LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola

A. ANDREJEVA – ANDERSONE,
A. ANDŽĀNS, L. RAMĀNA

PRAKTIKUMS VIENĀDOJUMU SISTĒMU RISINĀŠANĀ

RĪGA, 1997

SATURS

Ievads

Vienādojumu sistēmu risināšana ir vissarežģītākā skolas algebras kursa sastāvdaļa; arī algebras kā zinātnes ietvaros tā piesaista daudzu nozaru speciālistu uzmanību. Pietiek atzīmēt kaut vai to, ka sistēmu ļoti speciāls gadījums - vienādojumi un to risināšanas metodes - devis sākotnējo impulsu visai mūsdienu abstraktās algebras attīstībai. Vienādojumu sistēmu risināšanā tiek plaši lietotas citu matemātikas nozaru - matemātiskās analīzes, ģeometrijas, skaitliskās matemātikas utt. - metodes.

Mūsdienās vienādojumu sistēmu risināšana iegūst sevišķu praktisku nozīmi sakarā ar automātisko projektēšanas sistēmu izstrādi.

Neskatoties uz to, skolas kursā vienādojumu sistēmu risināšana aprobežojas ar saskaitīšanas un ievietošanas paņēmieniem (un dažreiz - Gausa metodi), turklāt tikai vienkāršākajos gadījumos. Tas ierobežo labāko risinātāju redzesloku un rada viņiem grūtības, saskaroties ar “nestandarta” uzdevumiem matemātikas olimpiādēs, kā arī, lasot matemātisko literatūru.

Jāatzīmē, ka pasaules literatūrā mums nav izdevies atrast avotu, kurā būtu apkopotas galvenās skolā pieejamās vienādojumu sistēmu risināšanas metodes.

Šeit mēģināts aizpildīt minēto “robu”. Bez “nestandarta” metodēm apskatītas arī “parastās” metodes, ilustrējot tās ar sarežģītākiem piemēriem nekā parasti. Uzdevumi klasificēti saskaņā ar risināšanas metodēm. Protams, katru uzdevumu var mēģināt atrisināt arī ar citām metodēm, nekā te parādīts. Visiem uzdevumiem doti atrisinājumi.

Tiek aplūkota tikai sistēmu risināšana reālo skaitļu kopas ietvaros.

Mācību līdzekli var izmantot skolotāji, matemātikas pulciņu vadītāji, kā arī skolēni, kas padziļināti interesējas par matemātiku.

Darbs izstrādāts Latvijas izglītības sistēmas informatizācijas investīciju projekta ietvaros.

1. nodaļa Lineāru vienādojumu sistēmas

1. uzdevums. Atrisināt piecu lineāru vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^3 - y^3 & = & 2b \\ x^2 y - xy^2 & = & b \end{cases}$$

2. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_4 + x_5 + x_6 = -3 \\ x_5 + x_6 + x_7 = -9 \\ x_6 + x_7 + x_8 = -6 \\ x_7 + x_8 + x_1 = -2 \\ x_8 + x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

3. uzdevums. Ar kādām k vērtībām vienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ kx + y = 2 \\ x + ky = 3 \end{cases}$$

eksistē atrisinājums?

4. uzdevums. No skaitļiem x_1, x_2, x_3, x_4 un x_5 izveidotas desmit šo skaitļu pāru summas, kuras apzīmēsim ar a_1, a_2, …, a_{10}; zināms, ka tās visas ir dažādas. Pierādīt, ka, zinot a_1, a_2, …, a_{10}, bet nezinot, kura vērtība atbilst kuru divu skaitļu summai, var atrast skaitļus x_1, x_2, x_3, x_4 un x_5.

5. uzdevums. No četriem skaitļiem ir izveidotas sešas šo skaitļu pāru summas; tās ir 1, 2, 4, 6, 8 un 9. Atrast šos četrus skaitļus.

6. uzdevums. Atrisināt četru lineāru vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x + 7y + 3v + 5u = 16 \\ 8x + 4y + 6v + 2u = -16 \\ 2x + 6y + 4v + 8u = 16 \\ 5x + 3y + 7v + u = -16. \end{cases}$$

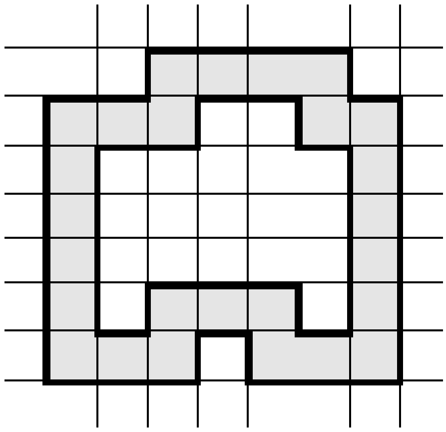
7. uzdevums. Bezgalīgas papīra lapas rūtiņās salikti reāli skaitļi tā, ka:

a) skaitļi jebkurās divās rūtiņās vienā rindā, kas atrodas 1982 rūtiņu attālumā, ir vienādi,

b) katrs skaitlis ir tā divu horizontālo kaimiņu vidējais aritmētiskais.

Pierādīt, ka katrā rindā visi skaitļi ir vienādi.

8. uzdevums. Rūtiņu lapā uzzīmēts patvaļīgs kontūrs ar platumu 1 rūtiņa (skat., piem., 1.zīm.) Katrā kontūra rūtiņā ierakstīts pa skaitlim. Kontūra iekšpusē esošajās rūtiņās arī jāieraksta pa skaitlim tā, lai katrā iekšpusē esošajā rūtiņā ierakstītais skaitlis būtu tā četru horizontālo un vertikālo kaimiņu vidējais aritmētiskais.



1.zīm.

a) pierādīt: ja visās kontūra rūtiņās sākumā ierakstītas nulles, tad vienīgā iespēja izpildīt uzdevuma prasības ir – arī kontūra iekšpusē visās rūtiņās ierakstīt nulles;
b) pierādīt: ja kontūra rūtiņās sākumā ir ierakstīti patvaļīgi skaitļi, tad uzdevumu vienmēr var izpildīt, turklāt iekšpusē esošajās rūtiņās ierakstāmie skaiļi ir noteikti viennozīmīgi.

9. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 11x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 0 \\ 15x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 12x_4 - 3x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 + 17x_5 + x_6 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 - 16x_6 + 2x_7 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 19x_7 = 0. \end{cases}$$

10. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + \dots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 + \dots + 4x_n = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 + \dots + 6x_n = 3 \\ \dots \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 + \dots + (2n-1)x_n = n, \end{cases}$$

ja n=100.

11. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 3 \\ \ldots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + 2x_{n-1} + x_n = n-1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + 2x_n = n. \end{cases}$$

12. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \ldots + (n-1)x_n + nx_1 = 2 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 + \ldots + (n-1)x_1 + nx_2 = 3 \\ \ldots \\ x_{n-1} + 2x_n + 3x_1 + \ldots + (n-1)x_{n-3} + nx_{n-2} = n-1 \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + \ldots + (n-1)x_{n-2} + nx_{n-1} = n. \end{cases}$$

13. uzdevums. Pierādīt, ka eksistē n veseli pozitīvi skaitļi x_1, x_2,…, x_n, kuriem vienlaicīgi izpildās šādas sakarības:

$$2x_1 - x_2 = 1;$$
$$-x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} = 1, \text{ ja } k=2; 3; \ldots; n-1;$$
$$-x_{n-1} + 2x_n = 1.$$

Šeit n ir pāra skaitlis.

14. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \dfrac{x - y\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a \\ \dfrac{y - x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = b, \end{cases}$$

kur a un b ir doti skaitļi, pie tam $a^2 - b^2 < 1$.

15. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1 - b_1} + \dfrac{x_2}{a_1 - b_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_1 - b_n} = 1 \\ \dfrac{x_1}{a_2 - b_1} + \dfrac{x_2}{a_2 - b_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_2 - b_n} = 1 \\ \ldots \\ \dfrac{x_1}{a_n - b_1} + \dfrac{x_2}{a_n - b_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_n - b_n} = 1, \end{cases}$$

kur skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ visi ir savā starpā atšķirīgi.

16. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 1 & + & x_1 & + & x_2 & + & \ldots & + & x_n & = & 0 \\ 1 & + & 2x_1 & + & 4x_2 & + & \ldots & + & 2^n x_n & = & 0 \\ 1 & + & 3x_1 & + & 9x_2 & + & \ldots & + & 3^n x_n & = & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & + & nx_1 & + & n^2 x_2 & + & \ldots & + & n^n x_n & = & 0. \end{cases}$$

17. uzdevums. Ir zināms, ka $x=p$, $y=q$, $z=r$, $w=s$ ir vienīgais atrisinājums lineāru vienādojumu sistēmai $x + a_i y + a_i^2 z + a_i^3 w = a_i^4$, kur i=1,2,3,4. Izteikt ar lielumiem p, q, r, s atrisinājumus vienādojumu sistēmai

$$x + a_i^2 y + a_i^4 z + a_i^6 w = a_i^8, \text{ kur } i = 1,2,3,4.$$

1. nodaļas Atrisinājumi

1. uzdevums. Saskaitot visus piecus dotās sistēmas vienādojumus

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & u & = & 5 \\ y & + & z & + & u & + & v & = & 1 \\ z & + & u & + & v & + & x & = & 2 \\ u & + & v & + & x & + & y & = & 0 \\ v & + & x & + & y & + & z & = & 4 \end{array}$$

un rezultātu izdalot ar 4, iegūsim vienādojumu:

$$x + y + z + u + v = 3.$$

Tagad no iegūtā vienādojuma atņemam pēc kārtas katru doto vienādojumu, lai atrastu meklēto atrisinājumu:

$$x = 2,\ \ y = 1,\ \ z = 3,\ \ u = -1,\ \ v = -2.$$

2. uzdevums. Saskaitot dotās sistēmas vienādojumus

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 & (1) \\ x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 9 & (2) \\ x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 3 & (3) \\ x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & -3 & (4) \\ x_5 & + & x_6 & + & x_7 & = & -9 & (5) \\ x_6 & + & x_7 & + & x_8 & = & -6 & (6) \\ x_7 & + & x_8 & + & x_1 & = & -2 & (7) \\ x_8 & + & x_1 & + & x_2 & = & 2, & (8) \end{array}$$

iegūstam trīskāršotu visu nezināmo summu:

$$3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) = 0.$$

Saskaitot (1), (4) un (7) vienādojumus, iegūstam

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$
$$x_4 + x_5 + x_6 = -3$$
$$x_7 + x_8 + x_1 = -2,$$

iegūstam, ka

$$x_1 + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) = 1.$$

Tā kā visu nezināmo summa ir vienāda ar nulli, tad seko, ka $x_1 = 1$. Saskaitot (2), (5) un (8) vienādojumus, iegūstam, ka $x_2 = 2$. Tālāk - pēc kārtas no katra vienādojuma - izsaka

$$x_3 = 3,\ \ x_4 = 4,\ \ x_5 = -4,\ \ x_6 = -3,\ \ x_7 = -2,\ \ x_8 = -1.$$

3. uzdevums. Saskaitot dotās vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ kx + y = 2 \\ x + ky = 3 \end{cases}$$

otro un trešo vienādojumu, iegūstam $x + y + k(x + y) = 5$. Ņemot vērā sistēmas pirmo vienādojumu, atrodam meklējamo k vērtību: $k = 4$.

Ja $k = 4$, dotā vienādojumu sistēma ir

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x + y = 2 \\ x + 4y = 3. \end{cases}$$

Izsakot no sistēmas pirmā vienādojuma $x = 1 - y$ un ievietojot to sistēmas trešajā vienādojumā, iegūstam, ka $y = \frac{2}{3}$, bet $x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

4. uzdevums. Atzīmēsim, ka

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 4S,$$

kur $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$. Tā kā visi a_i dažādi, tad arī visi x_i ir dažādi. Pieņemsim, ka $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$ un $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{10}$. Tad a_1 ir divu mazāko skaitļu summa: $a_1 = x_1 + x_2$, bet $a_{10} = x_4 + x_5$. Tāpēc $S = a_1 + x_3 + a_{10}$ un pēc lieluma vidējais skaitlis

$$x_3 = S - a_1 - a_{10} = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}) - a_1 - a_{10}.$$

Otra mazākā summa a_2 noteikti ir $x_1 + x_3$, tātad $x_1 = a_2 - x_3$, bet $x_2 = a_1 - x_1$. Līdzīgi atrod $x_5 = a_9 - x_3$ un $x_4 = a_{10} - x_5$, jo vislielākā summa ir x_4+x_5, bet otra lielākā ir x_3+x_5.

5. uzdevums. Ja starp meklējamiem skaitļiem būtu vienādi, tad arī starp to pāru summām būtu vienādas. Tāpēc visi meklējamie skaitļi ir dažādi. Pieņemsim, ka x_1, x_2, x_3 un x_4 ir četri meklētie skaitļi un ka tie apmierina nevienādības $x_1<x_2<x_3<x_4$. Vismazākā divu skaitļu summa ir x_1+x_2, otrā mazākā ir x_1+x_3; vislielākā summa ir x_3+x_4, otrā lielākā ir x_2+x_4. Tāpēc ir iespējami divi gadījumi, kuri atbilst dotajām četru skaitļu pāru summām. Šos gadījumus apraksta vienādojumu sistēmas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_4 = 4 \\ x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_4 = 8 \\ x_3 + x_4 = 9 \end{cases} \qquad (1)$$

un

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_4 & = & 6 \\ x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_2 & + & x_4 & = & 8 \\ x_3 & + & x_4 & = & 9. \end{cases} \qquad (2)$$

Katrā no šiem gadījumiem saskaitot visas pāru summas, iegūstam trīskāršotu skaitļu x_1, x_2, x_3 un x_4 summu.

Tātad $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$.

Vispirms atrisināsim vienādojumu sistēmu (1). Atņemot tajā no otrā vienādojuma pirmo, iegūstam, ka $x_3 - x_2 = 1$, bet ņemot vērā, ka $x_2 + x_3 = 6$ (tas ir ceturtais vienādojums), atrodam $x_3 = 3{,}5$, bet tad $x_2 = 2{,}5$. Tālāk no pārējiem vienādojumiem izsakām $x_1 = -1{,}5$ un $x_4 = 5{,}5$.

Analoģiski atrisinām vienādojumu sistēmu (2), kuras atrisinājums ir
$x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 1{,}5$, $x_3 = 2{,}5$, $x_4 = 6{,}5$.

Nepieciešama pārbaude; tā parāda, ka atrisinājumi der.

6. uzdevums. Saskaitot pirmo vienādojumu ar ceturto un otro ar trešo, iegūstam, ka

$$\begin{cases} 6(x+u)+10(y+v)=0 \\ 10(x+u)+10(y+v)=0. \end{cases}$$

No šejienes $x+u=y+v=0$. Tas nozīmē, ka $x=-u$ un $v=-y$. Ievietojot šīs vienādības sistēmas pirmajā un otrajā vienādojumā, mēs iegūsim

$$\begin{cases} -4x & + & 4y & = & 16 \\ 6x & - & 2y & = & -16, \end{cases}$$

Izmantojot vienādojumu saskaitīšanas vai ievietošanas paņēmienu, atrisinām šo vienādojumu sistēmu un iegūstam $x=-2$, $y=2$, līdz ar to $u=2$ un $v=-2$.

7. uzdevums. Tā kā ik pēc 1982 rūtiņām skaitļi atkārtojas, tad vienā rindiņā ierakstītiem skaitļiem eksistē vismazākā vērtība; pieņemam, ka x_1 ir viens no mazākajiem kādas rindiņas skaitļiem. Apzīmējam nākošos šīs rindiņas skaitļus ar x_2; x_3; … Tad $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} \geq x_1$. Vai nu $x_2 > x_1$, ja $x_3 > x_1$, vai arī $x_2 = x_1$, ja $x_3 = x_1$.

Līdzīgi pierādām, ka $x_3 \geq x_2$, $x_4 \geq x_3, \ldots, x_{1982} \geq x_{1981}$, $x_{1983} \geq x_{1982}$. Bet $x_{1983} = x_1$. Tā kā rindiņā nav mazāku skaitļu par x_1, tad no pēdējās nevienādības seko, ka $x_1 = x_{1982}$, kas ir iespējams tikai gadījumā, ja $x_1 = x_2 = \ldots = x_{1981} = x_{1982}$.

8. uzdevums. Varam uzskatīt, ka pa rūtiņu līnijām iet koordinātu asis. Dabīgā veidā varam numurēt rūtiņas ar veselu skaitļu pāriem (i, j). Ar $x_{i,j}$ apzīmēsim skaitli, kas ierakstīts rūtiņā ar numuru (i, j).

a) acīmredzot, visās iekšējās rūtiņās ierakstot nulles, uzdevuma prasības ir apmierinātas, jo $0 = \frac{0+0+0+0}{4}$. Pieņemsim no pretējā, ka izdevies apmierināt uzdevuma nosacījumus un vismaz vienā iekšējā rūtiņā ierakstīts nenulles skaitlis.

Aplūkosim variantu, kad starp nenulles skaitļiem ir pozitīvi skaitļi (gadījumu, kad visi nenulles skaitļi ir negatīvi, apskata līdzīgi). Tā kā kontūra iekšpusē rūtiņu ir galīgs skaits, starp ierakstītajiem skaitļiem var atrast vislielāko. Pieņemsim, ka tas ir M (skat. 2.zīm.)

		x		
	y	M	z	
	u	t	v	
		r		

2.zīm.

Tā kā $M = \dfrac{x+y+z+t}{4}$, tad

$$4M=x+y+z+t \qquad (1)$$

Tā kā $M \geq x,\ M \geq y,\ M \geq z,\ M \geq t$ (2), tad $4M \geq x+y+z+t$, un vienādība (1) var pastāvēt tikai, ja (2) pārvēršas vienādībās $M=x$, $M=y$, $M=z$, $M=t$; tātad lielākais skaitlis ierakstīts arī M rūtiņas “kaimiņu rūtiņās”. Līdzīgi no sakarībām

$$4t=M+u+r+v$$

un $t \geq u$, $t \geq r$, $t \geq v$, $t=M$ iegūstam, ka arī $u=r=v=M$.

