kāda izteikuma pierādījumu šeit nereti tiek saukts šī izteikuma autora subjektīvais viedoklis, kāpēc viņam šis izteikums šķiet patiess. Apgalvojumi, kas skaitās patiesi vienas politiskās sistēmas apstākļos, var tikt nosaukti par pilnīgi aplamiem un antizinātniskiem, valdot citai politiskai sistēmai.

Pamēģināsim saprast, kādēļ rodas šādas atšķirības. Kā jau noskaidrojām, matemātika pēta sev specifiskus objektus (skaitlis, punkts, kopa u.tml.), kuru īpašības tā pati nodefinē (ar aksiomām vai kā citādi). Jaunu sakarību starp jēdzieniem ieguves avots matemātikā ir loģisks spriedums (kā gan lai citādi droši uzzina, kādas sakarības pastāv starp abstraktiem objektiem). Fizika, savukārt, pēta apkārtējo pasauli, tajā jaunas zināšanas tiek iegūtas ar dažādu novērojumu un eksperimentu palīdzību. Pašas fizikālās zināšanas satur sevī apgalvojumus par to, kādas īpašības piemīt un kādas nepiemīt mums apkārtējai **reāli eksistējošai** matērijai. Tādēļ arī ir pilnīgi normāla parādība, ka dažādu fizikāla satura apgalvojumu patiesums ir nosacīts ar mūsu patreiz novērojumu rezultātā sasniegto zināšanu līmeni par apkārtējo dabu, kamēr matemātikā apgalvojums, kas vienreiz pierādīts, vairs nevar laika gaitā kļūt nepatiess.

Salīdzinot matemātiku ar sabiedriskajām zinātnēm, redzam, ka sabiedriskajās zinātnēs pieņemts plaši operēt ar jēdzieniem, kam nav dota stingra definīcija. Atšķirībā no matemātikas, sabiedriskajās zinātnēs katrs cilvēks var vienu vai otru jēdzienu izprast kaut kādā zināmā mērā personiski. Tādēļ ir pilnīgi skaidrs, ka sabiedriskajās zinātnēs **nav iespējams** izdarīt no matemātiskā viedokļa loģiski stingrus spriedumus. Bez tam jāņem vērā, ka apgalvojumi, kas tiek izteikti sabiedriskajās zinātnēs, kā likums, neapgalvo neko, kam būtu jāizpildās pilnīgi visās situācijās, bet drīzāk nosaka vadlīnijas, kā vienam vai otram procesam vajadzētu notikt lielākajā daļā gadījumu. Matemātiķim, savukārt, jāspēj argumentēt, ka viņa izteiktais apgalvojums ir pareizs **pilnīgi visos** gadījumos; pretējā gadījumā šis apgalvojums nav uzskatāms par pierādītu.

Pāriesim tagad pie šīs brošūras pamattēmas – nostiprināsim un precizēsim intuitīvo priekšstatu par loģiski stingriem spriedumiem.

§1. PIERĀDĪJUMS – LOĢISKU SECINĀJUMU VIRKNE

Aplūkosim vispirms sekojošu uzdevumu:

1. piemērs.

Dots, ka a, b un c – reāli skaitļi, kam spēkā $a+b+c=0$. *Pierādīt, ka* $ab+ac+bc\le 0$.

Redzam, ka uzdevuma formulējums sastāv no 2 daļām. Viena daļa satur apgalvojumu, kas ir dots jeb zināms, tas ir, faktus, uz ko mēs varam balstīties savos tālākajos spriedumos; otra daļa satur apgalvojumu, kas jāiegūst pierādījuma rezultātā. Mūsu uzdevums ir izveidot tādu secinājumu virkni, kurā katrs apgalvojums balstītos uz kādu jau iepriekš iegūtu apgalvojumu un kas galarezultātā dotu pierādāmo apgalvojumu. To var izdarīt, piemēram, šādi:

Risinājums.

Tā kā $a+b+c=0$, tad $(a+b+c)^2=0$, t.i.

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=0$$

jeb, kas ir tas pats, $a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=0$,

$$\text{jeb } ab+ac+bc=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \quad (*)$$

Tā kā katra reāla skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, t.i. $a^2\ge 0$, $b^2\ge 0$, $c^2\ge 0$, tad $a^2+b^2+c^2\ge 0$, bet tas nozīmē, ka $-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\le 0$, kas, ņemot vērā $(*)$, dod mums $ab+ac+bc\le 0$; tas arī bija jāpierāda.

Komentārs.

Ievērosim, ka šī uzdevuma risinājumā bez dotās vienādības $a+b+c=0$ tika izmantotas arī „vispārzināmas" patiesības, piemēram, „katra reāla skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs", „$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$" u.tml., ar kurām jūs esat iepazīstināti skolas kursā; tas, protams, ir atļauts, jo tās vai nu pašas ir rezultāti, par kuru pareizību neviens matemātiķis nešaubās, vai arī jau Jums skolā ir pierādītas, balstoties uz kādiem neapšaubāmiem rezultātiem.

Lai ilustrētu pierādījumu kā loģisku secinājumu virkni, aplūkosim vēl vienu, grūtāku uzdevumu (ja Jums arī neizdodas visā pilnībā izsekot tā risinājumam, droši lasiet tālāk!)

2. piemērs.

Kādā mežā dzīvo triju dažādu veidu rūķīši: votivapas, šillišallas un pukkas. Daži no viņiem savā starpā draudzējas. Ir zināms, ka izpildās tādi četri nosacījumi (sauksim tos par aksiomām):

A1. Ja kāds votivapa v un kāds pukka p draudzējas ar vienu un to pašu šillišallu, tad v un p draudzējas savā starpā.

A2. Ja vieni un tie paši divi dažādi votivapas draudzējas ar šillišallu s un pukku p, tad s un p draudzējas savā starpā.

A3. Ja divi šillišallas s_1 un s_2 *draudzējas savā starpā, tad var atrast votivapu, kas draudzējas gan ar* s_1*, gan ar* s_2*.*

A4. Katram votivapam v un katram šillišallam s var atrast tādu pukku, kas draudzējas gan ar v, gan ar s.

Pierādīt šādu teorēmu:

Ja trīs dažādi šillišallas visi pa pāriem savā starpā draudzējas un ja nav votivapas, kas draudzējas ar tiem visiem trim, tad ir tāds pukka, kas draudzējas ar visiem trim šillišallām.

Katru reizi, kad spriedumos izmantota kāda no aksiomām, tas jānorāda.

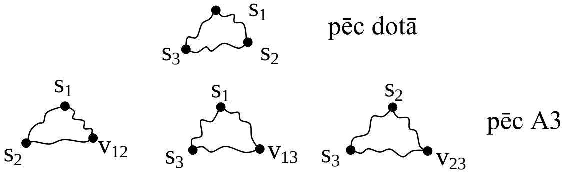
Komentārs.

Šajā uzdevumā dotais noformulēts četru aksiomu veidā, bet pierādāmais izteikts kā teorēma. Secinājumu virkne, ar kuru no aksiomām tiek iegūts teorēmas apgalvojums, varētu būt, piemēram, šāda.

Risinājums.

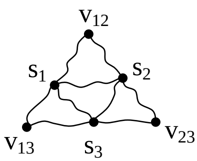
Apzīmēsim dotos trīs šillišallas ar s_1, s_2 un s_3. Pēc aksiomas A3 var atrast tādu votivapu (apzīmēsim to ar v_{12}), kas draudzējas gan ar s_1, gan ar s_2, kā arī tādu votivapu (apzīmēsim to ar v_{13}), kas draudzējas gan ar s_1, gan ar s_3, un votivapu v_{23}, kas draudzējas gan ar s_2, gan ar s_3. Tā kā teorēmas formulējumā dots, ka nav tāda votivapas, kas draudzētos reizē vienlaicīgi ar s_1, s_2 un s_3, tad v_{12}, v_{13} un v_{23} ir **dažādi** votivapas.

Ja rūķīšus attēlosim ar punktiem plaknē un to, ka divi rūķīši savā starpā draudzējas, attēlojam, novelkot līniju starp atbilstošajiem punktiem, tad iegūstam sekojošus zīmējumus.

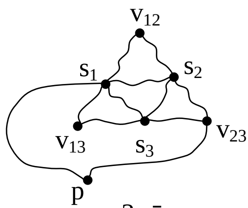


1.zīm.

Viss kopā, ņemot vērā, ka $v_{12} \neq v_{13}$, $v_{12} \neq v_{23}$, $v_{13} \neq v_{23}$, izskatās sekojoši (2. zīm.):



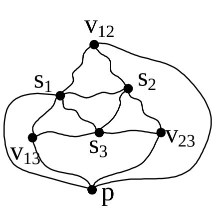
2.zīm.



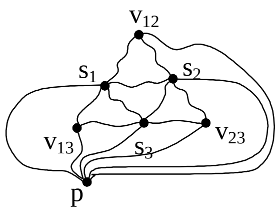
3.zīm.

Pēc aksiomas A4 var atrast tādu pukku p, kas draudzējas vienlaicīgi ar s_1 un ar v_{23} (3.zīm.).

Pēc aksiomas A_1 , tā kā gan v_{12} , gan p draudzējas ar s_1 , tad v_{12} un p draudzējas savā starpā. Tāpat pēc aksiomas A_1 savā starpā draudzējas v_{13} un p, jo gan v_{13} , gan p draudzējas ar s_1 (4.zīm.).



4.zīm.



5.zīm.

Pēc aksiomas A2 šillišalla s_2 un pukka p draudzējas savā starpā, jo divi dažādi votivapas v_{12} un v_{23} draudzējas gan ar p, gan ar s_2.

Analoģiski pēc aksiomas A2 savā starpā draudzējas p un s_3, jo ar tiem abiem draudzējas votivapas v_{13} un v_{23} (5.zīm.).

Līdz ar to mēs esam pierādījuši, ka mūsu izvēlētais pukka p draudzējas ar visiem trijiem dotajiem šillišallām s_1, s_2 un s_3.

Līdz ar to uzdevums ir atrisināts, jo tas , ka mēs uzrādām kādu pukku, kas draudzējas ar visiem trim dotajiem šillišallām, nozīmē, ka šāds pukka ir atrodams.

Komentārs.

Apskatot šos piemērus, varam ievērot, ka pierādāmais apgalvojums neseko **tieši** no dotajiem, bet tas iegūts caur dažādu palīgspriedumu un apgalvojumu ķēdīti. 1. piemērā šī spriedumu ķēdīte bija diezgan īsa, bet piemērā par rūķīšiem tika veikts ļoti daudz elementāru loģisku secinājumu. Izsekojot katrai no šīm spriedumu ķēdītēm, bez sevišķi lielas piepūles var konstatēt, ka tajās katrs nākamais apgalvojums loģiski izriet no iepriekš iegūtajiem (pierādītajiem) apgalvojumiem un uzdevumā dotajām sakarībām, tādēļ katrs no šiem spriedumiem uzskatāms par loģiski pilnīgu un pierādījuma vārda cienīgu. No otras puses, nav grūti saprast, ka krietni grūtāks uzdevums ir pašam izveidot šo viens aiz otra sekojošo spriedumu ķēdīti. Šī situācija matemātikā ir tipiska: neskatoties uz to, ka samērā viegli pārbaudīt, vai dotā sprieduma virkne ir uzlūkojama par dotā apgalvojuma pierādījumu, uzdevums pašam atrast kādas problēmas risinājumu (kāda noteikta apgalvojuma pierādījumu) var būt ļoti , ļoti grūts. Ir milzīgi daudz tādu matemātisku problēmu, kuru risinājums nav zināms nevienam pasaulē. Meklējot pierādījumus dažādiem pierādījumiem, bieži nākas izdarīt dažāds papildkonstrukcijas , izdalīt objektus ar speciāla veida īpašībām, ievērot dažādus nemainīgus lielumus utt., u.tml. Tomēr, neskatoties uz to, ka pierādījuma meklēšana bieži vien ir ļoti grūts process, iešana pa vieglākās pretestības ceļu, pierādījuma vietā mēģinot „iesmērēt" kaut kādus spriedumus „varbūt uz to pusi", ir **absolūti nepieļaujama.** Matemātikas kā zinātnes skaistums lielā mērā ir meklējams tieši grūtu uzdevumu un problēmu atrisināšana. Tajā pašā laikā neviens „varbūt uz to pusi" spriedums nevar iekļauties matemātikas zināšanu sistēmā, jo neatbilst pašai galvenajai prasībai, kas jāievēro, veidojot šo sistēmu – loģiskajam pēctecīgumam (loģiskajai stingrībai).

§2. ATSEVIŠĶI UN VISPĀRĪGI APGALVOJUMI

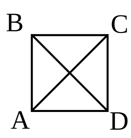
Pirms ķerties pie pierādījuma meklēšanas vai veidošanas katrā konkrētā uzdevumā (sastopoties ar konkrētu problēmu), ir **jāsaprot** tas apgalvojums, kuru mēs cenšamies pierādīt vai pamatot. Nevar izveidot loģiski stingru pierādījumu, precīzi neapzinoties, tieši ko mēs gribam pierādīt.

Ievērosim, ka apgalvojums var atteikties gan uz kādu **vienu** objektu (piemēram, skaitli 5, pilsētu Rīga vai kādu konkrētu cilvēku), gan arī kaut kādā ziņā „līdzīgu” objektu kopumu (piemēram, visiem naturāliem skaitļiem, visām Latvijas pilsētām, visiem Zemeslodes iedzīvotājiem u.tml.). Atkarībā no objektu skaita, uz kuriem attiecas apgalvojums, apgalvojumus pieņemts saukt vai nu par atsevišķiem, vai par vispārīgiem.

APGALVOJUMI

ATSEVIŠĶI	VISPĀRĪGI
Atsevišķi apgalvojumi kaut ko apgalvo par **vienu** objektu (skaitli, priekšmetu, figūru)	Vispārīgi apgalvojumi kaut ko apgalvo par kādu objektu kopumu (skaitļiem, priekšmetiem, figūrām)

Atsevišķu apgalvojumu piemēri ir „14 dalās ar 2”, „Andris mācās 9. klasē”, „kvadrāta ABCD (skat. 6.zīm.) diagonāles ir perpendikulāras”.



6.zīm.

Vispārīgu apgalvojumu piemēri:

„Katrs naturāls skaitlis, kas beidzas ar 4, dalās ar 2 ” (šis apgalvojums attiecas uz visiem naturālajiem skaitļiem, kas decimālajā pierakstā beidzas ar 4, un izsaka īpašību, ka katrs skaitlis no aprakstītā kopuma dalās ar 2).

„Pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz"

(šis apgalvojums attiecas uz visu naturālo skaitļu kopu un apgalvo, ka starp tās elementiem var atrast bezgalīgi daudzus tādus, kam ir tikai 2 dalītāji – pats šis skaitlis un skaitlis 1).

„Trijstūra laukums ir aprēķināms pēc formulas $\frac{a \cdot h_a}{2}$, kur *a*- trijstūra malas garums, bet h_a - augstuma, kas vilkts pret šo malu, garums "

(Šis apgalvojums attiecas uz visu trijstūru kopu un apgalvo, ka katram trijstūrim tā laukumu var aprēķināt, sareizinot tā malas garumu ar augstumu, kas vilkts pret šo malu, garumu, un iegūto rezultātu izdalot ar 2).

„Andris, Jānis un Aivars mācās 9. klasē"

(šis apgalvojums attiecas uz Andri, Jāni un Aivaru un apgalvo, ka katrs no viņiem mācās 9. klasē).

„Andris, Jānis vai Aivars mācās 9. klasē"

(šis apgalvojums arī attiecas uz Andri, Jāni un Aivaru; tas apgalvo, ka vismaz viens no šiem zēniem mācās 9. klasē).

Ievērosim, ka vispārīgie apgalvojumi ir sadalāmi 2 būtiski atšķirīgās grupās. Daļa no šiem apgalvojumiem izsaka īpašību, kas piemīt **katram** dotā kopuma elementam (piemēram, „katrs naturāls skaitlis, kas beidzas ar 4, dalās ar 2", „katra trijstūra laukums ir aprēķināms pēc formulas $\frac{a \cdot h_a}{2}$", „Andris, Jānis un Aivars mācās 9. klasē", „katra kvadrāta diagonāles ir perpendikulāras ", utt., utml.). Citi vispārīgie apalvojumi, savukārt, apgalvo, ka dotajā kopumā **eksistē** objekts (vai objektu grupa) ar apgalvojumā norādīto īpašību (piemēram, „eksistē tāds naturāls divciparu skaitlis, kas dalās ar 2 ", „eksistē bezgalīgi daudz pirmskaitļu", „Andris, Jānis vai Aivars mācās 9. klasē", „eksistē tāds taisnstūris, kam diagonāles ir perpendikulāras", utt.).

Saprast atšķirību starp viena vai otra veida vispārīgajiem apgalvojumiem ir ārkārtīgi būtiski, tādēļ noformulēsim to likuma veidā.

VISPĀRĪGI APGALVOJUMI

„katram"- tipa apgalvojumi
(apgalvojumi, kas izsaka, ka kāda īpašība piemīt **katram** dotā kopuma elementam)

„eksistē"- tipa apgalvojumi
(apgalvojumi, kas izsaka, ka dotajā kopumā **eksistē** elements, kas apmierina noteiktu īpašību)

Lūk, vēl daži piemēri:

„Katram"- tipa apgalvojumi:

(a) katram reālam *x* izpildās nevienādība: $(x-1)^2 \geq 0$

(b) katrs naturāls skaitlis ir vai nu pāra, vai nepāra

(c) katra ķīmiska elementa kodols sastāv no protoniem un neitroniem

(d) starp katriem 3 skaitļiem, kas mazāki par 6, var atrast vismaz vienu nepāra skaitli

(e) katrā situācijā, kas var rasties, spēlējot šahu, uz galdiņa nav vairāk par 18 dāmām.

„Eksistē"- tipa apgalvojumi

(a) eksistē tāds *x*, ka $(x-1)^2 = 16$

(b) eksistē tāds naturāls skaitlis, kam ciparu summa ir 1988

(c) eksistē tādi naturāli skaitļi *a, b, c, d,* ka $a+b=c+d$

(d) eksistē tāds taisnleņķa trijstūris, kam katras malas garums ir izsakāms ar veselu skaitu centimetru

(e) uz zemeslodes ir tāds kalns, kura augstums pārsniedz 8000 m virs jūras līmeņa

(f) spēlējot šahu, var nonākt līdz situācijai, kurā uz galdiņa ir vairāk nekā 15 dāmas.