Tāpat turpinot, agri vai vēlu nonāksim līdz kontūram un iegūsim, ka kādā kontūra rūtiņā ierakstīts skaitlis $M>0$. Bet tā ir pretruna, jo uzdevuma nosacījumos dots, ka kontūra rūtiņās ierakstītas tikai nulles.

Tātad mūsu sākotnējais pieņēmums nepareizs, un uzdevums atrisināts.

b) uzdevuma otrās daļas atrisinājumā izmantosim dažus faktus no lineāru vienādojumu sistēmu teorijas, kas saistīti ar to atrisinājumu eksistences nosacījumiem.

Uzdevuma nosacījumus var pierakstīt ar lineāru vienādojumu sistēmu

$$x_{i,j} = \frac{x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1}}{4},$$

rakstot pa vienam vienādojumam katrai kontūra iekšējai rūtiņai un to labās puses saskaitāmo vietā, kas atbilst kontūra rūtiņām, ierakstot šajās rūtiņās sākumā dotos skaitļus. Iegūtā sistēma satur n vienādojumus un n nezināmos (n – kontūra iekšpusē esošo rūtiņu skaits).

Uzdevuma a) daļai atbilst līdzīga sistēma, kura atšķiras no b) daļas sistēmas tikai ar to, ka kontūra rūtiņām atbilstošās konstantes ir nulles. Tātad abas sistēmas atšķiras viena no otras tikai ar brīvajiem locekļiem. Tā kā a) daļas sistēmai eksistē tikai viens atrisinājums (mēs to pierādījām), tad sistēmas determinants nav 0; tādā gadījumā arī b) daļas sistēmas determinants nav 0, bet tad b) daļas sistēmai eksistē viens vienīgs atrisinājums.

Uzdevums atrisināts.

9. uzdevums. Dotajai vienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 11x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 0 \\ 15x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 12x_4 - 3x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 + 17x_5 + x_6 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 - 16x_6 + 2x_7 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 19x_7 = 0 \end{cases}$$

piemīt tāda īpašība, ka k-tajā vienādojumā koeficients a_k pie x_k pēc moduļa ir lielāks par visu pārējo koeficientu moduļu summu. Ņemam vērā šo īpašību: pieņemam, ka x_m pēc moduļa ir lielākais no $x_1, x_2, \ldots, x_7$. Tad, ja $x_m \neq 0$, m-tajā vienādojumā loceklis $a_m x_m$ pēc moduļa ir lielāks par visu pārējo locekļu summu. Bet tā nevar būt, jo vienādojuma labajā pusē atrodas 0. Tāpēc $x_m=0$. Pēc moduļa x_m bija lielākais no $x_1, x_2, \ldots, x_7$, tāpēc eksistē viens vienīgs atrisinājums $x_1=x_2=\ldots=x_7=0$.

10. uzdevums. Lai atrisinātu vienādojumu sistēmu (ņemot vērā, ka n=100)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + \ldots + 2x_{100} = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 + \ldots + 4x_{100} = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 + \ldots + 6x_{100} = 3 \\ \ldots \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 + \ldots + 199x_{100} = 100, \end{cases}$$

atņemam no katra vienādojuma iepriekšējo. Uzrakstām sistēmas pēdējo un priekšpēdējo vienādojumus:

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + \ldots + 197x_{99} + 199x_{100} = 100$$
$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + \ldots + 197x_{99} + 198x_{100} = 99$$

Vienādojumu kreisajās pusēs atšķirīgi ir tikai pēdējie saskaitāmie, tāpēc, atņemot no pēdējā vienādojuma priekšpēdējo , iegūstam $x_{100}=1$.
Tagad uzrakstām sistēmas 99. un 98. vienādojumus:

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + \ldots + 193x_{97} + 195x_{98} + 197x_{99} + 198x_{100} = 99$$
$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + \ldots + 193x_{97} + 195x_{98} + 196x_{99} + 196x_{100} = 98$$

Šeit vienādojumu kreisajās pusēs atšķirīgi ir divi pēdējie saskaitāmie, un, ņemot vērā, ka $x_{100}=1$, iegūstam $x_{99}=-1$. Šādā veidā, no katra vienādojuma atņemot iepriekšējo, iegūstam, ka $x_k=1$, ja k ir pāra skaitlis, un $x_k=-1$, ja k ir nepāra skaitlis.

11. uzdevums. Saskaitām visus sistēmas n vienādojumus

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 3 \\ \ldots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + 2x_{n-1} + x_n = n-1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + 2x_n = n \end{array}$$

un dalām rezultātu ar n+1, tad iegūsim

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n+1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+1} = \frac{n}{2}$$

No vienādojumu sistēmas pirmā vienādojuma iegūstam

$x_1 + (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n) = 1$, tātad $x_1 = 1 - \frac{n}{2}$.

No otrā vienādojuma $x_2 + (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n) = 2$ seko, ka $x_2 = 2 - \frac{n}{2}$.

Analoģiski iegūstam $x_3=3-\frac{n}{2}$, ... , $x_n=n-\frac{n}{2}$.

12. uzdevums. Saskaitot visus sistēmas n vienādojumus

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & ... & + & (n-1)x_{n-1} & + & nx_n & = & 1 \\ x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & ... & + & (n-1)x_n & + & nx_1 & = & 2 \\ x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & + & ... & + & (n-1)x_1 & + & nx_2 & = & 3 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_{n-1} & + & 2x_n & + & 3x_1 & + & ... & + & (n-1)x_{n-3} & + & nx_{n-2} & = & n-1 \\ x_n & + & 2x_1 & + & 3x_2 & + & ... & + & (n-1)x_{n-2} & + & nx_{n-1} & = & n \end{array}$$

un ņemot vērā, ka $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, iegūstam

$$\frac{n(n+1)}{2}(x_1+x_2+...+x_n)=\frac{n(n+1)}{2};$$

tātad $x_1+x_2+...+x_n=1$.

Atņemot no sistēmas pirmā vienādojuma otro, iegūstam

$$(1-n)\,x_1+x_2+x_3+...+x_{n-1}+x_n=-1.$$

Pārveidojam šo vienādojumu šādā veidā

$$-nx_1+(x_1+x_2+x_3+...+x_{n-1}+x_n)=-1\,;$$

tad $x_1=\frac{x_1+x_2+...x_n+1}{n}=\frac{2}{n}$.

Analoģiski, atņemot no sistēmas otrā vienādojuma trešo, iegūstam

$$x_1+(1-n)\,x_2+x_3+...+x_{n-1}+x_n=-1$$

un $x_2=\frac{2}{n}$.

Tieši tāpat atrodam $x_3=x_4=...=x_{n-1}=\frac{n}{2}$. Atņemot sistēmas pirmo vienādojumu no pēdējā, iegūstam $x_1+x_2+...+x_{n-1}+(1-n)x_n=n-1$ un $x_n=\frac{(x_1+x_2+...+x_{n-1}+x_n)-n+1}{n}=\frac{2-n}{n}=\frac{2}{n}-1$.

Tātad: $x_1=x_2=x_3=...=x_{n-1}=\frac{2}{n}$, $x_n=\frac{2}{n}-1$.

13. uzdevums. No vienādojuma $2x_1-x_2=1$ izsakām $x_2=2x_1-1$ un ievietojam x_2 izteiksmi nākošajā vienādojumā $-x_1+2x_2-x_3=1$; tā varam izteikt $x_3=3x_1-3$. Analoģiski iegūstam

$$x_4=4x_1-6,$$
$$x_5=5x_1-10,$$
$$x_6=6x_1-15,$$
$$x_7=7x_1-21,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_k=kx_1-\frac{k(k-1)}{2},\quad (*)$$

ja k=2; 3; …; n–1. Šīs formulas pierāda ar matemātisko indukciju. Tā kā n ir pāra skaitlis, tad $n=2m$, kur m ir vesels skaitlis. Izsakām $x_{n-1}=x_{2m-1}$ un $x_n=x_{2m}$ vispārīgā veidā (*) un ievietojam dotajā vienādojumā $-x_{n-1}+2x_n=1$. Tad iegūstam

$$-\left[(2m-1)x_1-\frac{(2m-1)(2m-2)}{2}\right]+2\left[2mx_1-\frac{2m(2m-1)}{2}\right]=1.$$

Atrisinot šo vienādojumu, iegūstam, ka $x_1=m=\frac{n}{2}$. Tā kā n ir pāra skaitlis, tad m ir vesels skaitlis, līdz ar to x_1 ir vesels skaitlis. Tad arī citi x_i saskaņā ar (*) iznāk veseli.

14. uzdevums. Vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} \dfrac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=a \\ \dfrac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=b \end{cases}$$

ir reducējama uz lineāru vienādojumu sistēmu. Saskaitot abus dotos vienādojumus un atņemot tos vienu no otra, bet pēc tam sareizinot rezultātus, iegūsim x^2-y^2=a^2-b^2, no kurienes seko $\sqrt{x^2-y^2}=\sqrt{a^2-b^2}$. Ievietojot šos rezultātus dotajā vienādojumu sistēmā un risinot to kā lineāru sistēmu

$$\begin{cases} x - y\sqrt{a^2-b^2} = a\sqrt{1-a^2+b^2} \\ y - x\sqrt{a^2-b^2} = b\sqrt{1-a^2+b^2}, \end{cases}$$

iegūsim atrisinājumu $x=\dfrac{a+b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}$ un $y=\dfrac{b+a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}$. Tas, ka iegūtās formulas sakrīt ar dotajām, ja maina a ar x un b ar $-y$, ļauj mums neveikt pārbaudi: no atrisinājumu formulām kā secinājumu iegūst dotās formulas, mainot x ar a un y ar $-b$.