Pamēģināsim labāk saprast, kur slēpjas atšķirība starp „katram"- tipa un „eksistē"- tipa apgalvojumiem. Aplūkosim apgalvojumu „$x^2+2=11$".

Viegli saprast, ka apgalvojuma patiesums ir atkarīgs no tā, kāda ir *x* vērtība – ir tāda *x* vērtība, kurai šī vienādība ir patiess apgalvojums (piem., ja $x=3$), kā arī ir tādas *x* vērtības, kurām šī vienādība izsaka acīmredzami aplamu apgalvojumu (piem., ja $x = 2$).

Tātad šajā situācijā mās varam apgalvot, ka **eksistē** tāds *x*, ka $x^2 + 2 = 11$ (jo, piemēram, $3^2 + 2 = 11$), bet tajā pašā laikā mēs nevaram apgalvot, ka **katram** *x* izpildās vienādība $x^2 + 2 = 11$ (jo, piemēram, $2^2 + 2 \neq 11$). Citiem vārdiem sakot, apgalvojums „eksistē *x*, ka $x^2 + 2 = 11$" ir patiess, bet apgalvojums „katram *x* izpildās $x^2 + 2 = 11$" ir aplams.

Aplūkosim apgalvojums „Andris, Jānis un Aivars mācās 9. klasē" un „Andris, Jānis vai Aivars mācās 9. klasē ". Ja visi trīs zēni mācās 9. klasē, tad abi šie apgalvojumi ir patiesi. Ja neviens no viņiem 9. klasē nemācās, tad abi ir aplami. Padomāsim, kas notiek tad, ja Andris un Jānis mācās 9. klasē, bet Aivars 10. klasē (šāda situācija taču ir pilnīgi iespējama). Apgalvojums „Andris, Jānis un Aivars mācās 9.klasē" tagad ir nepatiess, jo tas apgalvo, ka katrs no šiem zēniem mācās 9. klasē, bet Aivars taču nemācās 9.klasē! Savukārt otrs apgalvojums „Andris, Jānis vai Aivars mācās 9. klasē", protams, ir patiess, jo no šiem zēniem, piemēram, Jānis mācās 9. klasē.

Šo atšķirību starp vārdu „katram" un „eksistē" nozīmi (tāpat starp vārdu „un" un „vai" nozīmi) ir jāapzinās ik brīdi, kad šie vārdi ir lietoti. Ļoti būtiski ir spēt atšķirt, kādi spriedumi nepieciešami, pierādot „katram"- tipa apgalvojumu, un ar kādiem pietiek „eksistē"- tipa apgalvojumu pierādīšanai.

Ņemot vērā vārdiņu „katrs" un „eksistē" biežo lietojumu matemātikas spriedumos, tiem ir izdomāti ērti saīsinājumi: vārdiņš „katrs" tiek aizstāts ar simbolu $\forall$ (otrādi apgriezts „A" burts, no vācu vārda „Alle" – visi), vārdiņš „eksistē" – ar simbolu $\exists$ (otrādi apgriezts „E" burts, no vācu vārda „Existieren" – eksistēt). Šos apzīmējumus pirmoreiz ieviesis vācu matemātiķis G.Kantors. reizēm šos simbolus ērtības labad lietosim arī mēs.

Tagad mēģināsim noskaidrot raksturīgākās iezīmes, kas piemīt „katram" – tipa (tātad: $\forall$ – tipa) apgalvojumu pierādījumiem.

3. piemērs.

Pierādīt, ka katram reālam x (saīsināti rakstot $\forall x \in R$) izpildās nevienādība $x^2 + 1 > |x|$.

Komentārs.

Izteiktais apgalvojums attiecas uz visu reālo skaitļu kopu un apgalvo, ka katram tās elementam x ir spēkā nevienādība $x^2 + 1 > |x|$. Pierādīt šo apgalvojumu nozīmē izveidot spriedumu, kas pārliecinātu, ka šī nevienādība ir spēkā **pilnīgi visām** reālām x vērtībām (nevis kaut kādai vienai vai dažām, nevis tikai pozitīvām vai tikai negatīvām, nevis tikai tām, kas pēc moduļa mazākas par 1989, bet **pilnīgi visām**). Tā kā dažādo x vērtību ir bezgalīgi daudz, tad ir absurdi uzdevumā formulēto apgalvojumu mēģināt pierādīt, pārbaudot pa vienai visas iespējamās x vērtības – nav jēgas sākt darbu, jau iepriekš skaidri apzinoties, ka mēs **nekad** nespēsim to pabeigt.

Risinājums.

Aplūkosim vispirms gadījumu, kad $x \geq 0$. Tad $|x| = x$, un mums jāpierāda, ka $x^2 + 1 > x$, jeb, kas ir tas pats, $x^2 - x + 1 > 0$.

Ievērosim, ka $\forall x \in \mathrm{R}$ izpildās

$$x^2 - x + 1 = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

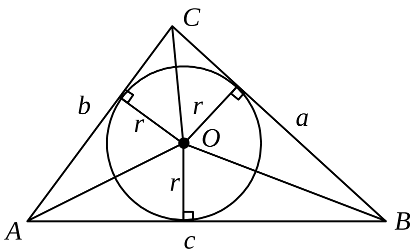
Līdz ar to esam pārliecinājušies, ka $\forall x \geq 0$ (katram x, kas nav mazāks par 0) $x^2 + 1 > |x|$. Atlikušajā gadījumā, kad x<0, ievērosim, ka $x^2 + 1 = (-x)^2 + 1$ un $|x| = -x$. Taču, tā kā $-x > 0$ un mēs jau esam pierādījuši, ka $\forall y > 0$ izpildās $y^2 + 1 > |y|$ (ir taču pilnīgi vienalga, vai sakot „katram pozitīvam skaitlim tā kvadrāta un skaitļa 1 summa ir lielāka par šī skaitļa moduli", mēs patvaļīga pozitīva skaitļa apzīmēšanai lietojam simbolu *x* vai simbolu *y*), tad arī $(-x^2) + 1 > |x|$, kas ir ekvivalenti ar $(-x)^2 + 1 > -x$ (jo $-x > 0$), jeb, kas ir tas pats, ar $x^2 + 1 > |x|$. Līdz ar to mēs esam apskatījuši **visas iespējamās x vērtības**, (t.i. gan visas nenegatīvās, gan arī visas negatīvās) un katrai no tām pierādījuši, ka $x^2 + 1 > |x|$. Līdz ar to mēs esam pierādījuši uzdevumā formulēto vispārīgo apgalvojumu.

4. piemērs.

Pierādīt, ka katram trijstūrim $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$, *kur* h_a, h_b, h_c *– attiecīgi pret trijstūra malām a, b, c novilkto augstumu garumi, r – trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiusa garums.*

Komentārs.

Šajā uzdevumā runa ir par pilnīgi visiem trijstūriem (nevis tikai šaurleņķa vai platleņķa trijstūriem, nevis tikai trijstūriem, kas uzzīmējami burtnīcas lapā vai uz tāfeles, bet par pilnīgi visiem trijstūriem). Tādēļ arī pacentīsimies izveidot vispārīgu spriedumu, kas derīgs uzreiz visiem trijstūriem, bet nevis kaut kādai to daļai vai vienam konkrētam trijstūrim. Zīmējums, kuru izveidosim, būs tikai **ilustratīva** loma, tas atvieglos sekošanu pierādījuma gaitai (zīmējumam nevar būt vairāk kā ilustratīva loma, jo zīmējumā mēs varam attēlot tikai vienu konkrētu trijstūri; lai arī cik zīmējumus mēs burtnīcā sazīmētu, mēs nekad nebūsim uzzīmējuši pilnīgi visus trijstūrus).



7.zīm.

Risinājums.

Apzīmēsim trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centru ar *O* (trijstūra virsotnēm pierakstīti burti *A*, *B*, *C*; ar *a*, kā parasti, apzīmēta mala, kas pretēja virsotnei *A*, utt.).

Tad trijstūra *ABC* laukums

$$[ABC]=[AOB]+[BOC]+[COA]=$$

$$=\frac{r\cdot c}{2}+\frac{r\cdot a}{2}+\frac{r\cdot b}{2}=\frac{r\cdot(a+b+c)}{2} \quad (*)$$

(Nav nekādu šaubu par to, ka trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas trijstūra iekšpusē).

No otras puses, $\left[ABC\right] = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$, tātad $a = \frac{2\left[ABC\right]}{h_a}$, $b = \frac{2\left[ABC\right]}{h_b}$, $c = \frac{2\left[ABC\right]}{h_c}$,

$$a + b + c = \frac{2\left[ABC\right]}{h_a} + \frac{2\left[ABC\right]}{h_b} + \frac{2\left[ABC\right]}{h_c} = 2\left[ABC\right]\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right).$$

Ņemot vērā (*), $2\left[ABC\right] = r \cdot (a + b + c) = r \cdot 2\left[ABC\right]\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)$.

Tātad tā kā $\left[ABC\right] \neq 0$, $r \neq 0$, iegūstam $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$, kas arī bija jāpierāda.

5. piemērs.

Pierādīt, ka katram naturālam n ($\forall n \in \mathrm{N}$ *) skaitlis* $n(n+1)$ *ir pāra skaitlis.*

Komentārs.

Uzdevumā izteiktais vispārīgais apgalvojums attiecas uz visu naturālo skaitļu kopu. Var uzskatīt, ka tas sastāv no **bezgalīgi daudziem** sekojoša veida apgalvojumiem:

„1·2 ir pāra skaitlis”
„2·3 ir pāra skaitlis”
„3·4 ir pāra skaitlis”
„4·5 ir pāra skaitlis”
……..
„1988·1989 ir pāra skaitlis”
„1989·1990 ir pāra skaitlis”
……..
„999999·1000000 ir pāra skaitlis”
„1000000·1000001 ir pāra skaitlis”
„1000001·1000002 ir pāra skaitlis”
……..

Uzdevumā formulētā vispārīgā apgalvojuma pierādījums ir jāveido tā, lai pamatotu **pilnīgi visus** atsevišķos apgalvojumus, no kuriem sastāv vispārīgais apgalvojums. Mēs redzam, ka arī šajā gadījumā pamatojamo atsevišķo apgalvojumu ir **bezgalīgi daudz**, tātad arī šoreiz mums nav nekādu cerību pabeigt vajadzīgo vispārīgā apgalvojuma pierādījumu, pierādot (jeb pārbaudot) visus tajā ietilpstošos atsevišķos apgalvojumus pēc kārtas. Mēs principā nevaram pat tikai uzrakstīt vien visus šos atsevišķos apgalvojumus (lai to izdarītu, mums būtu vajadzīgs bezgalīgs laiks, kurš diemžēl nav rīcībā nevienam no mums), kur nu vēl katru atsevišķi pierādīt!

Līdzīgi kā iepriekšējos piemēros, izeju no situācijas izdodas atrast, lietojot vispārīgus spriedumus, ar kuriem var pamatot visus vispārīgajā apgalvojumā ietilpstošos atsevišķos apgalvojumus reizē.

Risinājums.

Katrs naturāls skaitlis ir vai nu pāra skaitlis, vai nepāra skaitlis. Ja n – pāra skaitlis, tad $n(n+1)$ arī ir pāra skaitlis, jo tas izsakāms kā divu naturālu skaitļu, no kuriem viens ir pāra skaitlis, reizinājums. Ja, savukārt, n ir nepāra skaitlis, tad pāra skaitlis ir $(n+1)$, un atkal $n(n+1)$ arī ir pāra skaitlis, jo izsakāms kā divu naturālu skaitļu, no kuriem viens ir pāra skaitlis, reizinājums.

<u>**6. piemērs.**</u>

Pierādīt, ka nevienam naturālam n skaitlis n^2, dalot ar 3, nevar dot atlikumā 2.

Risinājums.

Ir 3 dažādas iespējas: a) skaitlis n dalās ar 3, b) skaitlis n, dalot ar 3, dod atlikumā 1, c) skaitlis n, dalot ar 3, dod atlikumā 2. Aplūkosim katru no tām atsevišķi.

a) Ja n dalās ar 3, tad n^2 arī dalās ar 3, tātad, dalot ar 3, n^2 nedod atlikumu 2.

b) Ja n, dalot ar 3, dod atlikumu 1, tad eksistē tāds vesels nenegatīvs skaitlis k, ka $n = 3k+1$. Tad $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ dod atlikumu 1, dalot ar 3.

c) Ja, savukārt, skaitlis n, dalot ar 3, dod atlikumā 2, t.i., eksistē tāds vesels nenegatīvs skaitlis k, ka $n = 3k+2$, tad $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ arī dod atlikumu 1, dalot ar 3.

Līdz ar to, izanalizējot visus iespējamos gadījumus, esam pierādījuši, ka neviena naturāla skaitļa kvadrāts, dalot ar 3, nevar dot atlikumā 2.

Kā jau redzējām 3. un 5. piemēros, pierādot „katram” – tipa apgalvojumus, nav obligāti jāsameklē kaut kāda viena spriešanas metode, kas derīga reizē visiem atsevišķajiem apgalvojumiem, kuri ietilpst vispārīgajā apgalvojumā. Var atsevišķos apgalvojumus kaut kā sadalīt pa grupām, katrā no tām lietojot savu, tieši šīs grupas īpašībām piemērotu spriešanas metodi.

Situācijā, kad atsevišķo apgalvojumu, kas sastāda vispārīgo apgalvojumu, skaits ir **galīgs** un pie tam neliels, ir iespējams vispārīgo apgalvojumu pierādīt, pārbaudot pēc kārtas **visus** tajā ietilpstošos atsevišķos apgalvojumus.

7. piemērs.

Pierādīt, ka starp katriem 3 dažādiem naturāliem skaitļiem, kas mazāki par 6, var atrast vismaz vienu nepāra skaitli.

Atrisinājums.

Iespējamās 3 skaitļu, kas mazāki par 6, kombinācijas ir sekojošas: 123 124 125 134 135 145 234 235 245 345, katrā no tām var atrast vismaz pa vienam nepāra skaitlim:

123-1 124-1 125-1 134-1 135-1 145-1 234-3 235-3 245-5 345-3.

Tātad pierādāmais vispārīgais apgalvojums ir patiess. Skaidrs, ka šajā piemērā **varēja spriest arī citādi**, piemēram, ievērojot, ka pāra skaitļu, kas mazāki par 6, ir tikai divi (t.i. „2” un „4”), tātad, paņemot 3 skaitļus, kas mazāki par 6, vismaz viens no tiem nebūs ne 2, ne 4, tātad – būs nepāra skaitlis. Tomēr formulētajā uzdevumā veiktā variantu pārlase bija pilnīga, tādēļ arī pirmais atrisinājums uzskatāms par precīzu un loģiski stingru izteiktā apgalvojuma pierādījumu.

Rezumējot iepriekš teikto par „katram” – tipa apgalvojumu pierādīšanu:

1^o Svarīgi ir, lai pierādot „katram” tipa apgalvojumu, būtu pierādīti **pilnīgi visi** atsevišķie apgalvojumi, no kuriem tas sastāv (bet tieši tāda taču ir vārda „katram” **jēga**); nav svarīgi, vai tie pierādīti visi reizē, vai katrs atsevišķi, vai kaut kā sadalot pa grupām.

Šeit būtu vietā vēlreiz pieminēt ilustrāciju: no tā, ka pirmie 99 naturālie skaitļi ir mazāki par 100, vēl neseko, ka **pilnīgi visi** naturālie skaitļi ir mazāki par 100. Analoģiskas kļūdas var tikt izdarītas visdažādāko apgalvojumu „pamatošanā”, ja spriedumu atļaujas izdarīt nepilnīgas gadījumu pārlases rezultātā.

Aplūkosim, piemēram, apgalvojumu „Nevienam naturālam n skaitlis $3n+4$ nedalās ar 17”.

Ko vērts ir spriedums, kurā, pārbaudot n vērtības no 1 līdz 9, uz iegūto rezultātu bāzes tiek izdarīts secinājums par apgalvojuma patiesumu **jebkurai** n vērtībai? Patiesībā, ieliekot n vietā kādu citu naturālu skaitli, piemēram, 10 vai 27, izteiktais apgalvojums ir acīmredzama aplamība, jo gan 34, gan 85 dalās ar 17.

Sekojoša apgalvojuma „Katram naturālam n izpildās nevienādība $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<10000000000$” „pamatošanā”, pārbaudot pēc kārtas visas naturālās n vērtības, Jūs savas dzīves laikā nevarat nonākt līdz tādai n vērtībai, kurai šis apgalvojums izrādītos nepatiess, kaut gan patiesībā tas ir nepatiess: var pierādīt, ka $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^{10000000000}}>10000000000$.

Šie piemēri vēlreiz liecina par to, ka „katram” – tipa apgalvojumu pierādīšanā nedrīkst aprobežoties ar nepilnīgu gadījumu pārlasi.

Šāda apgalvojuma pierādījumam ir **jāgarantē**: nevar atrasties tāds speciālgadījums, kurā tas neizpildās (tā ir vārda „katram” jēga – attiecināt apgalvojumu uz pilnīgi visiem iespējamajiem gadījumiem, bez neviena izņēmuma!). Ja vispārīgais „katram” – tipa apgalvojums sastāv no **bezgalīga daudzuma** atsevišķu apgalvojumu (bezgalīga daudzuma speciālgadījumu), tad to **principā nevar** pierādīt, pārbaudot pēc kārtas **visus** atsevišķos apgalvojumus (izanalizējot pēc kārtas visus iespējamos gadījumus), šeit ir vajadzīgas citas metodes.

Tagad – daži uzdevumi patstāvīgai risināšanai.

1. uzdevums.

Pierādīt, ka naturāla skaitļa kvadrāts, dalot ar 4, var dot tikai atlikumus 0 vai 1 (t.i., nevar dot atlikumus 2 vai 3), bet, dalot ar 5 – tikai atlikumus 0, 1 vai 4.

2. uzdevums.

Pierādīt, ka katram naturālam n skaitlis $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ ir vesels.

3. uzdevums.

Pierādīt, ka katram naturālam n skaitlis $n^5 - 5n^3 + 4n$ *dalās ar 120.*

4. uzdevums.

Pierādīt, ka katram reālam x izpildās $\dfrac{2x^2+9}{\sqrt{x^2+4}} > 4$.

5. uzdevums.

Pierādīt, ka katrā trijstūrī mediānas, kas vilkta pret malu a, garums ir mazāks par malu b un c garumu pussummu, t.i., $m_a < \dfrac{1}{2}(b+c)$.

6. uzdevums.

Punkts D atrodas trijstūra ABC iekšpusē. Pierādīt, ka $\dfrac{d_a}{h_a} + \dfrac{d_b}{h_b} + \dfrac{d_c}{h_c} = 1$, *kur ar* d_a, d_b, d_c *apzīmēti punkta D attālumi līdz trijstūra malām a, b, c, bet* h_a, h_b, h_c *- trijstūra ABC augstumi pret malām a, b un c.*

Tagad pievērsīsim uzmanību „eksistē" – tipa apgalvojumu pierādīšanai.

<u>8. piemērs.</u>

Skaitli nosauksim par ***pilnīgu****, ja tas ir vienāds ar visu tā dalītāju, kas mazāki par šo skaitli, summu. Pierādīt, ka eksistē pilnīgs skaitlis.*

Risinājums.

Viegli redzēt, ka 6 ir pilnīgs skaitlis, jo tā dalītāji, kas mazāki par 6, ir 1, 2 un 3 un neviens cits; tajā pašā laikā $6 = 1 + 2 + 3$.

Komentārs.

Tas, ka mēs esam uzrādījuši vienu pilnīgu skaitli, mums, protams, ļauj apgalvot, ka pilnīgs skaitlis eksistē. No otras puses, mums nav nekāda pamata apgalvot, ka katrs naturāls skaitlis ir pilnīgs, tas pat acīmredzami **nav tiesa**, jo, piemēram, skaitlim 5 vienīgais dalītājs, kas mazāks par 5 ir 1, un $5 \neq 1$.

Vispār apgalvojuma veidu „eksistē tāds objekts (skaitlis, figūra u.tml.), kas apmierina īpašību A" pierādīšanai pietiek atrast vienu atbilstošu objektu, kas apmierina īpašību A (piemērā šāds objekts bija skaitlis 6, īpašības A lomā tika ņemta īpašība „būt pilnīgam skaitlim”). Netiek prasīts pilnīgi nekāds papildus pētījums par to, kādi ir un vai vēl vispār ir citi objekti, kas arī apmierina īpašību A. Protams, uzrādot kādu noteiktu objektu un apgalvojot, ka tas apmierina īpašību A, vēl ir **jāpierāda**, ka tas tiešām šo īpašību apmierina (piemērā mēs pierādījām, ka 6 ir pilnīgs skaitlis, tas gan šoreiz nebija īpaši grūti).

7. uzdevums.

Pierādīt, ka eksistē tāds pilnīgs naturāls skaitlis, kas ir lielāks par 6.

9. piemērs.

Pierādīt, ka eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka $n-1$ *dalās ar 2,* $n-2$ *dalās ar 3,* $n-3$ *dalās ar 5,* $n-4$ *dalās ar 7 un* $n-5$ *dalās ar 11.*

Risinājums.

Pārbaudīsim, ka skaitlis 1523 apmierina uzdevumā formulēto prasību. Tiešām, kā viegli redzēt, 1522 dalās ar 2, 1521 dalās ar 3 un 1520 dalās ar 5. tajā pašā laikā $1519 = 7 \cdot 217$ un $1518 = 11 \cdot 138$, tātad skaitli 1523 mēs varam ņemt uzdevumā meklētā *n* vietā.

Komentārs.

Šis piemērs, lai arī nedaudz samākslots, uzskatāmi parāda, ka „eksistē” – tipa apgalvojuma piemērs var nesaturēt nekādu informāciju par to, kā tas tika iegūts. No kurienes radās skaitlis 1523? Kāpēc ņēmām tieši to un nevienu citu? Vēlāk gan mēs redzam, ka šī mūsu izvēle bija veiksmīga, bet, pirms mēs esam pārbaudījuši, vai 1522 dalās ar 2, 1521 dalās ar 3 utt., mēs taču nezinām, ka jāizvēlas skaitlis 1523 (varēja, protams, *n* vietā ņemt arī skaitļus 3833 vai 6143, kā arī daudzus jo daudzus citus, bet no tā, acīmredzot, vieglāk nekļūst). Tomēr, neskatoties uz šādu „neizskaidrojamību”, dotais pierādījums formulētajam apgalvojumam ir pilnīgi pietiekams. Formulētā uzdevuma risināšanas procesā, neapšaubāmi, šādu skaitli 1523 „no zila gaisa” pagrābt neizdodas. Mēs te uzskatāmi redzam, ka tā domu gaita, kas tiek noieta uzdevuma risināšanas procesā, un tā loģisko spriedumu ķēdīte, kas rakstāma uzdevuma atrisinājumā, bieži vien var būt pavisam dažādas lietas.

Lai neatstātu neizprastu šī uzdevuma risināšanas ideju, padomāsim, kā varēja iegūt skaitli 1523.

Skaitlis *n*, dalot ar 2, dos atlikumu 1, un, dalot ar 3, dos atlikumu 2, ja *n*, dalot ar 6, dos atlikumu 5. Ja šāds *n*, dalot ar 30, dos atlikumu 23, tad turklāt, dalot ar 5, *n* dos atlikumu 3. Tālāk, ja, dalot ar 210, šāds skaitlis *n* dos atlikumu 53, tad turklāt, dalot ar 7, *n* dos atlikumā 4. Lai *n*, dalot ar 210, dotu atlikumā 53 un, dalot ar 11, dotu atlikumā 5, pietiek, lai *n*, dalot ar 2310, dotu atlikumā 1523 (pārbaudām atlikumus, dalot ar 11, skaitļiem $53; 263; 473; \ldots; 53+210\cdot k$, līdz konstatējam, ka 1523, dalot ar 11, dod atlikumā 5).

8. uzdevums.

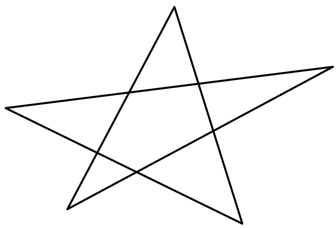
Pierādīt, ka eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka $n-1$ *dalās ar 3,* $n-2$ *dalās ar 5,* $n-3$ *dalās ar 11 un* $n-4$ *dalās ar 13.*

„Eksistē" – tipa apgalvojumi var atteikties ne tikai uz naturālo skaitļu kopu. Aplūkosim, piemēram, sekojošu uzdevumu:

10. piemērs.

Pierādīt, ka plaknē var uzzīmēt tādu slēgtu lauztu līniju, kas katru savu posmu krusto tieši 2 reizes.

Risinājums.



8.zīm.

11. piemērs.

Pierādīt, ka skaitli 1992 var izteikt ar 10 vieniniekiem, lietojot pēc nepieciešamības iekavas un aritmētisko darbību zīmes.

Risinājums.

$$1992=(1+1)^{11}-(111+1):(1+1).$$

Lai gan „eksistē” – tipa apgalvojumu pierādīšanai **pietiek** uzrādīt speciālgadījumu, kurā tas izpildās, nekur nav teikts, ka šī ir **vienīgā** iespēja pierādīt šādus apgalvojumus. Pierādījumus, kuros kaut kāda objekta eksistence tiek pamatota, uzrādot šo objektu (vai nu uzrādot tieši, vai aprakstot konstrukciju, kā to iegūt), sauc par **konstruktīviem**. Citu pierādīšanas iespēju aplūkosim nākošajā paragrāfā, runājot par pierādījumiem no pretējā.

No iepriekš teiktā varētu šķist, ka pierādīt „eksistē” – tipa apgalvojumus ir būtiski vieglāk, nekā pierādīt „katram” – tipa apgalvojumus. Patiesībā izrādās, ka tā bieži vien ir tikai ilūzija. Konkrēta apgalvojuma pierādīšanas grūtības pakāpi nosaka nevis tas, cik grūti ir **uzrakstīt** pierādījumu, bet tas, cik grūti ir **izdomāt** pierādījumu. Vienu ilustrāciju šai atšķirībai mēs jau redzējām „piemērā ar 1523”; izrādās, ka ļoti bieži ir sastopami uzdevumi, kas prasa vēl daudz sarežģītāku spriedumus, lai nonāktu pie iespējas uzrakstīt pierādījumu, kamēr pats pierādījums paliek praktiski tikpat vienkāršs, kā minētajā piemērā.

Bez tam vienā daļā uzdevumā prasītā „eksistē” – tipa apgalvojuma pierādīšana pēc tam, kad pareizā atbilde uzminēta, reducējas uz „katram” – tipa apgalvojuma pierādīšanu. Aplūkosim sekojošu piemēru.

12. piemērs.

Pierādīt, ka eksistē 5 dažādi pirmskaitļi a, b, c, d un e ar īpašību: lai kā arī izvēlētos zīmes skaitļa priekšā izteiksmē $\mp a \mp b \mp c \mp d \mp e$*, iegūtais skaitlis nedalās ar 9.*

Komentārs.

Ja mēs uzrādīsim 5 pirmskaitļus, ko ņemt a, b, c, d un e lomās, tad mums vēl atliks pierādīt „katram” – tipa apgalvojumu: lai kā arī izvēlētos zīmes aplūkotajā izteiksmē (t.i. priekš **katra** zīmju izvietojuma pirms skaitļiem), iegūtais skaitlis nedalās ar 9. Necentīsimies mākslīgi nodalīt šos 2 etapus vienu no otra, bet izveidosim dabīgu pierādījumu, kurš sevī ietver abiem etapiem atbilstošos spriedumus.

Risinājums.

Aplūkosim vispirms izteiksmi $\mp 2 \mp 2 \mp 2 \mp 2 \mp 2$. Ievērosim: lai arī kā mēs izvēlētos tajā zīmes skaitļu priekšā, mēs varam iegūt tikai izteiksmes vērtības –10, –6, –2, 2, 6, 10 un nevienu citu, atkarībā no tā, cik divnieku priekšā mēs izvēlamies „+” zīmi un cik divnieku priekšā „–” zīmi.

Tālāk ievērosim: ja k_1, k_2, k_3, k_4 un k_5 ir veseli skaitļi (pozitīvi, negatīvi vai 0), tad arī izteiksmē $\mp(9k_1+2)\mp(9k_2+2)\mp(9k_3+2)\mp(9k_4+2)\mp(9k_5+2)$ mēs nevaram zīmes izvēlēties skaitļu priekšā tā, lai iegūtais rezultāts dalītos ar 9. Tiešām, šīs izteiksmes vērtība katrā konkrētā zīmju izvēles gadījumā precīzi par skaitļa 9 daudzkārtni atšķiras no atbilstošās izteiksmes $\mp2\mp2\mp2\mp2\mp2$ vērtības (no tās vērtības, kas iegūta, zīmes saliekot tāpat kā aplūkojamajā izteiksmē). Tā kā izteiksmes $\mp2\mp2\mp2\mp2\mp2$ vērtība nevar dalīties ar 9 (jo tā var būt tikai –10, –6, –2, 2, 6 vai 10, bet neviens no šiem skaitļiem ar 9 nedalās), tad arī aplūkojamā izteiksmē $\mp(9k_1+2)\mp(9k_2+2)\mp(9k_3+2)\mp(9k_4+2)\mp(9k_5+2)$ zīmes skaitļu priekšā nevar izvēlēties tā, lai iegūtais rezultāts dalītos ar 9.

Tādējādi, ja mums izdosies atrast 5 dažādus pirmskaitļus, katrs no kuriem ir izsakāms formā $9t+2$ ($t \in Z$), tad uzdevumu būsim atrisinājuši. To izdarīt nav grūti: ņemsim kaut vai $a=2$, $b=11$, $c=29$, $d=47$, $e=83$. Iepriekš izdarītie spriedumi pamato to, ka izteiksmē $\mp2\mp11\mp29\mp47\mp83$ zīmes skaitļu priekšā nevar izvēlēties tā, lai iegūtais rezultāts dalītos ar 9.

9. uzdevums.

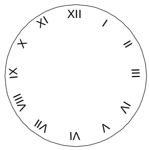
Pierādīt, ka izteiksmē $4\cdot12+18:6+3$ *var salikt iekavas tā, lai rezultāts būtu 50.*

10. uzdevums.

Pierādīt, ka eksistē tādi naturāli skaitļi a un b, ka a^2-b^2 *ir naturāla skaitļa kubs, bet* a^3-b^3 *ir naturāla skaitļa kvadrāts.*

11. uzdevums.

Pierādīt, ka ciparnīcu 9.zīm. var sadalīt 4 daļās tā, lai katrā daļā ierakstīto skaitļu summa būtu 20.



9.zīm.

Piezīme par atsevišķiem apgalvojumiem.

Šajā paragrāfā mēs pētījām galvenokārt vispārīgu apgalvojumu īpašības un pierādīšanas metodes. Tas ir likumsakarīgi, jo matemātikā galvenokārt nākas pierādīt vispārīgus apgalvojumus. Tā, piemēram, uzdevumā „Dots, ka taisnleņķa trijstūra katetes ir 3 cm un 4 cm garas. Pierādīt, ka tā hipotenūzas garums ir 5 cm” arī ir jāpierāda vispārīgs apgalvojums, jo tas attiecas nevis tikai uz kādu vienu konkrētu trijstūri, bet uz visiem taisnleņķa trijstūriem, kam katetes ir 3 cm un 4 cm garas, neatkarīgi no tā, kur šis trijstūris ir novietots – burtnīcā vai uz tāfeles, Amerikā vai Latvijā u.tml. Tomēr jāpiekrīt, ka šis apgalvojums ir mazāk vispārīgs nekā Pitagora teorēma, kas apgalvo, ka taisnleņķa trijstūra hipotenūzas garuma kvadrāts ir vienāds ar šī trijstūra katešu garumu kvadrātu summu, neatkarīgi no tā, vai trijstūra katešu garumi ir 3 cm un 4 cm, vai arī jebkādi citi. Ja mēs novienojamie visu vienādo trijstūru kopu uzskatīt par **vienu objektu** (un šajā situācijā to darīt ir zināms pamats), tad mūsu sākumā formulētais apgalvojums kļūst atsevišķs, jo tas tagad attiecas tikai uz viena veida trijstūru kopu, kamēr Pitagora teorēma, protams, paliek vispārīgs apgalvojums arī šajā interpretācijā.

Tādas situācijas, kurās ir svarīgi, lai tiktu pierādīts kāds atsevišķs apgalvojums, var rasties, piemēram, ja ir doti 2 konkrēti ģeometriski objekti un ir jānoskaidro, kuram no tiem ir lielāks tilpums. Arī naturālo skaitļu teorijā līdzās atsevišķiem apgalvojumiem, kurus uzskatām par acīmredzamiem, piemēram, „80 ir pāra skaitlis”, „$58557+42693=42693+58557$”, ir tādi, kurus nepieciešams pierādīt, piemēram, „skaitļa 60 dalītāju summa (ieskaitot arī pašu skaitli 60), ir 156”, „skaitlis 97 ir pirmskaitlis”,

„$1+3+5+7+\ldots+99=50^2$”, utt., u.tml. Atsevišķu apgalvojumu pierādīšana par matemātiskiem objektiem, protams, ietilpst matemātikas kompetencē, tomēr jāatzīmē, ka matemātikas kā zinātnes attīstība nav mērojama ar to, cik daudz dažādu atsevišķu apgalvojumu tajā izdevies pierādīt. Matemātikā tiek veidota jēdzienu sistēma un pētītas šo jēdzienu īpašības. Tās parasti tiek izteiktas ar vispārīgiem apgalvojumiem. Matemātikai tipiska ir situācija, kad atsevišķais apgalvojums tiek pierādīts, saskatot tajā kāda pierādīta vispārīga apgalvojuma (jeb vispārējas likumsakarības) speciālgadījumu. Tā, piemēram, apgalvojums $1+3+5+\ldots+99=50^2$ ir vispārīga apgalvojuma $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ speciālgadījums, kas, savukārt izsaka speciālgadījumu no labi zināmās aritmētiskās progresijas summas formulas $S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$, kur a_1 – aritmētiskās progresijas pirmais loceklis, d – tās diference, n – progresijas locekļu skaits.

§3. PAR PIERĀDĪJUMIEM „NO PRETĒJĀ”

Viena no metodēm, kā pieveikt pretinieku strīdā, ir uzdot tam jautājumus, lai, atbildot uz tiem, viņš būtu spiests nonākt pie pretrunas vai acīmredzami aplama apgalvojuma, tādējādi piespiežot viņu atteikties no savas uzskatu sistēmas.

Matemātikā pierādījumi no pretējā jeb netiešie pierādījumi, izmantojot līdzīgu spriešanas shēmu, balstās uz t.s. „**izslēgtā trešā likumu**”**:**

Katram apgalvojumam A ir spēkā vai nu pats apgalvojums A, vai arī tā noliegums „Nav tiesa, ka A”.

Ja, piemēram, apgalvojums A izsaka, ka no Rīgas līdz Jelgavai ir 127 kilometri, tad „izslēgtā trešā likums” šajā situācijā nozīmē, ka vai nu no Rīgas līdz Jelgavai ir 127 kilometri, vai arī nav tiesa, ka no Rīgas līdz Jelgavai ir 127 kilometri (skaitļa 127 vietā varēja būt jebkurš cits skaitlis, piem., 1989; „izslēgtā trešā likums” ir spēkā neatkarīgi no tā, cik tālu patiesībā ir Rīga no Jelgavas).

Savukārt, ja apgalvojums A izsaka, ka „eksistē tāds naturāls skaitlis, kas vienāds ar pieckāršotu savu ciparu summu”, tad „izslēgtā trešā likums” šajā situācijā nozīmē, ka patiess ir vai nu apgalvojums „eksistē tāds naturāls skaitlis, kas vienāds ar pieckāršotu savu ciparu summu”, vai arī „nav tāda naturāla skaitļa, kas vienāds ar pieckāršotu savu ciparu summu”.