Atzīmēsim, ka nekas nemainītos, ja dotās vienādojumu sistēmas vietā būtu šāda:

$$\begin{cases} \dfrac{x-yf(x^2-y^2)}{\sqrt{1-f^2(x^2-y^2)}}=a \\ \dfrac{y-xf(x^2-y^2)}{\sqrt{1-f^2(x^2-y^2)}}=b, \end{cases}$$

kur f ir jebkura funkcija, kas pēc moduļa nepārsniedz 1.

15. uzdevums. Pieņemsim, ka mēs jau kaut kādā veidā esam noteikuši vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1-b_1} + \dfrac{x_2}{a_1-b_2} + \dots + \dfrac{x_n}{a_1-b_n} = 1 \\ \dfrac{x_1}{a_2-b_1} + \dfrac{x_2}{a_2-b_2} + \dots + \dfrac{x_n}{a_2-b_n} = 1 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{x_1}{a_n-b_1} + \dfrac{x_2}{a_n-b_2} + \dots + \dfrac{x_n}{a_n-b_n} = 1 \end{cases}$$

atrisinājumus; x_1, x_2, x_3,…, x_n nav nezināmie , bet kaut kādi noteikti skaitļi, kas apmierina doto vienādojumu sistēmu. Sastādām vienādojumu

$$\frac{x_1}{z-b}+\frac{x_2}{z-b_2}+\dots+\frac{x_n}{z-b_n}-1=0, \qquad (*)$$

kurā z uzskatīsim par nezināmo. Reizinām šo vienādojumu ar kopsaucēju un iegūstam ekvivalentu vienādojumu:

$$x_1(z-b_2)(z-b_3)\dots(z-b_n)+x_2(z-b_1)(z-b_3)\dots(z-b_n)+\dots+x_n(z-b_1)(z-b_2)\dots(z-b_{n-1}) -$$

$$-(z-b_1)(z-b_2)\dots(z-b_n)=0 \qquad (**)$$

Ņemot vērā doto vienādojumu sistēmu, šī vienādojuma saknes ir $z=a_1$, $z=a_2$, …, $z=a_n$, tātad n-tās pakāpes vienādojumam (**) ir n saknes $z_1=a_1$, $z_2=a_2$, …, $z_n=a_n$. Tā kā vienādojumam (**) ir sakne $z=a_1$, vienādojuma kreisā puse dalās ar $(z-a_1)$. Tieši tāpat tā dalās arī ar $(z-a_2)$, $(z-a_3)$, …, $(z-a_n)$, t.i. vienādojuma (**) kreisā puse dalās ar reizinājumu

$$-(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n). \qquad (***)$$

Tā kā reizinājums (***) ir n-tās pakāpes polinoms attiecībā uz z ar to pašu koeficientu (-1) pie z n-tās pakāpes, kāds ir vienādojuma (**) kreisajā pusē, tad izteiksmei (***) un vienādojuma (**) kreisajai pusei jābūt identiski vienādām:

$$x_1(z-b_2)(z-b_3)\dots(z-b_n)+x_2(z-b_1)(z-b_3)\dots(z-b_n)+\dots+x_n(z-b_1)(z-b_2)\dots(z-b_{n-1})=$$
$$=-(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n).$$

Esam ieguvuši identitāti attiecībā uz z. Pieņemot, ka $z=b_1$, iegūstam
$x_1(b_1-b_2)(b_1-b_3)\dots(b_1-b_n)=-(b_1-a_1)(b_1-a_2)\dots(b_1-a_n)$, no kurienes

$$x_1=-\frac{(b_1-a_1)(b_1-a_2)\dots(b_1-a_n)}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)\dots(b_1-b_n)}.$$

Analoģiski pierāda, ka

$$x_2=-\frac{(b_2-a_1)(b_2-a_2)\dots(b_2-a_n)}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)\dots(b_2-b_n)},$$

$$x_3=-\frac{(b_3-a_1)(b_3-a_2)(b_3-a_3)\dots(b_3-a_n)}{(b_3-b_1)(b_3-b_2)(b_3-b_4)\dots(b_3-b_n)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n=-\frac{(b_n-a_1)(b_n-a_2)\dots(b_n-a_n)}{(b_n-b_1)(b_n-b_2)\dots(b_n-b_{n-1})}.$$

Esam pierādījuši, ka, ja dotajai sistēmai eksistē atrisinājums, tad tas ir izteikts šādā veidā. Bet iespējams, ka šai sistēmai atrisinājums nemaz neeksistē. Ievietojot iegūto atrisinājumu dotajā vienādojumu sistēmā, varam pārliecināties, ka tas tiešām apmierina šo vienādojumu sistēmu.

16. uzdevums. Šo uzdevumu var risināt līdzīgi iepriekšējam. Pieņemsim, ka x_1, x_2, x_3,…, x_n ir vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \\ 1 + 2x_1 + 4x_2 + \dots + 2^n x_n = 0 \\ 1 + 3x_1 + 9x_2 + \dots + 3^n x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1 + nx_1 + n^2x_2 + \dots + n^n x_n = 0 \end{cases}$$

saknes (pieņemam, ka šai vienādojumu sistēmai eksistē atrisinājums). Sastādīsim vienādojumu $1+x_1z+x_2z^2+\dots+x_nz^n=0$, kurā z ir nezināmais.
Ņemot vērā doto vienādojumu sistēmu, šim vienādojumam ir saknes $z_1=1$, $z_2=2$, …, $z_n=n$. Tagad rīkojamies līdzīgi kā iepriekšējā uzdevumā un secinām, ka izteiksme

$$1+x_1z+x_2z^2+\dots+x_nz^n \qquad (*)$$

dalās ar

$$(z-1)(z-2)(z-3)\dots(z-n)=z^n+A_{n-1}z^{n-1}+A_{n-2}z^{n-2}+\dots+A_1z+A_0 \qquad (**)$$

Tā kā izteiksmēm (*) un (**) abām ir viena un tā pati n-tā pakāpe attiecībā pret mainīgo z, tad tās viena no otras var atšķirties vienīgi ar konstantu reizinātāju. Ja mēs izdalīsim (**) ar

$A_0=(-1)^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n=(-1)n!$, tad tai būs tas pats brīvais loceklis 1, kas ir izteiksmei (*). No šejienes seko identitāte

$$1+x_1z+x_2z^2+\ldots+x_nz^n=\frac{(-1)^n}{n!}(z^n+A_{n-1}z^{n-1}+A_{n-2}z^{n-2}+\ldots+A_1z+A_0)$$ un seko, ka

$$x_1=\frac{(-1)^n}{n!}A_1,\ x_2=\frac{(-1)^n}{n!}A_2,\ \ldots,\ x_{n-1}=\frac{(-1)^n}{n!}A_{n-1},\ x_n=\frac{(-1)^n}{n!},$$ kur koeficientus

A_1, A_2, …, A_{n-1} nosaka (**). Tāpat kā iepriekšējā uzdevumā atliek pārbaudīt, ka šis rezultāts tiešām apmierina doto vienādojumu sistēmu, kā tas tiešām arī ir.

17. uzdevums. No atrisinājuma vienīguma seko, ka visi skaitļi a_1, a_2, a_3, a_4 ir dažādi. Apskatām ceturtās pakāpes vienādojumu

$$t^4-(p+qt+rt^2+st^3)=0 \qquad (*)$$

Ņemot vērā doto vienādojumu sistēmu $x+a_iy+a_i^2z+a_i^3w=a_i^4$, kur $i=1,2,3,4$, vienādojuma (*) saknes ir a_1, a_2, a_3 un a_4, tāpēc (*) kreisā puse izsakās kā

$$(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-a_4)=a_1a_2a_3a_4-(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4)t+$$
$$+(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)\,t^2-(a_1+a_2+a_3+a_4)\,t^3+t^4. \quad (**)$$

Pielīdzinot koeficientus pie vienādām t pakāpēm izteiksmēs (*) un (**), iegūstam:

$$p=-a_1a_2a_3a_4,\quad q=\sum_{i<j<k}a_ia_ja_k,\quad r=-\sum_{i<j}a_ia_j,\ s=\sum_i a_i.$$

Līdzīgi, ja x, y, z un w ir vienādojumu sistēmas $x+a_i^2y+a_i^4z+a_i^6w=a_i^8$, kur $i=1,2,3,4$, atrisinājumi, tad, ņemot vērā, ka

$$(t^2-a_1^2)(t^2-a_2^2)(t^2-a_3^2)(t^2-a_4^2)=a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2-$$
$$-t^2(a_1^2a_2^2a_3^2+a_1^2a_2^2a_4^2+a_1^2a_3^2a_4^2+a_2^2a_3^2a_4^2)+$$
$$+t^4(a_1^2a_2^2+\ldots+a_3^2a_4^2)-t^6(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)+t^8,$$

varam izteikt vienādojumu sakņu un koeficientu sakarību:

$$x=-a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2=-p^2,$$

$$y=\sum_{i<j<k}a_i^2a_j^2a_k^2=\left(\sum_{i<j<k}a_ia_ja_k\right)^2-2\left(\sum_{i<j}a_ia_j\right)a_1a_2a_3a_4=q^2-2pr,$$

$$z=-\sum_{i<j}a_i^2a_j^2=-\left(\sum_{ij}a_ia_j\right)^2+2\left(\sum_{i<j<k}a_ia_ja_k\right)\left(\sum_i a_i\right)-2a_1a_2a_3a_4=$$

$$=-r^2+2qs+2p,$$

$$w=\sum_i a_i^2=\left(\sum_i a_i\right)^2-2\sum_{i<j}a_ia_j=s^2+2r.$$

2. nodaļa Vienādojumu sistēmu atrisināšana ar ievietošanas paņēmienu

1. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 79. \end{cases}$$

2. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 82 \\ 3x + 4y = 31. \end{cases}$$

3. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 1 - x_1 x_2 = 0 \\ 1 - x_2 x_3 = 0 \\ \ldots \;\ldots\; \ldots \;\ldots\; \ldots \\ 1 - x_{n-1} x_n = 0 \\ 1 - x_n x_1 = 0 \end{cases}$$

un novērtēt atrisinājumu pie dažādiem n.

4. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2y = 4 - x^2 \\ 2x = 4 - y^2. \end{cases}$$

5. uzdevums. Aprēķināt izteiksmes $ab+cd$ vērtību, ja

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0. \end{cases}$$

6. uzdevums. Atrast visus vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x_1(x_6 + x_2) = x_3 + x_5 \\ x_2(x_1 + x_3) = x_4 + x_6 \\ x_3(x_2 + x_4) = x_5 + x_1 \\ x_4(x_3 + x_5) = x_6 + x_2 \\ x_5(x_4 + x_6) = x_1 + x_3 \\ x_6(x_5 + x_1) = x_2 + x_4 \end{cases}$$

reālos atrisinājumus.

7. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} (x^3+y^3)(x^2+y^2) & = & 2b^5 \\ x+y & = & b. \end{cases}$$

8. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x & + & y & = & a \\ x^5 & + & y^5 & = & b^5. \end{cases}$$

9. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & a \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & a^2 \\ x^3 & + & y^3 & + & z^3 & = & a^3. \end{cases}$$

10. uzdevums. Atrast visus vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & \ldots & + & x_n & = & 1 \\ x_1^2 & + & x_2^2 & + & \ldots & + & x_n^2 & = & 1 \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots \\ x_1^n & + & x_2^n & + & \ldots & + & x_n^n & = & 1 \end{cases}$$

reālos atrisinājumus.

11. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 3xyz & - & x^3 & - & y^3 & - & z^3 & = & b^3 \\ x & + & y & + & z & = & 2b \\ x^2 & + & y^2 & - & z^2 & = & b^2. \end{cases}$$

Atrisinājumi (2. nodaļa)

1. uzdevums. Izsakām no vienādojumu sistēmas pirmā vienādojuma x=8-y un ievietojam to sistēmas otrajā vienādojumā:

$$(8-y)^2+3(8-y)+y^2=79.$$

Atrisinot kvadrātvienādojumu $y^2+8y-15=0$, iegūsim dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumus: $x_1=3$, $y_1=5$ un $x_2=5$, $y_2=3$.

2. uzdevums. Izsakām no dotās vienādojumu sistēmas otrā vienādojuma $x=\frac{31-4y}{3}$ un, ievietojot to sistēmas pirmajā vienādojumā, iegūstam

$$25y^2-248y+223=0.$$

No kurienes $x_1=9$, $y_1=1$ un $x_2=-1\frac{42}{75}=-1{,}56$, $y_2=8\frac{23}{25}=8{,}92$.

3. uzdevums. Jāatzīmē, ka vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} 1 & - & x_1x_2 & = & 0 \\ 1 & - & x_2x_3 & = & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & - & x_{n-1}x_n & = & 0 \\ 1 & - & x_nx_1 & = & 0 \end{cases}$$

visi x_i, $i=1,2,\ldots,n$, ir atšķirīgi no nulles.

No sistēmas pirmajiem diviem vienādojumiem seko, ka $x_1=x_3=\frac{1}{x_2}$. No sistēmas nākošajiem diviem vienādojumiem: $1-x_3x_4=0$ un $1-x_4x_5=0$ seko, ka $x_3=x_5$, bet no sistēmas otrā un trešā vienādojuma iegūst $x_2=x_4$ u.t.t. Ja n ir nepāra skaitlis, tad $x_1=x_n$, un no pēdējā sistēmas vienādojuma seko, ka $x_1=\pm1$, bet no pirmā vienādojuma iznāk, ka $x_2=x_1$. Tātad, ja n ir nepāra skaitlis $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=x_n=\pm1$. Ja n ir pāra skaitlis un $x_1=a$, tad $x_2=\frac{1}{a}$, un atrisinājumi ir $x_1=x_3=\ldots=x_{n-1}=a$, $x_2=x_4=\ldots=x_n=\frac{1}{a}$.

4. uzdevums. Izsakot no sistēmas pirmā vienādojuma $y=\frac{4-x^2}{2}$ un, ievietojot to sistēmas otrajā vienādojumā, iegūsim $2x=4-\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^2$, kas ir ceturtās pakāpes vienādojums. No šī vienādojuma seko, ka $x^4-8x^2+8x=0$.

Pārveidojam to reizinājumā

$$x(x^3-8x+8)=x(x^3+2x^2-2x^2-4x-4x+8)=x(x-2)(x^2+2x-4).$$

Tātad $x(x-2)(x^2+2x-4)=0$. Atrisinot šo vienādojumu, iegūstam dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumus:

$$(0;2),\ (2;0),\ (-1-\sqrt{5};-1-\sqrt{5}),\ (-1+\sqrt{5};-1+\sqrt{5}).$$

5. uzdevums. No dotās vienādojumu sistēmas pirmā vienādojuma seko, ka a un b nevar vienlaicīgi būt vienādi ar nulli. Pieņemsim, ka $a\neq 0$ (pretējā gadījumā, ja $b\neq 0$, tad skaitļus a, b un c, d katrā pārī var mainīt vietām). Atrisinot sistēmas trešo vienādojumu attiecībā pret c:

$$c=-\frac{bd}{a} \qquad (*)$$

un ievietojot to sistēmas otrajā vienādojumā, iegūstam vienādojumu

$$\frac{b^2d^2}{a^2}+d^2=\frac{(a^2+b^2)d^2}{a^2}=1,$$

no kurienes, ņemot vērā sistēmas pirmo vienādojumu, seko, ka $a^2=d^2$. Izmantosim sakarību (*) un pārveidosim izteiksmi

$$ab+cd=ab-\frac{bd^2}{a}=\frac{b(a^2-d^2)}{a}.$$

Ņemot vērā vienādību $a^2=d^2$, iegūstam, ka $ab+cd=0$.

Otrais risināšanas veids. Reizinot sistēmas trešā vienādojuma kreiso un labo pusi ar $ad+bc$, iegūstam

$$(ac+bd)(ad+bc)=a^2cd+d^2ab+c^2ab+b^2cd=ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)=0.$$

Ņemot vērā dotās vienādojumu sistēmas pirmos divus vienādojumus, iegūstam, ka

$$ab+cd=0.$$

6. uzdevums. No dotās vienādojumu sistēmas pirmā un ceturtā vienādojumiem iegūstam šādus divus vienādojumus

$$(x_1x_4-1)(x_3+x_5)=0$$

$$(x_1x_4-1)(x_6+x_2)=0. \qquad (*)$$

No sistēmas trešā un sestā vienādojumiem:

$$(x_3x_6\text{-}1)(x_2+x_4)=0$$

$$(x_3x_6\text{-}1)(x_5+x_1)=0, \qquad (**)$$

bet no sistēmas otrā un piektā vienādojumiem:

$$(x_2x_5\text{-}1)(x_4+x_6)=0,$$

$$(x_2x_5\text{-}1)(x_1+x_3)=0. \qquad (***)$$

Ja pielīdzinām nullei iegūto vienādojumu pirmās iekavas, seko, ka

$x_1=\frac{1}{x_4}$, $x_2=\frac{1}{x_5}$, $x_3=\frac{1}{x_6}$, pie kam neviens no x_1, x_2, …, x_6 nav vienāds ar nulli.

Ievietojot šīs sakarības dotajā vienādojumu sistēmā, iegūstam šādu vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x_1x_2 & = & x_3 \\ x_1x_2x_3 & = & 1 \\ x_3x_2 & = & x_1, \end{cases}$$

kuras atrisinājums ir $x_1=x_2=x_3=1$ un līdz ar to $x_4=x_5=x_6=1$.

Ja pielīdzinām nullei vienādojumu (*), (**), (***) otrās iekavas, iegūsim, ka

$\underline{x_3}=-x_5=x_1=\underline{-x_3}$, līdz ar to $x_1=x_3=x_5=0$,

$x_2=\underline{-x_6}=-x_4=\underline{x_6}$, tāpēc $x_2=x_4=x_6=0$.