Interesants „izslēgtā trešā likuma” lietojuma piemērs iegūstams, ja apgalvojuma A lomā ņem „eksistē bezgalīgi daudz dvīņu pirmskaitļu pāru” (par dvīņu pirmskaitļiem sauc 2 tādus pirmskaitļus, kuru starpība ir 2; dvīņu pirmskaitļu pāru piemēri ir 3 un 5; 5 un 7; 11 un 13; 17 un 19; 29 un 31; utt.). „Izslēgtā trešā likums” apgalvo, ka ir spēkā viens no apgalvojumiem „Eksistē bezgalīgi daudz dvīņu pirmskaitļu pāru” un „Nav tiesa, ka eksistē bezgalīgi daudz dvīņu pirmskaitļu pāru”, kaut arī pašreiz pasaulē neviens nezina, kurš īsti.

„Izslēgtā trešā likums” nav matemātiski pierādāma teorēma, tas ir noformulēts cilvēces uzkrātās pieredzes rezultātā un ir pieskaitāms pie t.s. loģikas aksiomām. (Salīdziniet ar ģeometrijas aksiomām – tās arī tiek formulētas, vadoties no cilvēku uzkrātās pieredzes un netiek kaut kā „pierādītas”).

Komentārs.

Vārdu savienojums „izslēgtā trešā” jāuztver kā vienota vārdu kopa līdzīgi kā vārds „balta” teikumā „balta lapa”. Vārdu kopa „izslēgtā trešā” paskaidro, par kādu likumu ir runa. *Nevajag* iedomāties, ka ir kaut kāds „trešais likums”, kas ir izslēgts; **izslēgta ir trešā iespēja blakus iespējām A un „nav tiesa, ka A”**.

Apzīmēsim apgalvojumu „nav tiesa, ka A” saīsināti ar „neA” un izsekosim tagad pierādījuma no pretējā vispārīgo shēmu.

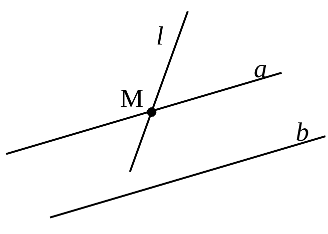
Ja mums ir jāpierāda apgalvojums A, tad varam spriest sekojoši: pēc izslēgtā trešā likuma ir spēkā vai nu A, vai arī neA. Ja mums izdotos pierādīt, ka nevar būt tā, ka spēkā ir neA, tad no šejienes varētu secināt, ka spēkā ir apgalvojums A, t.i. pierādāmais apgalvojums. Kā lai nonāk pie secinājuma, ka nevar būt tā, ka apgalvojums neA ir spēkā? Var pieņemt, ka tas ir spēkā, un konstatēt, ka šī pieņēmuma rezultātā mēs nonākam pie kaut kādas pretrunas. Pretruna rodas, ja mēs pieņēmuma rezultātā konstatējam kādu acīmredzamu aplamību, piem., 13=27, vai arī $(a+3)^2<0$, vai arī „trijstūra ABC malu garumi *a, b* un *c* apmierina nevienādību $a \geq b+c$” u.tml. Pretruna rodas arī tad, ja izdodas konstatēt, ka kāds apgalvojums ir spēkā reizē ar tā negāciju, piem., „četrstūra ABCD visas malas ir vienāda garuma” un „četrstūrī ABCD ir atrodamas divas dažāda garuma malas”, vai arī vienlaikus „$x>2$” un „$x \leq 2$”, u.tml. Pie pretrunas mēs nonākam arī tad, ja pieņēmuma rezultātā izdarītie secinājumi ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumos doto. Aplūkosim dažus piemērus.

13. piemērs.

Pierādīt: ja plaknē taisne l krusto taisni a un taisne b paralēla taisnei a, tad taisne l krusto arī taisni b.

Risinājums.

Pieņemsim pretējo, t.i. to, ka taisne *l* nekrusto taisni *b*.



Tad taisne *l* ir paralēla taisnei *b* (jo 2 taisnes, kas atrodas vienā plaknē, var būt tikai krustiskas vai paralēlas). Apzīmēsim taišņu *l* un *a* krustpunktu ar M, tad caur punktu

M iet divas taisnei *b* paralēlas taisnes *l* un *a*, tātad taisne *l* un *a* sakrīt. Bet tas ir pretrunā ar doto, kurā teikts, ka taisne *l* **krusto** taisni *a*. Tātad, pieņemot to, ka taisne *l* nekrusto taisni *b*, mēs esam nonākuši pie pretrunas ar doto, ka *l* krusto *a*; tātad pieņēmums, ka *l* nekrusto *b*, nevar būt patiess. Tātad, pēc izslēgtā trešā likuma, taisne *l* krusto taisni *b*, kas arī bija jāpierāda.

Komentārs.

Ievērosim, ka pretējo apgalvojumu apgalvojumam „taisne *l* krusto taisni *b*" mēs uzreiz rakstījām „taisne l nekrusto taisni *b*" tā vietā, lai rakstītu „nav tiesa, ka taisne *l* krusto taisni *b*", jo mēs saprotam, ka taisne *l* var tikai vai nu krustot taisni *b*, vai arī nekrustot to (trešās iespējas nav). Tomēr sarežģītākos gadījumos, veidojot pierādījumus no pretējā, allaž vajag uzmanīties, lai pareizi uzrakstītu apgalvojuma negāciju. Pievērsiet tam uzmanību, studējot tālākos piemērus.

14. piemērs.

Pierādīt, ka pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz.

Risinājums.

Pieņemsim pretējo, t.i., apgalvojumu „Nav tiesa, ka pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz". Tas nozīmē, ka vai nu pirmskaitļu vispār nav, vai arī, ka tie ir, bet galīgā skaitā [komentārs: gadījumu, kas pirmskaitļu vispār nav, šajā spriedumā atmest uzreiz nedrīkstēja, jo tas, ka pirmskaitļu ir galīgs skaits, nav pretējais apgalvojums apgalvojumam „pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz". Par šī, tāpat kā par otra varianta iespējamību mēs tūlīt pārliecināsimies, un tādējādi būsim izdarījuši tieši to, kas pierādījumā no pretējā vajadzīgs].

Tā kā skaitlis 2 ir pirmskaitlis, tad gadījums, ka pirmskaitļu vispār nav, nav iespējams. Gadījumā, ja pirmskaitļi eksistētu, bet to būtu galīgs skaits, apzīmēsim to skaitu ar *n*, bet visus pirmskaitļus ar p_1, p_2, …, p_n. Aplūkosim skaitli $N = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n + 1$. Skaidrs, ka *N* nedalās ne ar vienu no pirmskaitļiem p_1, p_2, …, p_n, tātad vai nu N pats ir pirmskaitlis vai arī N dalās ar kādu pirmskaitli, kas atšķirīgs no visiem p_1, p_2, …, p_n. Abos gadījumos skaidrs, ka eksistē pirmskaitlis (tas ir vai nu *N*, vai kāds cits skaitlis), kas atšķirīgs no p_1, p_2, …, p_n; tādējādi mēs esam ieguvuši pretrunu ar to, ka p_1, p_2, …, p_n ir **visi** pirmskaitļi. Tādējādi arī gadījumā, ja pirmskaitļu ir galīgs skaits, mēs nonākam pie pretrunas, kas norāda, ka arī šis gadījums nav iespējams. Tātad atliek vienīgi iespēja, ka pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz, kas arī bija jāpierāda.

12. uzdevums. *(grūts)*

Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz pirmskaitļu, kas izsakāmi formā $3t+2$*, kur* $t \in \mathrm{N}$*. (Tādi ir, piemēram, 5; 11; 17; ...)*

13. uzdevums.

Pierādīt, ka skaitlis 0,12345678910111213 14..., kas iegūstams, aiz komata uzrakstot pēc kārtas visus naturālos skaitļus, ir iracionāls. (Norādījums: pierādīt, ka izveidojusies decimāldaļa nav periodiska.)

15. piemērs. (Dirihlē princips)

Ja $n+1$ *objekti tiek kaut kā novietoti n kastēs , tad vismaz vienā kastē būs vairāk nekā viens objekts.*

Pierādījums.

Pieņemsim pretējo, t.i., ka **eksistē** tāds $n+1$ objektu izvietojums pa n kastēm, ka katrā kastē ir ne vairāk kā viens objekts. Tā kā ir pavisam n kastes, tad, liekot katrā kastē ne vairāk kā 1 objektu, var tajās kopā izvietot ne vairāk kā n objektus. Iegūta pretruna $n+1 \le n$, kas liecina, ka sākotnējais pieņēmums aplams.

1. vingrinājums.

Pierādīt, ka 50 ābolus nevar sadalīt 7 cilvēkiem tā, lai katrs dabūtu ne vairāk kā 7 ābolus. Vai, patvaļīgi sadalot 50 ābolus 7 cilvēkiem, noteikti gadīsies tā, ka vismaz viens cilvēks dabūs precīzi 8 ābolus?

Tipiska kļūda šāda vieda apgalvojumu pierādīšanā ir tāda, ka skolēns cenšas 50 ābolus sadalīt 7 daļās, iedalot 7 ābolus pirmajam cilvēkam, 7 – otrajam, utt., ..., 7 ābolus – sestajam cilvēkam. Šāds sadalīšanas mēģinājums beidzas ar neveiksmi – pēdējam, septītajam cilvēkam šajā gadījumā jādod visi atlikušie 8 āboli, bet 8>7. Diemžēl no neveiksmes šajā vienā speciālgadījumā nereti tiek izdarīts neargumentēts secinājums, ka vismaz vienam cilvēkam būs jāiedod vairāk nekā 7 āboli, dalot tos **jebkurā iespējamā** veidā. Apgalvojums, kas attiecas uz visiem iespējamiem ābolu sadalīšanas veidiem, tiek „pamatots”, aplūkojot tikai vienu konkrētu ābolu sadalīšanas veidu! Pareizi šo uzdevumu var atrisināt, spriežot līdzīgi kā Dirihlē principa pierādījumā (te parādās pierādījumu no pretējā „spēks”), sk. vingrinājumu atbildes.

14. uzdevums.

No plaknē dota punkta O dažādos virzienos novilkti 19 stari. Pierādīt, ka eksistē 2 tādi no šiem stariem, leņķis starp kuriem ir mazāks par 19^o.

15. uzdevums.

Pierādīt, ka katram trijstūrim vismaz viens no leņķiem nav mazāks par 60^o.

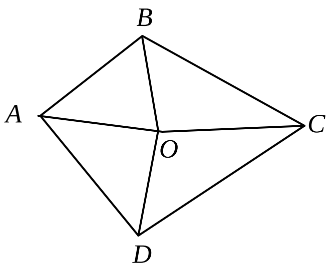
<u>16. piemērs.</u>

Ap četrstūra malām kā ap diametriem konstruēti riņķi. Pierādīt, ka katrs četrstūra iekšējs punkts pieder vismaz vienam no šiem riņķiem.

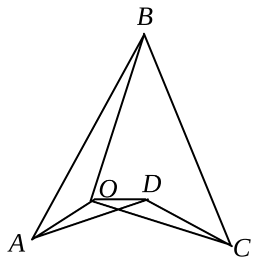
Risinājums.

Pieņemsim pretējo, t.i., ka eksistē tāds četrstūris *ABCD* un tajā eksistē tāds punkts *O*, kas nepieder nevienam no riņķiem, kas konstruēti uz *AB*, *BC*, *CD* un *DA* kā uz diametriem. Novelkam starus *OA*, *OB*, *OC* un *OD* un apskatām leņķus $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOA$.

Ja četrstūris *ABCD* ir izliekts, tad $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA = 360°$; savukārt, ja ABCD nav izliekts (t.i. ir ieliekts), tad $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA \geq 360°$.



10.zīm.



11.zīm.

Abos gadījumos varam apgalvot, ka vismaz viens no leņķiem $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOA$ nav šaurs (ja leņķi $\angle AOB$,

$\angle BOC$, $\angle COD$ un $\angle DOA$ visi būtu šauri, tad to summa būtu mazāka par $360°$; tas ir pretrunā ar iegūto $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA \geq 360°$). Ja ne-šaurais leņķis ir $\angle AOB$, tad punkts *O* atrodas riņķa ar diametru *AB* iekšpusē; ja tas ir $\angle BOC$, tad – riņķa ar diametru *BC* iekšpusē, ja $\angle COD$ – tad riņķa ar diametru *CD* iekšpusē, ja $\angle DOA$, tad - riņķa ar diametru AD iekšpusē.

Noformulēsim tagad dažus vispārējus likumus, kā pareizi formēt dažāda tipa apgalvojumu negāciju.

A	**neA**
Katram *x* izpildās B.	Eksistē (var atrast) tādu *x*, kam neizpildās B (Nav tiesa, ka katram *x* izpildās B).
Eksistē tāds *x*, kam izpildās C.	Katram *x* izpildās ne C (nav tiesa, ka eksistē *x*, kam izpildās C; nevienam *x* neizpildās C).
Piemēri:	
Katram naturālam *n* izpildās $2^n > n^2$	Eksistē tāds naturāls *n*, kam nav spēkā $2^n > n^2$ (eksistē tāds naturāls n, kam $2^n \leq n^2$)
Katram kvadrātam diagonāles ir perpendikulāras	Eksistē tāds kvadrāts, kam diagonāles nav perpendikulāras
Eksistē tāds *x*, ka $x = 4$	Katram *x* „nav spēkā, ka $x = 4$” (katram *x* izpildās $x \neq 4$)
Katram naturālam *n* eksistē tāds naturāls *m*, ka $n = m + 1$	Eksistē tāds naturāls *n*, ka katram naturālam *m* $n \neq m + 1$ (eksistē tāds naturāls *n*, kas nevienam naturālam *m* nav vienāds ar $m + 1$)

2. vingrinājums.

Formulēt apgalvojumu negācijas:

(a) *katram x no dotās kopas M izpildās* $x^2 < 4$,

(b) *eksistē naturāls skaitlis n, kam* $2^n > n^2$,

(c) *visi sešstūra ABCDEF leņķi ir šauri,*

(d) *eksistē tāds pirmskaitlis p, kurš ir pāra skaitlis,*

(e) *katram pirmskaitlim p skaitlis* 2^p *arī ir pirmskaitlis,*

(f) *53 ir vislielākais naturālais skaitlis,*

(g) *katriem diviem naturāliem skaitļiem m un n pastāv vienādība* $m+n=n+m$,

(h) *katriem diviem naturāliem m un n eksistē tāds naturāls z, ka* $z=m\cdot n$,

(i) *Juris, Jānis un Pēteris ir skolēni.*

Salīdziniet savas atbildes ar brošūras beigās dotajām!

Noslēdzot paragrāfu par pierādījumiem no pretējā, aplūkosim vēl vienu piemēru.

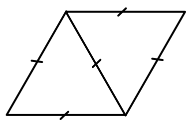
<u>17. piemērs.</u>

Pierādīt, ka plakni nevar izkrāsot 3 krāsās tā, lai nekādi 2 punkti, kas atrodas viens no otra attālumā 1, nebūtu nokrāsoti vienā krāsā.

Risinājums.

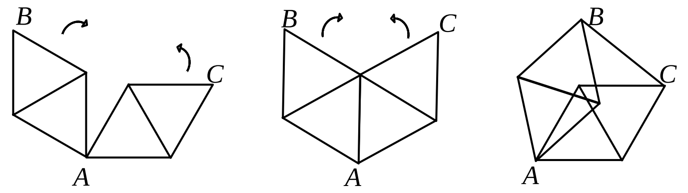
Pieņemsim pretējo, t.i., ka eksistē tāds plaknes krāsojums 3 krāsās, ka nekādi 2 punkti, kas atrodas viens no otra attālumā 1, nav nokrāsoti vienā krāsā.

Figūru plaknē nosauksim par **pareizu rombu**, ja tā iegūstama no 2 regulāriem trijstūriem ar malas garumu 1, salipinot tiem kopā vienu malu (skat. 12.zīm.).



12.zīm.

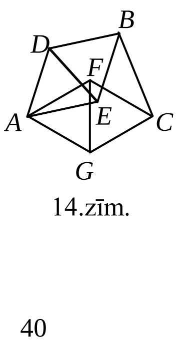
Aplūkosim 2 pareizus rombus, kam sakrīt viena no šaurā leņķa virsotnēm (apzīmēsim šo sakrītošo virsotni ar A, bet atlikušās rombu šauro leņķu virsotnes ar *B* un *C*). Ievērosim, ka $|AB| = |AC| = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} > 1 > \frac{1}{2}$, tātad abus pareizos rombus var novietot tā, ka $|BC| = 1$ (tāpat kā katra no pareizo rombu malām, skat. 13.zīm. (c).)



(a) (b) (c)

13.zīm.

Pierakstīsim izveidotajā konstrukcijā burtus arī pārējām pareizo rombu virsotnēm, kā parādīts 14.zīm. Paanalizēsim ,kādā veidā var tikt nokrāsotas virsotnes *A, B, C, D, E, F,* G šajā (vienā, jebkurā no šādām) konstrukcijā. Uzskatāmības labad nosauksim krāsas, kurās nokrāsota plakne, par sarkanu, zilu un dzeltenu, pie tam tā, lai tā krāsa, kurā nokrāsota virsotne *A*, būtu sarkanā (šādi krāsu nosaukumi nekādi neierobežo sprieduma vispārīgumu). Tā kā plaknē nekādi 2 punkti, kas atrodas attālumā 1 viens no otra, nav nokrāsoti vienā krāsā, tad punkti *A*, *E* un *D* ir nokrāsoti katrs citā krāsā, tātad viens no tiem (*A*) ir sarkans, viens – dzeltens un viens – zils; citiem vārdiem sakot, viens no punktiem *E* un *D* ir nokrāsots dzeltenā krāsā, bet otrs – zilā.



14.zīm.

Aplūkosim tagad punktus *B*, *E* un *D*. Arī tie ir nokrāsoti katrs savā krāsā, jo atrodas vienādmalu trijstūra ar malas garumu 1 virsotnēs, tātad punkts *B* nevar būt nokrāsots nedz dzeltenā, nedz zilā krāsā (jo viens no punktiem *E* un *D* ir dzeltens, bet otrs – zils). Tātad punkts *B* ir nokrāsots sarkanā krāsā (tāpat kā punkts *A*). Atcerēsimies to.

Analoģiski kā iepriekš secinām, ka viens no punktiem *F* un *G* ir dzeltenā, bet otrs – zilā krāsā, jo tie kopā ar punktu *A*, kas ir sarkanā krāsā, atrodas vienādmalu trijstūra ar malas garumu 1 virsotnēs. Tā kā vienādmalu trijstūra ar malas garumu 1 virsotnēs atrodas arī punkti *F*, *G* un *C*, tad tie visi ir dažādās krāsās, bet, tā kā viens no punktiem *F* un *G* ir dzeltens, bet otrs – zils, tad punkts *C* ir nokrāsots sarkanā krāsā.

Atcerēsimies tagad, ka konstrukcijā pareizie rombi tika novietoti tā, lai $|BC| = 1$, kā arī to, ka punkts B ir nokrāsots sarkanā krāsā. Esam atraduši 2 punktus B un C, kas abi nokrāsoti vienā (sarkanā) krāsā un atrodas attālumā 1 viens no otra. Tas ir pretrunā ar pieņēmumu, ka nekādi 2 punkti, kas atrodas viens no otra attālumā 1, nav nokrāsoti vienā krāsā. Līdz ar to uzdevumā prasītais pierādīts.

Komentārs.

Šajā uzdevumā pieņemtais pretējais apgalvojums deva iespēju uzbūvēt veselu konstrukciju celtni, un pretruna tika iegūta, izpētot šīs celtnes īpašības. Šī ir diezgan tipiska situācija daudzu apgalvojumu pierādīšanā.

16. uzdevums.

Pierādīt, ka uz riņķa līnijas nevar novietot skaitļus 1, 2, 3, ..., 13 tā, lai starpība starp katriem diviem blakus esošiem skaitļiem būtu 3, 4, vai 5.

17. uzdevums.

Plakne sadalīta kvadrātos kā rūtiņu lapa. Katrā kvadrātā ierakstīts naturāls skaitlis, pie tam katrs skaitlis ir astoņu tam blakus esošo skaitļu vidējais aritmētiskais. Pierādīt, ka visi skaitļi vienādi.

§4. KO NOZĪMĒ ATRISINĀT UZDEVUMU?

Ir daudz tādu uzdevumu, kuros atklāti prasīts pierādīt kaut kāda apgalvojuma patiesumu, izejot no zināmiem dotiem nosacījumiem. Tomēr lielākajā uzdevumu daļā pierādāmais apgalvojums vēl ir jāatrod; uzdevums var būt noformulēts jautājuma formā, piemēram, „Vai tiesa, ka eksistē tādi naturāli skaitļi *x*, *y*, *z* un tāds naturāls skaitlis $n \geq 3$, ka $x^n + y^n = z^n$?”.

Uzdevumā var tikt prasīts atrisināt kaut kādu vienādojumu vai nevienādību, piemēram, „Atrast vienādojuma $(x-1)(x+5)=0$ atrisinājumu kopu”.

Var arī gadīties, ka jāatrod kāds objekts, kas apmierina noteiktas īpašības, piemēram, „Atrast vismazāko tādu *n* vērtību (*n* – naturāls), kurai skaitlis $3n+4$ dalās ar 17”.

Katrā šādā situācijā uzdevuma risinājumam līdz ar pareizās atbildes formulējumu (piem. {1; –5} otrajā piemērā) ir jāsatur arī pamatojums (jeb pierādījums!) tam, ka Jūsu izvēlētā atbilde tiešām ir pareizā (piem., pierādījums tam, ka 10 ir mazākā iespējamā naturālā *n* vērtība, kurai skaitlis $3n+4$ dalās ar 17).

Aplūkosim šajā un nākamajos paragrāfos dažas likumsakarības, kas jāievēro, risinot šāda un līdzīga veida uzdevumus.

Atzīmēsim vēl tikai, ka jebkāda veida reālā pētnieciskā darbībā, kā likums, nākas sastapties tieši ar uzdevumiem, kuros pareizā atbilde priekšā nav pateikta. Pētījuma rezultātam, protams, zinātniska vērtība būs tikai tad, ja atrastā atbilde ir nopamatota (skat. Ievadu).

Aplūkosim tagad virkni piemēru.

18. piemērs.

Vai iespējams 20 vērdiņus samaksāt ar 9 monētām, ja atļauts lietot tikai 1 vērdiņa, 3 vērdiņu un 5 vērdiņu monētas?

Komentārs.

Pēc izslēgtā trešā likuma, vai nu ir iespējams šādi samaksāt 20 vērdiņus, vai arī tas nav iespējams. Kad ir atrasta (uzminēta) pareizā atbilde, tās pierādījums veicams ar tādu pašu loģisko stingrību, kā aplūkojām iepriekšējos piemēros.

Risinājums.

Pierādīsim, ka 20 vērdiņus ar deviņiem 1 vērdiņa, 3 vērdiņu un 5 vērdiņu monētām samaksāt nevar. Pieņemsim pretējo, t.i., ka mēs varam 20 vērdiņus samaksāt, lietojot k_1 vienvērdiņus, k_3 trīsvērdiņus un k_5 piecvērdiņus (k_1, k_3, $k_5 \geq 0$ – veseli skaitļi), t.i., ka eksistē tādi veseli nenegatīvi k_1, k_3 un k_5, ka

$$\begin{cases} k_1 + k_3 + k_5 = 9 & \text{(monētu skaits)} \\ k_1 + 3k_3 + 5k_5 = 20 & \text{(monētu kopējā vērtība)} \end{cases}$$

Atņemot no sistēmas otrā vienādojuma pirmo, iegūstam

$$2k_3 + 4k_5 = 11 \text{ jeb } k_3 + 2k_5 = 5\frac{1}{2},$$

kas ir pretrunā ar to, ka k_3 un k_5 ir veseli skaitļi. Līdz ar to pieņēmums, ka uzdevumā minēto maksāšanu var izdarīt, ir nepareizs.

Komentārs.

Apgalvojums „25 vērdiņus nevar samaksāt ar deviņām vienvērdiņa, trīsvērdiņu un piecvērdiņu monētām" ir „katram" – tipa vispārīgs apgalvojums, jo tas apgalvo: **lai arī kā** izvēlētos deviņas vienvērdiņa, trīsvērdiņu un piecvērdiņu monētas, to kopējā vērtība nevar būt 20 vērdiņi. Tādēļ arī pierādījums jāveido tā, lai aptvertu visas iespējamās maksāšanas stratēģijas, bet nevis tikai kādu vienu konkrētu, kura pirmajā brīdī ar kaut ko izceļas.

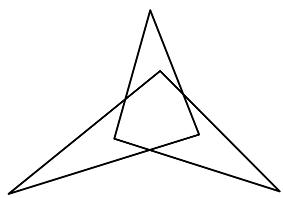
Nodemonstrētais uzdevuma risinājums, protams, nebūt nav vienīgais iespējamais. Varēja, piemēram, ievērot, ka 1, 3 un 5 ir nepāra skaitļi, 9 nepāra skaitļu summa arī ir nepāra skaitlis un tātad nevar būt 20. Nav svarīgi, kāda pierādījuma metode ir lietota, svarīgi ir, lai ar to tiktu aptverti visi iespējamie maksāšanas varianti.

<u>19. piemērs.</u>

Vai eksistē tāda noslēgta lauzta līnija, kas katru savu posmu krusto precīzi 1 reizi?

Risinājums.

Jā, eksistē. (skat. 15.zīm.)



15.zīm.

20. piemērs.

a) Vai var katrā

tabulas rindiņā ierakstīt skaitļus no 1 līdz 5 tā, lai pa kolonnām ierakstīto skaitļu starpības būtu dažādas (2 dažādu skaitļu starpību atrod, no lielākā skaitļa atņemot mazāko)?

b) Vai var šādi katrā tabulas 2×10 *rindiņā ierakstīt skaitļus no 1 līdz 10?*

Risinājums.

a) To var izdarīt, piemēram, šādi:

	1	2	3	4	5
	4	2	5	3	1
starpības:	3	0	2	1	4

16.zīm.

b) pierādīsim, ka to izdarīt nevar. Pieņemsim pretējo, t.i., ka mums ir izdevies ierakstīt tabulā 2×10 katrā rindiņā skaitļus no 1 līdz 10 tā, ka pa kolonnām ierakstīto skaitļu starpības ir dažādas. Apzīmēsim 1. rindiņas skaitļus ar x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}, 2. rindiņas skaitļus ar y_1, y_2, y_3, ..., y_{10}, to starpības pa kolonnām ar d_1, d_2, d_3, ..., d_{10} (skat. 17.zīm.).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
starpības:	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}

17.zīm.

Lielākā iespējamā d_i vērtība ir 9, mazākā iespējamā d_i vērtība ir 0 (atcerēsimies, ka mēs 2 dažādu skaitļu starpību atrodam, atņemot no lielākā skaitļa mazāko, kā arī to, ka $1\le x_i \le 10$, $1\le y_i \le 10$). Tā kā pēc pieņēmuma visi d_i ir dažādi, tad tie pieņem visas veselās vērtības no 0 līdz 9 (ir 10 šādas vērtības un 10 dažādi

d_i, pie kam neviens no d_i nekādu citu vērtību pieņemt nevar). Tātad $d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_{10} = 0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$. Atcerēsimies to.

Līdz ar pa kolonnām ierakstīto skaitļu starpībām aplūkosim arī to summas s_1, s_2, ..., s_{10}; $s_1 = x_1 + y_1$, $s_2 = x_2 + y_2$, $s_3 = x_3 + y_3$, ..., $s_{10} = x_{10} + y_{10}$ (skat. 18.zīm.)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
starpības:	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}
summas:	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}

18.zīm.

Ievērosim, ka katrā kolonnā starpība d_i atšķiras no summas s_i par pāra skaitli: ja $x_i \geq y_i$, tad $d_i = x_i - y_i$,

$$s_i = x_i + y_i,$$
$$s_i - d_i = 2y_i,$$

ja $x_i < y_i$, tad $d_i = y_i - x_i$,

$$s_i = x_i + y_i,$$
$$s_i - d_i = 2x_i$$

Tātad arī summa $(s_1 - d_1) + (s_2 - d_2) + \ldots + (s_{10} - d_{10}) = M$ ir pāra skaitlis, jo izsakāma kā 10 pāra skaitļu summa.

Pārveidojot šo vienādību un ņemot vērā, ka $d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_{10} = 45$, iegūstam:

$$(s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_{10}) - (d_1 + d_2 + \ldots + d_{10}) = M$$
$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_{10} = M + 45,$$

pie tam M ir pāra skaitlis.

No otras puses

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_{10} = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \ldots + (x_{10} + y_{10}) =$$
$$= (x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}) =$$
$$= (1 + 2 + \ldots + 10) + (1 + 2 + \ldots + 10) = 2 \cdot 55 = 110,$$

jo gan x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}, gan arī y_1, y_2, y_3, ..., y_{10} ir kaut kādā kārtībā uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 10.

Līdz ar to esam ieguvuši $110 = M + 45$, kas ir pretrunā ar iepriekš konstatēto, ka M ir pāra skaitlis. Tādējādi esam pierādījuši, ka tabulu 2×10 uzdevuma prasībām atbilstoši aizpildīt nevar.

Komentārs.

Uzdevuma formulējums (a) un (b) punktos bija visai līdzīgs. Neskatoties uz to, tajos bija nepieciešamas principā dažādas metodes izteiktās atbildes pamatošanā. Ja (a) gadījumā mums nācās pierādīt „eksistē” – tipa apgalvojumu, ko mēs izdarījām, uzrādot vienu iespējamu tabulas aizpildījumu, tad (b) gadījumā vajadzēja pierādīt, ka, **lai kā arī mēs aizpildītu tabulu**, rakstot katrā tās rindiņā skaitļus no 1 līdz 10, mēs nevaram panākt, lai pa kolonām ņemto skaitļu starpības visas būtu dažādas. Tas arī tika izdarīts. Pierādījums, kas tika veikts, aptvēra pilnīgi visus iespējamos skaitļu izvietojumus tabulā.

Tipiska kļūda, risinot šādus uzdevumus, ir tā, ka risinātājs cenšas salikt skaitļus tabulā, viņam to relatīvi īsā laikā neizdodas izdarīt, un tādēļ (absolūti nepamatoti) viņš pasludina, ka skaitļus tabulā šādi sarakstīt **vispār** nav iespējams.

Tiešām, var taču gadīties, ka piemēru atrast nav viegli, bet tas neatbrīvo uzdevuma risinātāju no nepieciešamības to tomēr sameklēt!

Varam ievērot, ka šajā gadījumā izšķirošais faktors, no kā izdevās dabūt pretrunu, bija **paritāte**; tā palīdz arī daudzos citos neiespējamības pierādījumos.

Tagad atkal daži uzdevumi patstāvīgai risināšanai.

18. uzdevums.

Vai trīs latus var samaksāt 20 monētās pa 50, 20 un 5 santīmiem?

19. uzdevums.

Vai eksistē tāda noslēgta lauzta līnija, kas katru savu posmu krusto tieši 3 reizes?

20. uzdevums.

Dots šaha galdiņš 5×5 *rūtiņas. Vienā no tām stāv šaha zirdziņš. Vai var izdarīt ar šaha zirdziņu 24 gājienus tā, lai zirdziņš pa vienai reizei apmeklētu visas pārējās rūtiņas? Aplūkojiet 2 gadījumus:*

a) *zirdziņš sākumā atrodas rūtiņā A,*

b) *zirdziņš sākumā atrodas rūtiņā B (skat. 19.zīm.).*

A				
B				

19.zīm.

Jautājums, kas izvirzīts uzdevuma formulējumā, var saturēt ne tikai divas atbildes alternatīvas „jā" un „nē". Bieži vien ir jānosaka kāda lieluma skaitliskā vērtība; var būt arī tā, ka prasīt atrast kādu skaitli vai citādas dabas objektu, kam piemīt uzdevumā uzrādītā īpašība. Arī visos šajos gadījumos uzdevuma risinājuma sastāvdaļa ir atbildes pareizības pierādījums. Bieži vien (bet ne vienmēr!) šādu pierādījumu sevī satur pati risināšanas gaita vai konstrukcija; atbildes pareizības pierādījumam nav obligāti jābūt atsevišķi izdalītam risinājuma etapam. Kā visiem matemātiskiem spriedumiem, galvenais arī šāda veida uzdevumu risinājumos ir loģiskā stingrība un pamatotība.

21. piemērs.

Kādiem naturāliem n skaitlis $2^n + 65$ *ir pilns kvadrāts?*

Komentārs.

Viegli redzēt, ka gadījumā, ja $n = 4$, tad $2^n + 65 = 81$ ir pilns kvadrāts. Taču šī vēl nav atbilde uz uzdevumā formulēto jautājumu. Šajā uzdevumā ir 1) jāatrod visas n vērtības, kam $2^n + 65$ ir pilns kvadrāts, 2) jāpierāda, ka citu iespējamu *n* vērtību bez jau atrastajām nav (šajā uzdevumā netiek prasīts, vai eksistē tāds *n*, bet tiek prasīta izsmeļoša atbilde – kādi *n* ir ar šādu īpašību?).

Risinājums.

Ievērosim vispirms, ka katram naturālam k $2^{4k} = (2^4)^k = 16^k$ beidzas ar ciparu 6 (ja sareizina 2 vai vairākus skaitļus, kam pēdējais cipars ir 6, tad arī reizinājumam pēdējais cipars ir 6).

Savukārt, ja $n = 4k+1$, $k \in \mathrm{N}$ vai $k = 0$, tad skaitļa $2^n = 2^{4k+1} = 2 \cdot 2^{4k}$ pēdējais cipars ir 2, jo tas ir izsakāms kā 2 skaitļu reizinājums, no kuriem viens beidzas ar ciparu 2, bet otrs – ar ciparu 6 (vai 1, ja $k = 0$). Ja $n = 4k+1$ ($k \in \mathrm{N}$), tad $2^n + 65$ beidzas ar ciparu 7 un tādējādi nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts. (Pierādiet to! Skat piemēru par atlikumiem, naturāla skaitļa kvadrātu dalot ar 3, paragrāfā par vispārīgiem un atsevišķiem apgalvojumiem.)

Ja $n = 4k+3$, $k \in \mathrm{N}$ vai $k = 0$, tad līdzīgā veidā secinām, ka 2^n beidzas ar ciparu 8 un $2^n + 65$ – ar ciparu 3, tātad arī nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

Tā kā katrs nepāra skaitlis ir izsakāms vai nu formā $n = 4k+1$ ($k \in \mathrm{N}$ vai $k = 0$), vai arī $n = 4k+3$ ($k \in \mathrm{N}$ vai $k = 0$), tad secinām: ja *n* ir nepāra skaitlis, tad $2^n + 65$ nav naturāla skaitļa kvadrāts.

Aplūkosim tagad gadījumu, kad *n* – pāra skaitlis. Tad eksistē tāds $k \in \mathrm{N}$, ka $n = 2k$. Ja $n > 10$, tad $k > 5$ un $(2^k+1)^2 = 2^{2k} + 2 \cdot 2^k + 1 > 2^{2k} + 65$, tādējādi, ja $n > 10$, tad $(2^k)^2 = 2^{2k} < 2^{2k} + 65 < (2^k+1)^2$ (atceramies, ka $n = 2k$). Tādējādi $2^{2k} + 65$ atrodas starp divu blakus esošu naturālu skaitļu kvadrātiem un tātad pats nevar būt pilns kvadrāts. Lai pabeigtu uzdevuma risinājumu, jāpārbauda n vērtības $n = 2$, $n = 4$, $n = 6$, $n = 8$ un $n = 10$. No tām der tikai $n = 4$ un $n = 10$ ($16 + 65 = 81 = 9^2$; $2^{10} + 65 = 1024 + 65 = 1089 = 33^2$), tādēļ atbilde šajā uzdevumā ir „$2^n + 65$ ir naturāla skaitļa kvadrāts tad un tikai tad , ja $n = 4$ vai $n = 10$”.

Komentārs.

Šajā risinājumā tika veikta izsmeļoša gadījumu analīze. Vispirms tika pierādīts: lai $2^n + 65$ būtu pilns kvadrāts, tad *n* nevar būt nepāra skaitlis. Tad tika pierādīts, ka *n* nevar būt pāra skaitlis, kas lielāks par 10. Pēc tam atlikušās *n* vērtības tika vienkārši pārbaudītas. Mēs redzam, ka sākotnēji izvirzītā hipotēze, ka $2^n + 65$ ir pilns kvadrāts tikai tad, ja $n = 4$, izsmeļošas analīzes rezultātā izrādījās nepareiza. Šis piemērs ir pamācošs arī no tā viedokļa, ka analīze tajā tika veikta, sadalot visas iespējamās *n* vērtības vairākās (trijās) grupās, pēc tam lietojot katrā no tām savu, speciāli tai piemērotu spriešanas metodi.