Vienlaicīgi vienādojumu (*), (**), (***) abas iekavas nevar būt vienādas ar nulli, jo otrās iekavas dod atrisinājumu $x_1=x_2=\ldots=x_6=0$, bet pirmās iekavas ir vienādas ar nulli tad, ja spēkā ir nosacījums, ka neviens no x_1, x_2,…,x_6 nav vienāds ar nulli.

Ievietojot atrisinājumus (0;0;0;0;0;0) un (1;1;1;1;1;1) dotajā vienādojumu sistēmā, pārliecināmies, ka tie der.

7. uzdevums. No vienādojumu sistēmas otrā vienādojuma izsakām x^2+y^2 un x^3+y^3:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=b^2-2xy,$$
$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=b(b^2-3xy).$$

Ievietojot šīs izteiksmes dotās vienādojumu sistēmas pirmajā vienādojumā:

$$b(b^2-3xy)(b^2-2xy)=2b^5,$$

iegūstam $6x^2y^2-5b^2xy-b^4=0$, tad

$xy=\frac{5b^2\pm\sqrt{25b^4+24b^4}}{12}=\frac{5b^2\pm 7b^2}{12}$ un $(xy)_1=b^2$, $(xy)_2=-\frac{b^2}{6}$.

Tagad jārisina divas vienādojumu sistēmas:

$$\begin{cases} xy & = & b^2 \\ x+z & = & b \end{cases} \quad \text{un} \quad \begin{cases} xy & = & -\frac{b^2}{6} \\ x+y & = & b \end{cases}.$$

Pirmajai vienādojumu sistēmai reāla atrisinājuma nav, jo diskriminants ir negatīvs, bet, risinot otro vienādojumu sistēmu, iegūstam, ka

$$x=\frac{b}{6}(3\pm\sqrt{15}) \quad \text{un} \quad y=\frac{b}{6}(3\mp\sqrt{15}).$$

Ievietojot šos atrisinājumus dotajā vienādojumu sistēmā, pārliecināmies, ka tie tiešām der.

8. uzdevums. Izsakām (x^5+y^5), ņemot vērā abus sistēmas vienādojumus

$$\begin{matrix} x & + & y & = & a, \\ x^5 & + & y^5 & = & b^5, \end{matrix}$$

$$(x+y)^5 = x^5+5xy^4+10x^2y^3+10x^3y^2+5x^4y+y^5 =$$
$$=5xy(x^3+y^3)+10x^2y^2(x+y)+x^5+y^5=a^5.$$

Tā kā $x+y=a$, $x^5+y^5=b^5$ un $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=a(a^2-3xy)$, iegūst

$$5ax^2y^2-5a^3xy+a^5-b^5=0$$

un

$$xy=\frac{5a^3\pm\sqrt{25a^6-20a(a^5-b^5)}}{10a}=\frac{5a^3\pm\sqrt{5a^6+20ab^5}}{10a}.$$

Jārisina divas vienādojumu sistēmas:

$$\begin{cases} x+y = a \\ xy = \dfrac{5a^3+\sqrt{5a^6+20ab^5}}{10a} \end{cases} \quad \text{un} \quad \begin{cases} x+y = a \\ xy = \dfrac{5a^3-\sqrt{5a^6+20ab^5}}{10a} \end{cases}.$$

Ievietojot $y=a-x$: $(-x^2+ax)\cdot 10a = 5a^3\pm\sqrt{5a^6+20ab^5}$

iegūstam dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumus:

$$x=\frac{5a^2\pm\sqrt{-25a^4\mp10a\sqrt{5a^6+20ab^5}}}{10a},\ y=a-x=\frac{5a^2\mp\sqrt{-25a^4\mp10a\sqrt{5a^6+20ab^5}}}{10a}.$$

9. uzdevums. Kāpinām vienādojumu sistēmas pirmo vienādojumu kubā:

$$\begin{aligned}(x+y+z+)^3 &= x^3+y^3+z^3+3(x^2y+yx^2+x^2z+zx^2+y^2z+zy^2+2xyz)= \\ &= x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(x+z)\end{aligned} \qquad (*)$$

Tā kā no sistēmas trešā vienādojuma seko, ka $x^3+y^3+z^3=a^3$, bet no pirmā vienādojuma, ka $(x+y+z)^3=a^3$, tad vienādojumā (*) pēdējais saskaitāmais ir vienāds ar nulli:

$$3(x+y)(y+z)(z+x)=0.$$

Pielīdzinām katru reizinātāju nullei:

ja $x+y=0$, tad no sistēmas pirmā vienādojuma seko, ka $z=a$, un no otrā vienādojuma, ka $x=y=0$. Analoģiski atrod arī citus atrisinājumus, pielīdzinot nullei otro un trešo iekavu. Tātad sistēmas atrisinājumi ir $(0;0;a)$,$(0;a;0)$, $(a;0;0)$.

10. uzdevums. Risinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & \ldots & + & x_n & = & 1 \\ x_1^2 & + & x_2^2 & + & \ldots & + & x_n^2 & = & 1 \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots \\ x_1^n & + & x_2^n & + & \ldots & + & x_n^n & = & 1, \end{cases}$$

apskatām šādus gadījumus:

1) ja $n=2$, tad jārisina šāda sistēma $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \end{cases}$

kuras vienīgie reālie atrisinājumi ir (1;0) un (0;1);

2) ja $n=3$, tad jārisina šāda sistēma $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 1 \end{cases}$ (*)

Kāpinām sistēmas (*) pirmo vienādojumu kubā

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \\ &+ 3(x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2 + x_1 x_3^2 + x_3 x_1^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2 + 2xyz) = \qquad (**) \\ &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_1 + x_3). \end{aligned}$$

Ņemot vērā, ka $(x_1+x_2+x_3)^3=1$, kas seko no sistēmas (*) pirmā vienādojuma, un sistēmas (*) trešo vienādojumu: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 1$, no vienādojuma (**) seko, ka

$$3(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_1 + x_3) = 0..$$

Pielīdzinām katru reizinātāju nullei:

a) ja $x_1+x_2=0$, tad no sistēmas (*) pirmā vienādojuma seko, ka $x_3=1$, bet no otrā vienādojuma, ka $x_1=x_2=0$*:*

b) ja $x_2+x_3=0$, tad $x_1=1$, bet $x_2=x_3=0$;

c) ja $x_1+x_3=0$, tad $x_2=1$, bet $x_1=x_3=0$.

Tātad sistēmai (*) eksistē trīs atrisinājumi (0;0;1), (0;1;0), (1;0;0);

3) ja $n \geq 4$ dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumi ir

(1;0;…;0), (0;1;0;…;0), (0;0;…;0;1).

Pierādīsim, ka dotajai vienādojumu sistēmai citu atrisinājumu nav.

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 = (x_1^4)^2 + (x_2^4)^2 + \ldots + (x_n^4)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^2 - 2(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2 x_n^2).$$

No šīs vienādības iegūstam, ka $2(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2 x_n^2) = 0$. Tas nozīmē, ka skaitļi x_1, x_2, …, x_n, izņemot vienu no tiem, ir vienādi ar nulli.

11. uzdevums. Risinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 3xyz - x^3 - y^3 - z^3 = b^3 \\ x + y + z = 2b \\ x^2 + y^2 - z^2 = b^2, \end{cases}$$

apskatām divus gadījumus: ja $b=0$ un ja $b \neq 0$. Gadījumā, ja $b=0$, tad jārisina šāda vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} 3xyz = x^3 + y^3 + z^3 \\ x + y + z = 0 \\ x^2 = z^2 - y^2. \end{cases} \qquad (*)$$

No šīs sistēmas otrā vienādojuma izsakām $x=-(z+y)$, tad

$$x^2 = (y+z)^2 = y^2 + 2yz + z^2. \qquad (**)$$

Ievietojot šajā vienādojumā sistēmas (*) trešo vienādojumu $x^2=z^2-y^2$, dabū $2y(y+z)=0$.

Pielīdzinām katru reizinātāju nullei: ja $y=0$, tad no sistēmas (*) otrā vienādojuma seko, ka $x=-z$. Ievietojot $x=-z$ sistēmas (*) pirmajā vienādojumā, iegūst $-3x^2=0$,

tāpēc šajā gadījumā atrisinājums ir $x=y=z=0$;

ja $z+y=0$, tad, spriežot analoģiski, iegūstam to pašu atrisinājumu $x=y=z=0$.

Gadījumā, ja $b \neq 0$, doto vienādojumu sistēmu varam pārrakstīt šādi:

$$\begin{cases} z^3 + x^3 + y^3 = 3xyz - b^3 \\ x + y + z = 2b \\ y^2 - z^2 = b^2 - x^2. \end{cases}$$

Kāpinām šīs vienādojumu sistēmas otro vienādojumu kubā

$$8b^3 = (x+y+z)^3,$$
$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y)) + 6xyz.$$

No sistēmas otrā vienādojuma izsakām $x+y=2b-z$, $x+z=2b-y$ un $y+z=2b-x$ tad

$$8b^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 6b(x^2 + y^2 + z^2) - 3(x^3 + y^3 + z^3) =$$
$$= 6b\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 2\left(x^3 + y^3 + z^3\right).$$

Ņemot vērā sistēmas pirmo vienādojumu, iegūstam, ka $x^2+y^2+z^2=b^2$. Bet sistēmas otrais vienādojums ir $x^2+y^2-z^2=b^2$,

tātad $z=0$, un sistēma ir šāda:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = -b^3 \\ x + y = 2b \\ x^2 + y^2 = b^2. \end{cases}$$

Šai sistēmai atrisinājuma nav.