22. piemērs.

Kastītē ir 7 sarkani un 5 zili zīmuļi. Kāds mazākais zīmuļu skaits jāpaņem, lai starp tiem noteikti būtu ne mazāk kā 2 sarkani un ne mazāk kā 3 zili zīmuļi?

Risinājums.

Pierādīsim, ka šis skaits ir 10 zīmuļi. Lai to izdarītu, mums ir jāpierāda 2 lietas:

(a) ja mēs paņemsim no kastītes 10 zīmuļus, tad starp tiem noteikti būs ne mazāk kā 2 sarkani un ne mazāk kā 3 zili zīmuļi,

(b) ja mēs no kastītes paņemsim mazāk nekā 10 zīmuļus, tad var gadīties tā, ka starp paņemtajiem zīmuļiem ir vai nu mazāk nekā 2 sarkani, vai arī mazāk nekā 3 zili zīmuļi.

Apgalvojuma (a) pareizība izriet no tā, ka, paņemot 10 zīmuļus, kastītē paliek 2 zīmuļi, tātad kastītē paliek ne vairāk kā 2 sarkani un ne vairāk kā 2 zili zīmuļi. Tātad paņemti ir vismaz 5 sarkani un 3 zili zīmuļi.

Apgalvojuma (b) pareizība izriet no tā, ka, paņemot 9 (vai mazāk) zīmuļus, var gadīties: kastītē paliek 3 vai vairāk zili zīmuļi, tātad paņemti ne vairāk kā 2 zili zīmuļi.

Komentārs.

Šī uzdevuma risinājuma sadalījums (a) un (b) punktos ilustrē vārda „vismazākais" jēgu. Uzrādot kādu skaitli, par kuru mēs apgalvojam, ka tas ir vismazākais, mums ir jāpierāda, ka šis skaitlis ir pietiekošs ,lai apmierinātu uzdevuma prasības, bet visi skaitļi, kas ir mazāki par to, ir „par mazu", lai tās apmierinātu.

21. uzdevums.

Tumšā noliktavā ir 10 pāri melnu un 10 pāri brūnu zābaku. Atrast vismazāko zābaku skaitu, kas jāpaņem no noliktavas, lai starp tiem atrastos vismaz vienas krāsas pāris (uzskatīt, ka tumsā nevar atšķirt ne tikai zābaku krāsu, bet arī labo zābaku no kreisā).

22. uzdevums.

Pierādīt, ka 10 ir vismazākā naturālā n vērtība, kurai skaitlis $3n+4$ *dalās ar 17.*

23. piemērs. (Ramseja uzdevums)

Kāds ir vismazākais cilvēku skaits, lai starp tiem garantēti būtu vai nu 3 cilvēki, kas visi savā starpā pazīstami, vai arī 3 cilvēki, no kuriem neviens nepazīst otru?

Risinājums.

Apzīmēsim šo skaitu ar $R(3,3)$. Saskaņā ar tā definīciju tam ir sekojošas īpašības:

(a) starp $R(3,3)$ cilvēkiem noteikti var atrast vai nu 3 savstarpēji pazīstamus, vai arī 3 cilvēkus, kas nepazīst viens otru.

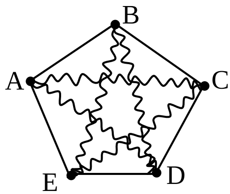
(b) katram cilvēku skaitam *n*, kas mazāks par $R(3,3)$, var gadīties: starp *n* cilvēkiem nav ne triju savā starpā pazīstamu, ne arī triju, kas nepazīst viens otru.

Acīmredzami, ka šajā gadījumā (b) punkts ekvivalenti aizstājams ar sekojošu:

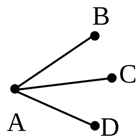
(b') var gadīties tā, ka starp $R(3,3)-1$ cilvēkiem nav ne triju savā starpā pazīstamu, ne arī triju, kas nepazīst viens otru.

Pierādīsim, ka $R(3,3)=6$. Norunāsim uzskatāmības labad attēlot cilvēkus kā punktus plaknē, 2 savstarpēji pazīstamiem cilvēkiem atbilstošos punktus savienosim ar taisnu līniju, bet savstarpēji nepazīstamiem – ar viļņotu.

Vispirms pierādīsim, ka $R(3,3)-1\geq 5$**,** t.i., to, ka starp 5 cilvēkiem var nebūt nedz triju savā starpā pazīstamu, nedz arī triju, kas nepazīst viens otru. Cilvēki var būt pazīstami, piemēram, tā, kā attēlots 20. zīmējumā. Viegli redzēt, ka starp katriem 3 cilvēkiem no šiem pieciem ir gan divi pazīstami, gan arī 2 nepazīstami (par to var pārliecināties, kaut vai pārbaudot visus iespējamos veidus, kādos no cilvēkiem A, B, C, D un E var izvēlēties 3 cilvēkus).



20.zīm.

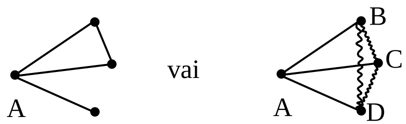


21.zīm.

Tagad pāriesim pie (a) punkta pierādījuma, t.i., pierādīsim, ka starp 6 cilvēkiem noteikti varēs atrast vai nu 3 savstarpēji pazīstamus, vai arī 3 savstarpēji nepazīstamus.

Aplūkojam vienu no šiem 6 cilvēkiem; nosauksim to par A. No atlikušajiem pieciem cilvēkiem ir vai nu trīs tādi, ar kuriem A ir pazīstams, vai arī trīs tādi, ne ar vienu no kuriem A nav pazīstams; apzīmēsim šos cilvēkus ar B, C un D. Aplūkosim vispirms gadījumu, kad A ir pazīstams ar B, C un D (skat. 21.zīm.). Ja kādi divi no cilvēkiem B, C un D ir pazīstami savā starpā, tad kopā ar A tie veido trīs cilvēkus, kas visi pazīst viens otru.

Ja turpretī starp B, C un D nav divu savstarpēji pazīstamu cilvēku, tad B, C un D ir trīs cilvēki, kas nepazīst viens otru (skat. 22.zīm.).



22.zīm.

Gadījumā, ja eksistē tādi 3 cilvēki B, C un D, no kuriem A nav pazīstams ne ar vienu, spriežam līdzīgi: ja starp B, C un D ir divi, kas nepazīst viens otru, tad kopā ar A tie veido trīs cilvēkus, kas nepazīst viens otru; ja savukārt B, C un D visi ir savā starpā pazīstami, tad tie ir trīs savā starpā pazīstami cilvēki.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka visos iespējamos gadījumos starp 6 cilvēkiem noteikti var atrast vai nu 3 savstarpēji pazīstamus, vai arī 3 savstarpēji nepazīstamus, tātad $R(3,3) \geq 6$. Ņemot vērā iepriekš pierādīto (b') punkta rezultātu $R(3,3) - 1 \geq 5$, secinām, ka $R(3,3) = 6$. Līdz ar to uzdevuma risinājums pabeigts.

Noformulēsim tagad vispārīgo Ramseja uzdevumu. Apzīmēsim ar $R(m,k)$ to vismazāko cilvēku skaitu, par kuru var garantēt, ka starp tiem ir vai nu *m* viens ar otru pa pāriem pazīstami, vai arī *k* tādi, no kuriem neviens nepazīst otru (t.i., starp jebkuriem $R(m,k)$ cilvēkiem obligāti atradīsies vai nu *m* savstarpēji pazīstami, vai arī *k* savstarpēji nepazīstami, bet var gadīties, ka starp $R(m,k)-1$ cilvēkiem nevar atrast ne viena, ne otra veida sabiedrību. Patstāvīgai risināšanai atstāsim dažus grūtus, bet interesantus uzdevumus, kas saistīti ar Ramseja skaitļiem $R(m,k)$.

23. uzdevums

Pierādīt, ka $R(4,3) \geq 9$. *(Pierādīt, ka starp 9 cilvēkiem noteikti var atrast vai nu 4, kas visi pazīst viens otru, vai arī 3, starp kuriem nav divu pazīstamu.)*

24. uzdevums

Pierādīt, ka $R(4,3)-1 \geq 8$. *(Pierādīt, ka var gadīties: starp 8 cilvēkiem nav nedz 4 tādu, kas visi ir savstarpēji pazīstami, nedz arī 3 tādu, kas visi ir savstarpēji nepazīstami.)*

Norādījums: jākonstruē piemērs.

Varam šeit bez pierādījuma atzīmēt arī, ka $R(5,3)=14$, $R(4,4)=18$ (to pierādīt vēl nav pārāk grūti). Tomēr vispārējā problēma: atrast $R(m,k)$ pēc dotiem m un k ir izrādījusies ārkārtīgi grūta. Pašlaik pasaulē vēl neviens nezina tās apmierinošu atrisinājumu.

§5. NEVIENĀDĪBU UN VIENĀDOJUMU RISINĀŠANA

Arī atgriežoties mazliet tuvāk skolas programmā parastiem uzdevumiem, jēga tam, ko nozīmē atrisināt uzdevumu, nemainās. Aplūkosim piemēru.

24. piemērs.

Atrisināt nevienādību $(x-2)^2 \le 1$.

Komentārs.

Risinot šo nevienādību, mēs pierādīsim, ka tās atrisinājumu kopa ir $[1;3]$; t.i., mēs pierādīsim, ka nevienādību $(x-2)^2 \le 1$ apmierina tās un tikai tās x vērtības, kas atrodas intervālā $[1;3]$. Citiem vārdiem sakot, mēs pierādīsim, ka

(a) ja $x \in [1;3]$, tad $(x-2)^2 \le 1$,

(b) ja $x \notin [1;3]$, tad nav tiesa, ka $(x-2)^2 \le 1$ (jeb, ekvivalenti, ja $(x-2)^2 \le 1$, tad $x \in [1;3]$).

Risinājums.

$$(x-2)^2 \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x-2| \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \le x-2 \le 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ 1 \le x \le 3 \ \Leftrightarrow \ x \in [1;3].$$

Komentārs.

Zīmīte „$\Leftrightarrow$” lietota vārdkopas „tad un tikai tad” („tām un tikai tām x vērtībām”) apzīmēšanai. Lai pārliecinātos, ka uzrakstītais tiešām kalpo par atrisinājumu dotajai nevienādībai, tai skaitā satur pierādījumu tam, ka $[1;3]$ ir nevienādības $(x-2)^2 \le 1$ atrisinājumu kopa, atšifrēsim šoreiz to arī vārdiski:

„$(x-2)^2 \le 1$ spēkā tām un tikai tām x vērtībām, kam spēkā $|x-2| \le 1$, kas, savukārt, ir spēkā tad un tikai tad, ja $-1 \le x-2 \le 1$, kas ekvivalents nevienādībai $1 \le x \le 3$, kas nozīmē to pašu, ko $x \in [1;3]$.”

Šis teikums, neapšaubāmi, kalpo par pamatojumu tam, ka nevienādības $(x-2)^2 \le 1$ atrisinājumu kopa ir $[1;3]$. Savukārt, ja mēs vienkārši stabiņā bez nekāda komentāra būtu uzrakstījuši formulas: $(x-2)^2 \le 1$

$$|x-2| \le 1$$
$$-1 \le x-2 \le 1$$
$$1 \le x \le 3$$
$$x \in [1;3]$$

nekādā veidā nesaistot tās savā starpā, tad mūsu rīcībā nebūtu vēl nekāda pamatojuma par to, kāpēc nevienādības $(x-2)^2 \le 1$ atrisinājumiem der tikai tie *x*, kas pieder intervālam $[1;3]$, jo mūsu uzrakstītais, vispār nebūdams spriedums (bet tikai kaut kādu matemātisku simbolu virknīte), nevar būt par pamatojumu nekādam apgalvojumam. Tiesa, šādu risinājuma nepilnību var viegli novērst, uzrakstot pirms tā teikumu „izdarīsim ekvivalentus pārveidojumus”, kas nozīmēs to pašu, ko ekvivalences zīmītes „$\Leftrightarrow$” aiz katra pārveidojuma. Būtība nav tajā veidā, kādā mēs noformējam ekvivalentos pārveidojumus, svarīgi ir saprast pašu **ekvivalento pārveidojumu nozīmi**. Svarīgi ir spēt atšķirt ekvivalentus pārveidojumus no neekvivalentiem, kādus arī bieži nākas lietot dažādu uzdevumu risināšanā. Pierakstā pārliecīga vienkāršošana (pazaudējot atšķirību starp ekvivalentiem un neekvivalentiem pārveidojumiem) vispirmām kārtām rada neizpratni, kāpēc dažos gadījumos ir nepieciešama atrastā atrisinājuma pārbaude, bet dažos bez tās var iztikt. Mazliet grūtākos uzdevumos tā bieži noved pie loģiskām kļūdām.

25. piemērs.

Atrisināt vienādojumu $\sqrt{x+4} = 2\sqrt{x-1} + 1$.

Risinājums.

$$\sqrt{x+4} = 2\sqrt{x-1} + 1 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x+4} - 2\sqrt{x-1} = 1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{x+4} - 2\sqrt{x-1}\right)^2 = 1 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \;\left(\sqrt{x+4}\right)^2 - 2\cdot 2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+4} + \left(2\sqrt{x-1}\right)^2 = 1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x+4+4(x-1)-4\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+4}=1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 4\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+4}=5x-1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 16(x-1)(x+4)=(5x-1)^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 9x^2-58x+65=0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in\left\{\frac{13}{9};5\right\}.$$

Ievērosim, ka šajos pārveidojumos 2 vietās mēs izteikumu ekvivalences zīmes „$\Leftrightarrow$” vietā lietojām loģiskās secināšanas zīmi „$\Rightarrow$”. Tiešām no tā, ka $\left(\sqrt{x+4}\right)^2-2\cdot 2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+4}+\left(2\sqrt{x-1}\right)^2=1$, vēl neizriet, ka $\sqrt{x+4}-2\sqrt{x-1}=1$ (ja apzīmējam izteiksmi $\sqrt{x+4}-2\sqrt{x-1}$ ar A, tad mūsu izdarītais spriedums nozīmē $A=1 \;\Rightarrow\; A^2=1$; apgalvojums $A^2=1 \;\Rightarrow\; A=1$ ir nepamatots, jo A^2 vērtība var būt 1 arī tad, ja A vērtība ir -1.)

Tādējādi ar šo spriedumu mēs esam pierādījuši tikai sekojošo: **ja** x apmierina vienādojumu $\sqrt{x+4}=2\sqrt{x-1}+1$, **tad** $x\in\left\{\frac{13}{9};5\right\}$; bet ar to vēl nepietiek, lai uzdevums būtu atrisināts. Ir jāatrod tāda x vērtību kopa, lai tā ne tikai saturētu visus vienādojuma atrisinājumus, bet arī, lai tā nesaturētu nevienu lieku (t.i. tādu, kas nav vienādojuma atrisinājums) x vērtību.

Šajā nolūkā pārbaudīsim abas atrastās x vērtības, vai tās kalpo par vienādojuma $\sqrt{x+4}=2\sqrt{x-1}+1$ atrisinājumiem vai nē.

$$\sqrt{\frac{13}{9}+4}=\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{7}{3},\quad \sqrt{\frac{13}{9}-1}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3},\quad \frac{7}{3}=2\cdot\frac{2}{3}+1 \quad -$$

pareiza vienādība, tātad $\frac{13}{9}$ ir aplūkojamā vienādojuma atrisinājums.

$\sqrt{5+4}=3$; $\sqrt{5-1}=2$; $3\neq 2\cdot 2+1$, tātad 5 nav aplūkojamā vienādojuma atrisinājums. Līdz ar to esam secinājuši, ka vienīgais vienādojuma $\sqrt{x+4}=2\sqrt{x-1}+1$ atrisinājums ir $\boldsymbol{x=\frac{13}{9}}$.

25. uzdevums.

Atrisināt vienādojumu $\sqrt{x+4}=2\sqrt{x-1}-1$.

Aplūkosim vēl vienu vienkāršu piemēru.

26. piemērs.

Atrisināt vienādojumu $x^3+1=x^2-1$.

Nepareizs risinājums.

$$x^3+1=x^2-1 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x-1) \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2-x+1=x-1 \;\Leftrightarrow\; x^2-2x+2=0$; savukārt šim un tātad arī sākotnējam vienādojumam nav atrisinājuma, jo $x^2-2x+2=(x^2-2x+1)+1=(x-1)^2+1>0$.

Komentārs.

Ievietojot sākotnējā vienādojumā x vietā -1, iegūsim pareizu vienādību $(0=0)$, tātad $x=-1$ ir vienādojuma $x^3+1=x^2-1$ atrisinājums. Tātad, izdarot savus pārveidojumus, mēs šo x vērtību esam kaut kur pazaudējuši. Tad mūsu pārveidojumi kaut kur nav bijuši ekvivalenti. Jūs jau droši vien ievērojāt, ka „nelikumīgais" pārveidojums bija

$$(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x-1) \;\Leftrightarrow\; x^2-x+1=x-1.$$

Tiešām, vienādība $(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x-1)$ var pastāvēt ne tikai tad, ja $x^2-x+1=x-1$, bet arī tad, ja $x+1=0$. Taisnība, ka no tā, ka $x^2-x+1=x-1$, seko, ka $(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x-1)$ (no tā, ka $a=b$, seko, ka $ac=bc$), bet ne otrādi, tieši gadījuma $x+1=0$ dēļ. Tā kā $(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x-1) \;\not\Rightarrow\; (x^2-x+1)=(x-1)$, tad arī nav spēkā ekvivalence $(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x-1) \;\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\; (x^2-x+1)=(x-1)$.

Vispārējā likumība, kas šajā gadījumā tika neievērota, ir: izdarot ekvivalentus pārveidojumus, nedrīkst vienādības vai nevienādības abas puses dalīt ar mainīgo saturošu izteiksmi, iepriekš speciāli neatrunājot gadījumu, kad šīs izteiksmes vērtība ir 0.

Atcerieties, ka nevienādībai vai vienādojumam ekvivalenti pārveidojumi ir tikai tādi, kas precīzi saglabā atrisinājumu kopu (t.i., pārveidojumu rezultātā iegūtajai nevienādībai vai vienādojumam atrisinājumu kopā ietilpst tās un tikai tās vērtības, kas ietilpst atrisinājumu kopā sākotnējai nevienādībai vai vienādojumam). Uzdevumu risināšanā, protams, drīkst izmantot arī neekvivalentus pārveidojumus (skat. iepriekšējo piemēru), nedrīkst tikai tos uzdot par ekvivalentiem, tādējādi pieļaujot loģisku kļūdu risinājumā.

Pareizs vienādojuma $x^3+1=x^2-1$ risinājums.

$$x^3+1=x^2-1 \iff (x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x-1) \iff$$
$$\iff (x+1)(x^2-x+1)-(x+1)(x-1)=0 \iff$$
$$\iff (x+1)(x^2-x+1-x+1)=0 \iff$$
$$\iff (x+1)(x^2-2x+2)=0 \iff$$
$$\iff x+1=0 \text{ vai } x^2-2x+2=0$$

Vienādojumam $x^2-2x+2=0$ nav atrisinājuma, bet vienādojumam $x+1=0$ vienīgais atrisinājums ir $x=-1$. Tātad arī sākotnējā vienādojuma atrisinājumu kopa ir $\{-1\}$.

Komentārs.

Atcerēsimies to, ka šāda ekvivalento pārveidojumu virknīte **satur arī pierādījumu** tam, ka vienādojuma atrisinājumu kopa ir $\{-1\}$.

Atrisināt vienādojumu vai nevienādību nozīmē atrast tādu skaitļu kopu, ka vienlaicīgi

1) katrs skaitlis, kas ietilpst šajā kopā, apmierina vienādojumu vai nevienādību,
2) neviens cits skaitlis (t.i. neviens skaitlis, kas šajā kopā neietilpst) doto vienādojumu vai nevienādību neapmierina,

citiem vārdiem sakot,

katrs skaitlis, kas apmierina doto nevienādību vai vienādojumu, ietilpst uzrādītajā skaitļu kopā.

Kā jau vairākkārt minēts, uzdevuma risinājumā izdarītajiem spriedumiem ir jāpārliecina gan par vienu, gan par otru, t.i., uzdevuma atrisinājumam ir jāsatur pierādījums tam, ka atrastā skaitļu kopa tiešām ir dotā vienādojuma vai nevienādības atrisinājumu kopa.

26. uzdevums.

Atrisināt nevienādību $x^3 < x$.

27. uzdevums.

Atrisināt nevienādību $1 < |2x+1| < 4$.

28. uzdevums.

Atrisināt vienādojumu $x^3 - 8 = x^2 + x - 6$.

Skolā lielākoties māca vienādojumus un nevienādības risināt ar dažādu ekvivalentu vai secinošu pārveidojumu palīdzību, arī mēs šī paragrāfa sākuma daļā aplūkojām tieši šādus piemērus. Taču acīmredzot neviens nevar aizliegt nevienādību un vienādojumu risināšanā lietot citādas spriešanas metodes, ja vien ar to palīdzību izdodas nonākt līdz nevienādības vai vienādojuma atrisinājumu kopai, un, protams, **pierādīt**, ka atrastā skaitļu kopa tiešām ir dotās nevienādības vai vienādojuma atrisinājumu kopa. Noilustrēsim šo iespēju dažos piemēros.

27. piemērs.

Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu sistēmu $\begin{cases} a + b^2 = 2 \\ a^2 + b = 2 \end{cases}$.

Uzdevums tātad ir 1) atrast visus tādus pozitīvus a un b, kas apmierina šo vienādojumu sistēmu, un 2) pierādīt, ka citu iespējamo atrisinājumu variantu bez atrastajiem nav.

Atrisinājums.

Ievērosim, ka skaitļu pāris $a = 1$, $b = 1$ ir šīs vienādojumu sistēmas atrisinājums. Pierādīsim, ka šai sistēmai nevar būt nedz tāds atrisinājums, kam $a > 1$, nedz arī tāds, kam $a < 1$.

Atņemsim no pirmās vienādības otro; iegūstam $a - a^2 + b^2 - b = 0$ jeb $a^2 - a = b^2 - b$, jeb $a(a-1) = b(b-1)$.

Ja $a > 1$, tad $b = 2 - a^2 < 1$, tātad šajā gadījumā $a - 1 > 0$, bet $b - 1 < 0$. Tā kā jāmeklē tikai tādi atrisinājumi, kam $a > 0$,

$b > 0$, tad $a(a-1) > 0$, $b(b-1) < 0$, bet tas ir pretrunā ar iegūto vienādību $a(a-1) = b(b-1)$.

Ja, savukārt, $a < 1$, tad $b = 2 - a^2 > 1$ (tā kā $a > 0$, tad no $a < 1$ seko, ka $a^2 < 1$), šajā gadījumā $a - 1 < 0$, $b - 1 > 0$, tātad atkal iegūta pretruna ar vienādību $a(a-1) = b(b-1)$.

Atliek vienīgi gadījums, kad $a = 1$, bet šim gadījumam atbilstoši der tikai atrisinājums $a = 1$, $b = 1$.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka dotajai vienādojumu sistēmai nekāda cita atrisinājuma bez $a = 1$, $b = 1$ nav; tātad šīs vienādojumu sistēmas atrisinājumu kopa sastāv no viena vienīga atrisinājuma $a = 1$, $b = 1$.

28. piemērs.

Atrisināt vienādojumu $x \cdot \left(5^{\sqrt{x^2-1}} + 7^{\sqrt{x+1}}\right) = -2$.

Atrisinājums.

Noteiksim šī vienādojuma kreisās puses definīcijas apgabalu. Lai izteiksme $x \cdot \left(5^{\sqrt{x^2-1}} + 7^{\sqrt{x+1}}\right)$ būtu definēta, nepieciešami un pietiekami, lai vienlaicīgi izpildītos $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$ (jo kvadrātsakne ir definēta tikai nenegatīviem skaitļiem). Šīs nevienādību sistēmas atrisinājumu kopa $\{-1\} \cup [1; +\infty)$ ir arī izteiksmes $x \cdot \left(5^{\sqrt{x^2-1}} + 7^{\sqrt{x+1}}\right)$ definīcijas apgabals; tas nozīmē, ka mūsu vienādojuma atrisinājumu kopa būs apakškopa kopai $\{-1\} \cup [1; +\infty)$.

Viegli redzēt, ka, ievietojot vienādojumā x vietā -1, mēs iegūstam pareizu identitāti. Pierādīsim, ka $x = -1$ ir vienīgais aplūkojamā vienādojuma atrisinājums.

Ievērosim, ka, lai x būtu vienādojuma $x \cdot \left(5^{\sqrt{x^2-1}} + 7^{\sqrt{x+1}}\right) = -2$ atrisinājums, nepieciešams, lai

$x \cdot \left(5^{\sqrt{x^2-1}} + 7^{\sqrt{x+1}}\right) < 0$, bet tas, savukārt, iespējams tikai tad, ja $x < 0$ ($5^{\sqrt{x^2-1}} + 7^{\sqrt{x+1}}$ vienmēr būs pozitīvs). Taču vienīgā pieļaujamā (definīcijas apgabalā ietilpstošā) negatīvā x vērtība ir -1, tātad vienādojumam **nevar būt citu atrisinājumu** kā $x = -1$. Līdz ar to uzdevuma risinājums pabeigts.

29. piemērs.

Atrisināt vienādojumu $2^{x+4} + 3^x + 2 \cdot 5^{x-3} - 3 = 2000$.

Atrisinājums.

Nav grūti ievērot, ka $x = 6$ ir šī vienādojuma atrisinājums ($2^{10} + 3^6 + 2 \cdot 5^3 - 3 = 1024 + 729 + 250 - 3 = 2000$ ir pareiza vienādība). Pierādīsim, ka citu atrisinājumu šim vienādojumam nav. Aplūkojam funkciju $f(x) = 2^{x+4} + 3^x + 2 \cdot 5^{x-3} - 3$; pierādīsim, ka tā ir **monotoni augoša**, t.i., katriem x_1 un x_2 no tā, ka $x_1 > x_2$, seko, ka $f(x_1) > f(x_2)$. Paņemsim divus patvaļīgus x_1 un x_2 tā, ka $x_1 > x_2$. Aplūkojam starpību $f(x_1) - f(x_2)$:

$$f(x_1) - f(x_2) = \left(2^{x_1+4} + 3^{x_1} + 2 \cdot 5^{x_1-3} - 3\right) - \left(2^{x_2+4} + 3^{x_2} + 2 \cdot 5^{x_2-3} - 3\right) =$$

$$= \left(2^{x_1+4} - 2^{x_2+4}\right) + \left(3^{x_1} - 3^{x_2}\right) + 2 \cdot \left(5^{x_1-3} - 5^{x_2-3}\right) =$$

$$= 2^{x_2+4}\left(2^{x_1-x_2} - 1\right) + 3^{x_2}\left(3^{x_1-x_2} - 1\right) + 2 \cdot 5^{x_2-3}\left(5^{x_1-x_2} - 1\right) > 0,$$

jo $x_1 > x_2$ jeb $x_1 - x_2 > 0$, tātad $2^{x_1-x_2} > 1$, $3^{x_1-x_2} > 1$, $5^{x_1-x_2} > 1$.

No funkcijas monotonitātes izriet:

ja $x > 6$, tad $f(x) > f(6) = 2000$;

ja $x < 6$, tad $f(x) < f(6) = 2000$.

Tātad vienādojumam $f(x) = 2000$ vienīgais atrisinājums ir $x = 6$.

Nereti nākas sastapties ar uzdevumiem, kuros prasīts atrisināt kādu vienādojumu veselos skaitļos. Šādās situācijās uzdevuma risinājums, kā likums, bez dažādiem ekvivalentiem vai secinošiem pārveidojumiem satur arī citāda veida spriedumus. Ar vienu šādu piemēru mēs jau netieši šajā brošūrā sastapāmies (atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $2^n + 65 = m^2$).

30. piemērs.

Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7}$.

Risinājums.

Tā kā $x > 0$, $y > 0$ (vienādojumu prasīts atrisināt naturālos skaitļos), tad arī $\frac{1}{x} > 0$, $\frac{1}{y} > 0$. Tātad no vienādojuma seko $\frac{1}{x} < \frac{1}{7}$, $\frac{1}{y} < \frac{1}{7}$ jeb ekvivalenti $x > 7$, $y > 7$. Atradīsim vispirms tos atrisinājumus, kuros $x \le y$.

Ja $x \le y$, tad $\frac{1}{x} \ge \frac{1}{y}$, tātad $\frac{1}{x} \ge \frac{1}{14}$ (pretējā gadījumā, ja $\frac{1}{x} < \frac{1}{14}$, tad $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{x} < \frac{1}{14} + \frac{1}{14} = \frac{1}{7}$, kas ir pretrunā ar doto vienādojumu). $\frac{1}{x} \ge \frac{1}{14}$ ekvivalents tam, ka $x \le 14$. Tā kā iepriekš esam konstatējuši, ka jābūt $x > 7$, tad tagad, pārbaudot x vērtības no 8 līdz 14, būsim sameklējuši visus atrisinājumus, kam $x \le y$.

Ja $x = 8$, tad $y = \dfrac{1}{\frac{1}{7} - \frac{1}{x}} = \dfrac{7x}{x-7} = \dfrac{7 \cdot 8}{8-7} = 56.$

Ja $x = 9$, tad $y = \dfrac{7x}{x-7} = \dfrac{7 \cdot 9}{9-7} = \dfrac{63}{2}$ nav vesels skaitlis.

Ja $x = 10$, tad $y = \dfrac{7 \cdot 10}{10-7} = \dfrac{70}{3}$ nav vesels skaitlis.

Ja $x = 11$, tad $y = \dfrac{77}{4}$; ja $x = 12$, $y = \dfrac{84}{5}$; ja $x = 13$, $y = \dfrac{91}{6}$ arī nav veseli skaitļi.

Ja $x = 14$, tad $y = \dfrac{7 \cdot 14}{14-7} = 14$.

Ņemot vērā to, ka mainīgie x un y ieiet vienādojumā simetriski, gadījumā $y < x$ vienīgais vienādojuma atrisinājums naturālos skaitļos ir $y = 8$, $x = 56$.

Atbilde.

Vienādojumam $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7}$ naturālos skaitļos ir 3 atrisinājumi (x, y): (8;56), (14;14) un (56;8).

Paragrāfa noslēgumā vēl daži uzdevumi patstāvīgai risināšanai.

29. uzdevums.

Atrisināt vienādojumu $(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x + y + z) + 3 = 0$.

30. uzdevums.

Atrisināt vienādojumu $(x + 2)^4 + x^4 = 82$.

31. uzdevums.

Atrisināt vienādojumu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}$

a) naturālos skaitļos,

b) veselos skaitļos (t.i., x un y var pieņemt arī veselas negatīvas vērtības).

§6. UZMANĪBU – SLIDENS!

„ – Tad tu varētu pateikt, ko domā, – Marta Zaķis turpināja.
– Tā es arī daru, – Alise steidzīgi iesaucās. – Vismaz ... vismaz domāju to, ko runāju, tas, zināt, ir viens un tas pats.
– Nav vis viens un tas pats, – ierunājās Cepurnieks. – tādā gadījumā tu varētu tikpat labi teikt, ka „es redzu to, ko ēdu” un „es ēdu to, ko redzu” ir viens un tas pats!
– Tad jau varētu tikpat labi teikt, ka „es vēlos to, ko saņemu” un „es saņemu to, ko vēlos” arī ir viens un tas pats! – Marta Zaķis piemetināja.”

L.Kerols „Alises piedzīvojumi brīnumzemē”.

Diemžēl līdzīgi, kā Alisei nav grūti sajaukt vārdu kārtību teikumā vai uzdevuma formulējumā, samainīt vietām doto ar pierādāmo („**ja** es kaut ko saņemu, **tad** es to vēlos” un „**ja** es kaut ko vēlos, **tad** es to saņemu” tiešām nav viens un tas pats). Lai izvairītos no šādām kļūdām, ir vajadzīga kārtīga domāšanas disciplīna. Ir jāsaprot un, katru uzdevumu risinot, jāapzinās principiālā atšķirība uzdevumā starp doto un pierādāmo. Aplūkosim vienkāršu piemēru.

__**31. piemērs.**__

Dots, ka $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$. *Pierādīt, ka vai nu* $a=b=c$, *vai arī* $a+b+c=0$.

Nepareizs risinājums.

Ja $a=b=c$, tad $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$, jo visas šīs daļas ir vienādas ar 1.

Ja, savukārt, $a+b+c=0$, tad $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a+b+c-2c}{c}=-\frac{2c}{c}=-2$. Tāpat $\frac{a-b+c}{b}=-2$, kā arī $\frac{-a+b+c}{a}=-2$, tātad arī šajā gadījumā $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$.

Komentārs.

Risinājuma autors ir centies parādīt, ka vienādība $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$ pastāv tad, ja $a=b=c$, kā arī tad, ja $a+b+c=0$, nepievēršot uzmanību gadījumam, kad nav spēkā ne $a=b=c$, ne arī $a+b+c=0$. Viņš nav ņēmis vērā iespēju, ka kāds no skaitļiem *a*, *b* un *c* varētu būt arī 0, kas nozīmē, ka kāda no izteiksmēm $\frac{a+b-c}{c}$, $\frac{a-b+c}{b}$, $\frac{-a+b+c}{a}$ var nebūt definēta (dalīšana ar nulli nav atļauta). **Taču pat ne šī speciālgadījuma neievērošanā slēpjas būtiskākā kļūda šajā risinājumā!**

Uzdevumā tika dots, ka vienādība $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$ **ir spēkā**, tādēļ absurds ir jebkurš mēģinājums to pierādīt. Uzdevumā dotais izsaka to, kā pareizību jau ir izdevies noskaidrot, kamēr pierādāmais – to, ko mēs gribam izsecināt no dotā.

Pierādīt, ka $a=b=c$ vai $a+b+c=0$, nozīmē pierādīt: ja $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$, tad obligāti īstenosies viena no iespējām $a=b=c$ vai $a+b+c=0$. Tas nozīmē: ja ne $a=b=c$, ne arī $a+b+c=0$ nav spēkā, tad nevar būt tā, ka $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$. Uzdevumā nekas nav prasīts par to, vai $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$ būs spēkā tad, ja $a+b+c=0$, vai arī tad, ja $a=b=c$ (kā redzams, tad $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$ pat ne obligāti ir spēkā šajos gadījumos, ja kāds no skaitļiem *a*, *b* vai *c* izrādās vienāds ar 0). Prasīts ir pamatot tikai to, ka visi gadījumi, kuros realizējas $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$, tiek ietverti iespējās $a+b+c=0$ un $a=b=c$.

Lai vēl uzskatamāk nodemonstrētu šo starpību, aplūkosim apgalvojumu „Ja līst lietus, tad pie debesīm ir mākoņi”. Šis apgalvojums nekādi neizslēdz iespēju, ka pie debesīm ir mākoņi, bet lietus tomēr nelīst. Tāpat arī apgalvojums „Ja $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$, tad $a=b=c$ vai $a+b+c=0$” nekādi neizslēdz iespēju, ka vai nu $a=b=c$, vai $a+b+c=0$ ir spēkā, bet $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$ tomēr nav spēkā. Cenšoties pierādīt uzdevumā prasītā apgalvojuma vietā apgalvojumu „Ja $a=b=c$ vai $a+b+c=0$, tad $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$”, mēs izdarām tādu pašu kļūdu, kā aizstājot apgalvojumu „Ja līst lietus, tad pie debesīm ir mākoņi” ar apgalvojumu „Ja pie debesīm ir mākoņi, tad līst lietus”, kas, līdzīgi kā Alisei, nudien nav viens un tas pats.

Pabeidzot šī piemēra analīzi, parādīsim tā pareizu risinājumu.

Risinājums.

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a+b-c}{c}+2=\frac{a-b+c}{b}+2=\frac{-a+b+c}{a}+2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a+b+c}{c}=\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+b+c}{a}$$

No šejienes redzam: ja $a+b+c\neq 0$, tad $\frac{1}{c}=\frac{1}{b}=\frac{1}{a}$ jeb $a=b=c$; tātad $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a} \Rightarrow a+b+c=0$ vai $a=b=c$, kas arī bija jāpierāda.