3. nodaļa Vienādojumu sistēmu atrisināšana, ievedot jaunu mainīgo

1. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x - y = xy + 11 \\ x^2 y - y^2 x + 30 = 0 \end{cases}$$

reālos skaitļos.

2. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} xy = x + y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

reālos skaitļos.

3. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^3 + y^3 = 2 \end{cases}$$

pozitīvos skaitļos.

4. uzdevums. Atrast visus reālos vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^4 + y^4 = 7 \end{cases}$$

atrisinājumus.

5. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \sqrt{X} & - & \dfrac{1}{Y} & - & 2W & + & 3Z & = & 1 \\ X & + & \dfrac{1}{Y^2} & - & 4W^2 & - & 9Z^2 & = & 3 \\ X\sqrt{X} & - & \dfrac{1}{Y^3} & - & 8W^3 & + & 27Z^3 & = & -5 \\ X^2 & + & \dfrac{1}{Y^4} & - & 16W^4 & - & 81Z^4 & = & 15. \end{cases}$$

6. uzdevums Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2x & + & x^2y & = & y \\ 2y & + & y^2x & = & z \\ 2z & + & z^2y & = & x. \end{cases}$$

7. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 4xy(2x^2-1) & =1 \\ x^2+y^2 & =1. \end{cases}$$

8. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \sqrt{xy} & + & \sqrt{(1-x)(1-y)} & =a \\ \sqrt{x(1-y)} & + & \sqrt{y(1-x)} & =b. \end{cases}$$

Atrisinājumi (3. nodaļa)

1. uzdevums. Risinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x - y = xy + 11 \\ x^2y - y^2x + 30 = 0, \end{cases}$$

apzīmējam $u=x-y$ un $v=xy$. Tad doto sistēmu varam uzrakstīt šādā veidā

$$\begin{cases} u = v + 11 \\ uv + 30 = 0, \end{cases}$$

kuras atrisinājumi ir (6;-5) un (5;-6).

Tagad, risinot vienādojumu sistēmas:

$$\begin{cases} x-y = 6 \\ xy = -5 \end{cases} \quad \text{un} \quad \begin{cases} x-y = 5 \\ xy = -6, \end{cases}$$

iegūsim dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumus:

(1;-5), (5;-1), (2;-3), (3;-2).

2. uzdevums. Risinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} xy = x + y \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

apzīmējam $xy=x+y=a$. Tad no sistēmas otrā vienādojuma iegūstam

$$a^2\text{-}2a=1, \text{ kur } a = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Sistēmai $xy = x + y = 1 + \sqrt{2}$ nav reālu atrisinājumu, bet sistēmai

$$xy = x + y = 1 - \sqrt{2} \text{ ir atrisinājumi } \left(\frac{-\sqrt{2}+1-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}; \frac{-\sqrt{2}+1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \right).$$

3. uzdevums. Risinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^3 + y^3 = 2, \end{cases}$$

apzīmējam $a=x+y$ un $b=xy$, tad sistēmu var uzrakstīt šādi

$$\begin{cases} a^2-2b &= 2 \\ a(a^2-3b) &= 2. \end{cases}$$

No šīs sistēmas pirmā vienādojuma izsakām $b=\dfrac{a^2-2}{2}$ un, ievietojot to šīs sistēmas otrajā vienādojumā, iegūstam vienādojumu $a^3-6a+4=0$,

kuru varam sadalīt reizinātājos $(a-2)(a^2+2a-2)=0$. Šim vienādojumam ir trīs atrisinājumi:

1. atrisinājums: ja a=2, tad b=1. Risinot sistēmu $\begin{cases} x+y &= 2 \\ xy &= 1, \end{cases}$ atrodam, ka $x=y=1$;

2. atrisinājums: ja $a=-1+\sqrt{3}$, tad x un y nevar būt pozitīvi skaitļi, kā tas ir prasīts uzdevuma noteikumos, jo $b=xy<0$;

3. atrisinājums: ja $a=-1-\sqrt{3}$, tad arī x un z nav pozitīvi skaitļi.

Tātad dotās vienādojumu sistēmas vienīgais pozitīvais atrisinājums ir $x=y=z=1$.

4. uzdevums. Pārveidojam dotās vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^4 + y^4 = 7 \end{cases}$$

otro vienādojumu šādā veidā:

$$(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=7. \qquad (*)$$

Apzīmējam $x^2+y^2=u$ un $xy=v$, tad vienādojumu (*) varam uzrakstīt

$$u^2-2v^2=7\ . \qquad (**)$$

Kāpinot kvadrātā sistēmas pirmo vienādojumu, iegūsim vēl vienu nosacījumu izteiksmēm u un v:

$$u+2v=1. \qquad (***)$$

Izslēdzot u no vienādojumiem (**) un (***), iegūstam v^2-2v-3=0. Atrisinot šo vienādojumu, iegūstam, ka v_1=3 un v_2=-1. Tad attiecīgi u_1=-5 un u_2=3. Tā kā $u = x^2+y^2$ un mūs interesē tikai reālie vienādojumu sistēmas atrisinājumi, tad pirmo u un v pāri atmetam. Otro atrisinājumu pāri izmantojam dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumu noteikšanai:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy = -1. \end{cases}$$

Šai vienādojumu sistēmai eksistē četri reāli atrisinājumi

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Pārbaudot iegūtos atrisinājumus, redzam, ka dotajai vienādojumu sistēmai der tikai divi pirmie atrisinājumi.

5. uzdevums. Apzīmējam $x=\sqrt{X}$, $y=\frac{1}{Y}$, z=-3Z un w=2W. Tad dotā vienādojumu sistēma izskatās šādi

$$\begin{cases} x + y = w + z + 1 \\ x^2 + y^2 = w^2 + z^2 + 3 \\ x^3 + y^3 = w^3 + z^3 - 5 \\ x^4 + y^4 = w^4 + z^4 + 15. \end{cases}$$

Kāpinām sistēmas pirmo vienādojumu kvadrātā un, izmantojot otro vienādojumu:

$$x^2+y^2+2xy= w^2+z^2+1+2(wz+w+z),$$
$$x^2+y^2= w^2+z^2+3,$$

iegūsim, ka $xy=-1+ wz+w+z$. (1)

Tālāk reizinām sistēmas pirmo vienādojumu ar otro, ņemsim vērā arī trešo vienādojumu un ievietosim iegūtajā vienādojumā sistēmas pirmo vienādojumu un vienādojumu (1), tad iegūsim:

$$wz= 3+w+z \quad (2)$$
$$xy=2+2w+2z \quad (3)$$

Kāpinot sistēmas otro vienādojumu kvadrātā un ņemot vērā sistēmas ceturto vienādojumu, iegūsim

$$x^2y^2=-3+3w^2+3z^2+w^2z^2. \quad (4)$$

Tad kāpinām kvadrātā vienādojumu (1) un, izmantojot vienādojumus (4) un (2), iegūstam

$$3wz=1-w-z \quad (5)$$

No sistēmas pirmā vienādojuma un vienādojuma (2) izrēķinām $w=z=-1$; no sistēmas pirmā vienādojuma un vienādojuma (3), iegūstam x_1=-2 un y_1=1 un x_2=1 un y_2=-2. Pirmais atrisinājuma pāris neder, jo $x=\sqrt{X}$, tātad $x\geq 0$. Esam ieguvuši atrisinājumus:

$X=1,\ Y=-\frac{1}{2},\ W=-\frac{1}{2}$ un $Z=\frac{1}{3}$, kurus ievietojot dotajā vienādojumu sistēmā, pārliecināmies, ka tie patiešām der.

6. uzdevums. Lai atrisinātu šo vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2x = z \\ 2z + z^2y = x, \end{cases}$$

apzīmējam $x = tg\,\alpha$, kur $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

No sistēmas pirmā vienādojuma izsakot *y*, iegūsim $y = \frac{2x}{1-x^2} = tg2\alpha,$ no sistēmas otrā vienādojuma: $z = tg4\alpha$, bet no sistēmas trešā vienādojuma: $x = tg8\alpha$. Tātad $x = tg\alpha = tg8\alpha$, tas ir $7\alpha = \pi k$. Tātad $\alpha = \frac{\pi k}{7}$. Pie kam $x = tg\frac{\pi k}{7}$, $y = tg\frac{2\pi k}{7}$ un $z = tg\frac{4\pi k}{7}$.

Pārbaude parāda, ka , ja $k \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$, iegūtie 7 skaitļu *x, y, z* komplekti ir dažādi un ir dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumi.

7. uzdevums. Risinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 4xy(2x^2-1) = 1 \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

apzīmē $x = \cos t$ un $y = \sin t$.
Tad sistēmas otrais vienādojums pārvēršas identitātē, bet pirmais:

$$4\sin t\ \cos t\ (2\cos^2 t - 1) = 1,$$

kuru pārveidojot, iegūst $\sin 4t = 1$ un no kurienes $t = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k,$

kur k=1,2,3. Tātad dotajai vienādojumu sistēmai ir četri atrisinājumi $x_k = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k\right)$ un $y_k = \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k\right)$.