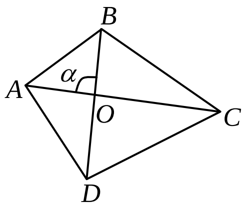
32. piemērs.

Dots izliekts četrstūris ABCD, ar O apzīmējam tā diagonāļu krustpunktu. Dots, ka izpildās sakarība $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2(AO^2+BO^2+CO^2+DO^2)$.

Pierādīt: vai nu četrstūra ABCD diagonāles ir perpendikulāras vai arī vismaz viena no tām krustpunktā dalās uz pusēm.

Risinājums.

Uzskatāmības labad izveidosim zīmējumu. Apzīmēsim $\angle AOB$ ar α .



23.zīm.

Brīdinājums.

Nav grūti saprast, ka, ja četrstūrim diagonāles ir perpendikulāras (t.i., $\alpha = 90°$), tad pēc Pitagora teorēmas seko, ka $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$.

Tāpat arī, ja četrstūris *ABCD* ir paralelograms, t.i. četrstūris, kam $AO = CO$ un $BO = DO$, no skolas kursā zināmiem rezultātiem (piem., kosinusu teorēmas) var iegūt sakarību $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$.

Tomēr šāda veida spriedumi **neattiecas uz uzdevuma risinājumu**, jo tajos tiek mēģināts pierādīt sakarību, kas uzdevumā ir dota, t.i., sakarību, izejot no kuras jāiegūst, ka četrstūrī *ABCD* diagonāles ir vai nu savstarpēji perpendikulāras, vai arī vismaz viena no tām krustpunktā dalās uz pusēm. Šāds spriešanas veids ir pilnīgi aplams, kā jau tas tika nodemonstrēts iepriekšējā piemērā.

Risinājuma turpinājums.

Tā kā $\angle AOB = \alpha$, tad $\angle COD = \alpha$; $\angle BOC = 180° - \alpha$; $\angle DOA = 180° - \alpha$. Pēc kosinusu teorēmas, pielietotas pēc kārtas ΔAOB , ΔBOC , ΔCOD , ΔDOA , iegūstam sekojošas 4 sakarības:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos\alpha$$

$$BC^2 = BO^2 + CO^2 - 2 \cdot BO \cdot CO \cdot \cos(180° - \alpha) =$$
$$= BO^2 + CO^2 + 2 \cdot BO \cdot CO \cdot \cos\alpha$$
$$CD^2 = CO^2 + DO^2 - 2 \cdot CO \cdot DO \cdot \cos\alpha$$
$$DA^2 = DO^2 + AO^2 - 2 \cdot DO \cdot AO \cdot \cos(180° - \alpha) =$$
$$= DO^2 + AO^2 + 2 \cdot DO \cdot AO \cdot \cos\alpha$$

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2) +$$
$$+ 2(-AO \cdot BO \cdot \cos\alpha + BO \cdot CO \cdot \cos\alpha -$$
$$- CO \cdot DO \cdot \cos\alpha + DO \cdot AO \cdot \cos\alpha)$$

Tā kā bija dots, ka $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$, no šejienes iegūstam

$$-AO \cdot BO \cdot \cos\alpha + BO \cdot CO \cdot \cos\alpha -$$
$$- CO \cdot DO \cdot \cos\alpha + DO \cdot AO \cdot \cos\alpha = 0,$$

jeb, sadalot reizinātājos:

$$\cos\alpha \cdot (CO - AO) \cdot (BO - DO) = 0$$

Tā kā reizinājums var pieņemt vērtību tikai tajā gadījumā, ja vismaz viens no reizinātājiem ir 0, tad spēkā vismaz viena no vienādībām

$$\cos\alpha = 0 \text{ (jeb } \alpha = 90° \text{)}$$
$$AO = CO$$
$$BO = DO;$$

tātad četrstūrim ABCD vai nu diagonāles ir perpendikulāras (t.i. veido leņķi $90°$), vai arī viena no tām krustpunktā dalās uz pusēm, kas arī bija jāpierāda.

32. uzdevums.

Dots, ka vienādojumam $x^2 - \frac{15}{4}x + a^3 = 0$ *viena sakne ir vienāda ar otras saknes kvadrātu. Pierādīt, ka* $a \in \{-2{,}5; 1{,}5\}$.

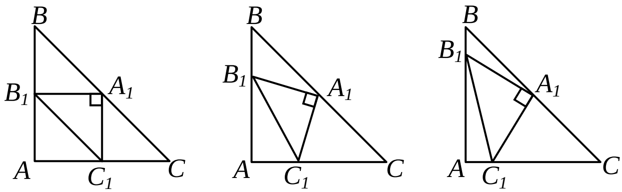
Allaž, risinot uzdevumu, ir jāapskata pilnīgi visi iespējamie gadījumi vai varianti, neaprobežojoties tikai ar tiem, kas pirmajā brīdī šķiet visvairāk pelnījuši analīzi: intuīcija var maldināt, tādējādi var viegli „palaist garām” arī kaut kādā nozīmē ļoti svarīgas iespējas, sākumā tās vai nu neievērojot, vai arī kvalificējot tās kā maznozīmīgas.

<u>**33. piemērs.**</u>

Dots, ka vienādsānu taisnleņķa trijstūris $A_1B_1C_1$ *ievilkts vienādsānu taisnleņķa trijstūrī ABC tā, ka* $\Delta A_1B_1C_1$ *virsotnes atrodas pa vienai uz katras no* ΔABC *malām (ne virsotnēs). Atrast minimālo iespējamo attiecību* $\frac{S_1}{S}$*, kur* S_1 *–* $\Delta A_1B_1C_1$ *laukums, S –* ΔABC *laukums.*

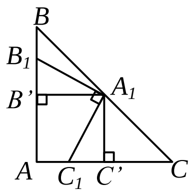
Nepareizs risinājums.

Padomāsim, kādā veidā trijstūri $A_1B_1C_1$ vispār var ievilkt trijstūrī *ABC* atbilstoši uzdevuma noteikumiem (abi tie taču ir vienādsānu taisnleņķa trijstūri). Pirmā nāk prātā sekojoša variantu grupa:



24.zīm.

Šie varianti raksturojas ar to, ka trijstūra $A_1B_1C_1$ taisnā leņķa virsotne A_1 atrodas trijstūra *ABC* hipotenūzas viduspunktā. Ievērosim, ka trijstūra $A_1B_1C_1$ taisnā leņķa virsotne A_1 nevar atrasties uz ΔABC hipotenūzas citā vietā, jo no tā, ka $A_1B_1 = A_1C_1$, seko, ka $\Delta B_1A_1B' = \Delta C_1A_1C'$ un tāpēc arī attiecīgie perpendikuli no A_1 līdz taisnēm *AB* un *AC* ir vienādi: $A_1B' = A_1C'$.



25.zīm.

Tātad A_1 atrodas vienādā attālumā no

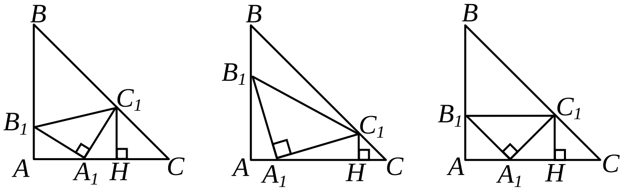
taisnēm *AB* un *AC*, tātad A_1 atrodas ΔABC hipotenūzas viduspunktā. Tā kā mēs citus variantus nespējam atrast, tad, acīmredzot, laukumu attiecības minimumu iegūsim tajā gadījumā, kad $A_1B_1 \perp AB$ (jo $S_1 = \frac{(A_1B_1)^2}{2}$ un, novelkot A_1B_1 jebkurā citā veidā, mēs tā garumu tikai palielināsim, tajā pašā laikā atstājot nemainītu ΔABC laukumu *S*). Tādējādi mēs iegūstam, ka attiecības $\frac{S_1}{S}$ mazākā iespējamā vērtība ir $\frac{1}{4}$, kas sasniedzama tajā un tikai tajā gadījumā, kad A_1, B_1 un C_1 ir attiecīgo trijstūra ΔABC malu viduspunkti.

Komentārs.

Dotais risinājums ārēji ļoti atgādina loģiski stingru pierādījumu tam, ka $\frac{1}{4}$ ir mazākā iespējamā attiecības $\frac{S_1}{S}$ vērtība: tika pierādīts, ka $\Delta A_1B_1C_1$ taisnā leņķa virsotne uz trijstūra ΔABC hipotenūzas var atrasties tikai tās viduspunktā, kā arī tas, ka mazākā iespējamā attiecības $\frac{S_1}{S}$ vērtība tādiem trijstūriem $\Delta A_1B_1C_1$, kam taisnā leņķa virsotne ir trijstūra ΔABC hipotenūzas viduspunktā, ir $\frac{1}{4}$. Un tomēr laukumu attiecībai $\frac{S_1}{S}$ var būt mazākas vērtības nekā $\frac{1}{4}$. Lieta tāda, ka mēs iepriekšējā risinājumā neaplūkojām visus iespējamos gadījumus, kādus pieļauj uzdevuma formulējums: nekur taču nebija teikts, ka $\Delta A_1B_1C_1$ jāievelk trijstūrī *ABC* tā, ka taisnā leņķa virsotne atrodas uz ΔABC hipotenūzas. Tātad jāņem vērā arī tā iespēja, kad šī virsotne atrodas uz vienas no ΔABC katetēm. Kā redzēsim, šajā uzdevumā tieši tas izrādās izšķirošais. Tādējādi, veicot nepilnīgu gadījumu pārlasi, iepriekšējā risinājumā mēs esam nonākuši pie skaitliski nepareizas atbildes.

Risinājuma papildinājums līdz pareizam risinājumam.

Mēs esam konstatējuši: ja $\Delta A_1B_1C_1$ taisnā leņķa virsotne A_1 atrodas uz ΔABC hipotenūzas *BC*, tad mazākā iespējamā trijstūru laukumu attiecība $\frac{S_1}{S}$ ir $\frac{1}{4}$. Aplūkosim tagad gadījumu, kad virsotne A_1 atrodas uz vienas no trijstūra ΔABC katetēm AC vai AB; simetrijas dēļ varam uzskatīt, ka tā ir katete AC (skat. 26.zīm.).



26.zīm.

Apzīmējam attālumu AA_1 ar a, ΔABC katetes garumu ar k. Novelkam no punkta C_1 (skat. 26.zīm.) perpendikulu C_1H pret kateti AC. Tad no ΔAB_1A_1 un ΔHA_1C_1 vienādības (kā taisnleņķa trijstūri pēc hipotenūzas un šaurā leņķa) $C_1H = a$. Tā kā ΔC_1HC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris (jo pēc 3 leņķiem līdzīgs ΔBAC), tad arī $HC = a$, tātad $A_1H = k - 2a$. Atkal pēc ΔAB_1A_1 un ΔHA_1C_1 vienādības $AB_1 = A_1H = k - 2a$; tā kā $AB = k$, tad $BB_1 = 2a$.

Tad

$$[A_1B_1C_1] = [ABC] - [BB_1C_1] - [AB_1A_1] - [CC_1A_1] =$$

$$= \frac{k^2}{2} - \left(\frac{BB_1 \cdot AH}{2} + \frac{AA_1 \cdot AB_1}{2} + \frac{A_1C \cdot C_1H}{2} \right) =$$

$$= \frac{k^2}{2} - \left(\frac{2a \cdot (k-a)}{2} + \frac{a \cdot (k-2a)}{2} + \frac{a \cdot (k-a)}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(k^2 - 4ak + 5a^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(5a^2 - 4ak + \frac{4}{5}k^2\right) + \frac{1}{5}k^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(5\left(a^2 - \frac{4}{5}ak + \frac{4}{25}k^2\right) + \frac{1}{5}k^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(5\left(a - \frac{2}{5}k\right)^2 + \frac{1}{5}k^2\right) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}k^2$$

Tātad, ja $\Delta A_1B_1C_1$ taisnā leņķa virsotne A_1 atrodas uz trijstūra ΔABC katetes, tad

$$\frac{S_1}{S} = \frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} \geq \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}k^2}{\frac{1}{2}k^2} = \frac{1}{5}.$$

No otras puses, ja mēs virsotni A_1 uz malas AC izvēlamies tā, lai $AA_1 = \frac{2}{5}AC$ (t.i. $a = \frac{2}{5}k$, $a - \frac{2}{5}k = 0$), tad $[A_1B_1C_1]$ tiešām ir $\frac{1}{5}[ABC]$. Līdz ar to mēs esam pierādījuši, ka

1) ja $\Delta A_1B_1C_1$ taisnā leņķa virsotne atrodas uz ΔABC hipotenūzas, tad $\frac{S_1}{S} \geq \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$;
2) ja $\Delta A_1B_1C_1$ taisnā leņķa virsotne atrodas uz ΔABC katetes, tad $\frac{S_1}{S} \geq \frac{1}{5}$;
3) var uzrādīt tādu $\Delta A_1B_1C_1$, kam $\frac{S_1}{S} = \frac{1}{5}$.

Līdz ar to ir pierādīts, ka laukumu attiecības $\frac{S_1}{S}$ mazākā iespējamā vērtība ir $\frac{1}{5}$. (Par vārda „vismazākais” nozīmi skat. arī 22. un 23. piemēru (piemērs par divu krāsu zīmuļiem kastītē un Ramseja uzdevums).)

33.uzdevums.

Viena trijstūra divas malas un augstums pret trešo malu ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra 2 malām un augstumu pret trešo malu. Vai šie trijstūri noteikti ir vienādi?

34. uzdevums.

Noteikt funkcijas $y = \sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}$ *definīcijas apgabalu.*

35.uzdevums.

Atrast izteiksmes $|x-1|+|x-3|+|x-5|+|x-7|+|x-11|$ *mazāko iespējamo vērtību.*

36.uzdevums.

Automašīnu, kas pārvietojas pa šoseju, sešu minūšu laikā novēroja vairāki policijas posteņi. Nevienu brīdi automašīna nepalika bez uzraudzības un katrs postenis automašīnu novēroja tieši vienu minūti. Vai ir iespējams, ka minēto 6 minūšu laikā automašīna nobrauca vairāk nekā 6km?

37. uzdevums.

Vai var rindā uzrakstīt 25 skaitļus tā, lai katru 7 pēc kārtas uzrakstīto skaitļu summa būtu pozitīva, bet visu 25 uzrakstīto skaitļu summa – negatīva?

VINGRINĀJUMU ATBILDES

1. vingrinājums.

Pieņemsim pretējo, t.i., ka 50 ābolus var sadalīt 7 cilvēkiem tā, lai katrs no tiem būtu dabūjis ne vairāk kā 7 ābolus. Tad visi cilvēki kopā būs dabūjuši ne vairāk kā $7 \cdot 7 = 49$ ābolus, tātad esam ieguvuši pretrunu $50 \leq 49$, kas liecina, ka mūsu sākotnējais pieņēmums nevar būt spēkā.

50 ābolus 7 cilvēkiem var sadalīt tā, lai neviens no tiem nebūtu dabūjis precīzi 8 ābolus. Piemēram, 1. cilvēkam iedosim 14 ābolus, bet visiem 6 atlikušajiem – pa 6 āboliem katram.

2. vingrinājums.

(a) eksistē tāds x no dotās kopas M, kam izpildās nevienādība $x^2 \geq 4$ (nav tiesa, ka katram x no dotās kopas M izpildās $x^2 \geq 4$);

(b) katram naturālam skaitlim n izpildās nevienādība $2^n \leq n^2$ (nav tiesa, ka eksistē naturāls skaitlis *n*, kam $2^n > n^2$);

(c) vismaz viens no sešstūra ABCDEF leņķiem nav šaurs;

(d) visi pirmskaitļi ir nepāra skaitļi (katrs pirmskaitlis ir nepāra skaitlis);

(e) eksistē tāds pirmskaitlis *p*, ka 2^p nav pirmskaitlis;

(f) nav tiesa, ka 53 ir vislielākais naturālais skaitlis (53 nav vislielākais naturālais skaitlis; vai nu 53 nav naturāls skaitlis, vai arī eksistē tāds naturāls skaitlis, kas lielāks par 53)

(g) eksistē tādi divi naturāli skaitļi *m* un *n*, ka $m + n \neq n + m$;

(h)eksistē tādi divi naturāli skaitļi *m* un *n*, ka katram naturālam skaitlim *z* pastāv nevienādība $z \neq m \cdot n$ (eksistē tādi divi naturāli skaitļi *m* un *n*, ka nav tāda naturāla skaitļa *z*, ka $z = m \cdot n$);

(i) vai nu Juris, vai Jānis, vai Pēteris nav skolēns.

LITERATŪRA

1. A.Andžāns, T.Ziļicka, O.Treilibs. *Uzdevumi matemātikas olimpiādēs*. R.: „Zvaigzne”, 1977. – 390 lpp.
2. A.Andžāns, I.Kreicberga. *Vai vari atrisināt?* R.: „Zvaigzne”, 1985. – 160 lpp.
3. S.Devi. *Puzzles to puzzle you.* – Delhi, 1979. – 136 pp.
4. J.Perelmanis. *Dzīvā matemātika*. R.: LVI, 1964. – 192 lpp.
5. E.Riekstiņš, A.Andžāns. *Atrisini pats!* R.: „Zvaigzne”, 1984. – 272 lpp.
6. И.Л.Бабинская. *Задачи математических олимпиад*. М.: „Наука”, 1975. – 111 стр.
7. И.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.Н.Раббот, А.Л.Тоом. *Заочные математические олимпиады*. М.: „Наука”, 1987. – 176 стр.
8. *Занимательно о физике и математике*. М.: „Наука”, 1988. – 143 стр.

SĒRIJA „LAIMA” MATEMĀTIKĀ

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (**La**tvijas un **I**slandes **Ma**temātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

SĒRIJAS „LAIMA” GRĀMATAS

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-9. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.

16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1999.-2006. gados.** Rīga: LU, 2006.

17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.

18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.

19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.

20. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.

21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.

22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. -9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.

23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

24. R. Kašuba. **What to do when You don't Know What to do? Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

26. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.

27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannesons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2008.

28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 32. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2008.

29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina”.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

32. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part I.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

33. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2008.

34. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part II.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.

35. A. Andžāns, I. Kondratjeva, Ā. Viļuma, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2007./2008. mācību gadā.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2009.

36. K. Čerāns. **Kas ir matemātisks pierādījums? 1. daļa.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2009.