Atradīsim, piemēram, x_0 un y_0. Pēc kosinusa divkāršā argumenta formulas $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, no kurienes $x_0 = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Analoģiski atrodam $y_0 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

8. uzdevums. Šo uzdevumu var atrisināt divos veidos.

1. veids. Apzīmējam $u = \sqrt{xy}$ un $v = \sqrt{(1-x)(1-y)}$, tad $a \geq 0,\ b \geq 0,\ u \geq 0$ un $v \geq 0$.
Sistēmas pirmo vienādojumu uzrakstām, kā

$$u + v = a, \qquad (*)$$

bet $v^2 = 1 - x - y + u^2$, no kurienes iegūstam, ka $x + y = 1 + u^2 - v^2$. Līdz ar to sistēmas otrais vienādojums ir uzrakstāms šādā veidā:

$$1 + 2uv - v^2 - u^2 = b^2. \qquad (**)$$

Izsakot no vienādojuma (*) $v=a-u$ un ievietojot to vienādojumā (**), iegūstam $4u^2-4au+a^2+b^2-1=0$, no kurienes $u=\frac{a\pm\sqrt{1-b^2}}{2}$, bet $v=a-u=\frac{a\mp\sqrt{1-b^2}}{2}$, kur $b\le 1$. Lai atrastu x un y vērtības, jārisina divas vienādojumu sistēmas:

$$1.\ \begin{cases} \sqrt{xy} = \dfrac{a+\sqrt{1-b^2}}{2} \\ \sqrt{(1-x)(1-y)} = \dfrac{a-\sqrt{1-b^2}}{2} \end{cases} \text{ un } 2.\ \begin{cases} \sqrt{xy} = \dfrac{a-\sqrt{1-b^2}}{2} \\ \sqrt{(1-x)(1-y)} = \dfrac{a+\sqrt{1-b^2}}{2} \end{cases}.$$

Pārveidojot pirmo vienādojumu sistēmu, iegūstam

$$\begin{cases} xy = \dfrac{1}{4}(a^2+2a\sqrt{1-b^2}+1-b^2) \\ x+y = 1+a\sqrt{1-b^2}, \end{cases}$$

no otrā vienādojuma izsakām $y=1+a\sqrt{1-b^2}-x$, ko ievietojam pirmajā vienādojumā: $x^2-(1+a\sqrt{1-b^2})x+\frac{1}{4}(a^2+2a\sqrt{1-b^2}+1-b^2)=0$ un atrodam $x=\frac{1+a\sqrt{1-b^2}\pm b\sqrt{1-a^2}}{2}$ un $y=\frac{1+a\sqrt{1-b^2}\mp b\sqrt{1-a^2}}{2}$.

Risinot otro vienādojumu sistēmu, iegūstam:

$$x=\frac{1-a\sqrt{1-b^2}\pm b\sqrt{1-a^2}}{2} \text{ un } y=\frac{1-a\sqrt{1-b^2}\mp b\sqrt{1-a^2}}{2}.$$

Ievietojot šos atrisinājumus dotajā vienādojumu sistēmā, pārliecināmies, ka šai sistēmai ir četri atrisinājumi:

$$\left(\frac{1+a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}}{2};\frac{1+a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}}{2}\right),$$
$$\left(\frac{1+a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}}{2};\frac{1+a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}}{2}\right),$$
$$\left(\frac{1-a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}}{2};\frac{1-a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}}{2}\right),$$
$$\left(\frac{1-a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}}{2};\frac{1-a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}}{2}\right).$$

2. risināšanas veids. Apzīmējam $x=sin^2t$ un $y=sin^2v$, kur $0\le t\le\pi, 0\le v\le\pi$. Tad doto vienādojumu sistēmu varam uzrakstīt šādi:

$$\begin{cases} |\sin t\sin v|+|\cos t\cos v| = a \\ |\sin t\cos v|+|\sin v\cos t| = b \end{cases}$$

un izmantojot trigonometriskos pārveidojumus , iegūstam

$$\begin{cases} |\cos(t-v)| & = a \\ |\sin(t+v)| & = b. \end{cases}$$

Ņemot vērā, ka $t - v = \begin{cases} \arccos a, & \cos(t-v) \geq 0, \\ -\arccos a, & \cos(t-v) < 0 \end{cases}$ un $t + v = \begin{cases} \arcsin b, & \sin(t+v) \geq 0, \\ \pi - \arcsin b, & \sin(t+v) > 0, \end{cases}$

varam uzrakstīt četras vienādojumu sistēmas:

$$1)\begin{cases} t - v & = \arccos a \\ t + v & = \arcsin b \end{cases}, \qquad 2)\begin{cases} t - v & = -\arccos a \\ t + v & = \arcsin b \end{cases},$$

$$3)\begin{cases} t - v & = -\arccos a \\ t + v & = \pi - \arcsin b \end{cases}, \qquad 4)\begin{cases} t - v & = \arccos a \\ t + v & = \pi - \arcsin b \end{cases},$$

kur $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ un $0 \leq v \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Risinot pirmo vienādojumu sistēmu ar saskaitīšanas paņēmienu, iegūstam, ka

$t = \dfrac{1}{2}(\arccos a + \arcsin b)$ un $v = \dfrac{1}{2}(\arccos a - \arcsin b)$, tad

$$x_1 = \sin^2 t = \sin^2 \frac{1}{2}(\arccos a + \arcsin b).$$

Izmantojot trigonometriskās formulas:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha),$$

$$\cos\arccos x = x,$$

$$\sin\arcsin x = x,$$

$$\cos\arcsin x = \sqrt{1-x^2},$$

$$\sin\arccos x = \sqrt{1-x^2}, ja\ 0 \leq x \leq 1,$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 - \cos(\arccos a + \arcsin b) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - (\cos\arccos a \cos\arcsin b - \sin\arccos a \sin\arcsin b)) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}),$$

$$y_1 = \sin^2 v = \frac{1}{2}(1 - \cos(\arccos a - \arcsin b) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - (\cos\arccos a \cos\arcsin b + \sin\arccos a \sin\arcsin b)) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}).$$

Risinot otro vienādojumu sistēmu, iegūstam, ka $t = \dfrac{1}{2}(\arcsin b - \arccos a)$ un $v = \dfrac{1}{2}(\arcsin b + \arccos a)$, līdz ar to

$$x_2 = \sin^2 t = y_1 = \frac{1}{2}(1 - a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}) \text{ un}$$
$$y_2 = \sin^2 v = x_1 = \frac{1}{2}(1 - a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}).$$

Risinot trešo vienādojumu sistēmu, saskaitot abus vienādojumus, iegūstam

$t = \frac{1}{2}(\pi - \arcsin b - \arccos a)$ un $v = \frac{1}{2}(\pi - \arcsin b + \arccos a)$, līdz ar to

$$x_3 = \frac{1}{2}(1 + a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}) \text{ un}$$

$$y_3 = \frac{1}{2}(1 + a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}).$$

No ceturtās vienādojumu sistēmas seko, ka $t = \frac{1}{2}(\pi - \arcsin b + \arccos a)$ un

$v = \frac{1}{2}(\pi - \arcsin b - \arccos a)$, tad

$$x_4 = y_3 = \frac{1}{2}(1 + a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}) \text{ un}$$

$$y_4 = x_3 = \frac{1}{2}(1 + a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}).$$

Esam ieguvuši visus tos pašus četrus atrisinājumus, kādus atradām risinot doto sistēmu algebriski.

4. nodaļa

4.1. Vienādojumu sistēmu atrisināšana, saskaitot, atņemot vai reizinot sistēmas vienādojumus

1. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a & = & bcd \\ a+b & = & cd \\ a+b+c & = & d \\ a+b+c+d & = & 1. \end{cases}$$

2. uzdevums. Atrast visus iespējamos piecu pozitīvu skaitļu komplektus, kuriem izpildās nosacījums: jebkuru trīs skaitļu summa ir vienāda ar pārējo divu reizinājumu.

3. uzdevums. Atrast visus iespējamos septiņu reālu skaitļu komplektus, kuriem izpildās nosacījums: jebkuru četru skaitļu summa ir vienāda ar pārējo trīs reizinājumu.

4. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x(x+y+z)=a \\ y(x+y+z)=b \\ z(x+y+z)=c \end{cases}$$

reālos skaitļos.

5. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{z}=a \\ \dfrac{xz}{y}=b \\ \dfrac{yz}{x}=c \end{cases}$$

reālos skaitļos.

6. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + xy + y & = & 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 & = & 6. \end{cases}$$

7. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + (y - z)^2 = a \\ y^2 + (x - z)^2 = b \\ z^2 + (x - y)^2 = c. \end{cases}$$

8. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 = a + (z - y)^2 \\ y^2 = b + (z - x)^2 \\ z^2 = c + (x - y)^2. \end{cases}$$

Atrisinājumi (4.1 nodaļa)

1. uzdevums. Atņemot no sistēmas

$$\begin{cases} a &= bcd \\ a+b &= cd \\ a+b+c &= d \\ a+b+c+d &= 1 \end{cases}$$

ceturtā vienādojuma trešo, no trešā vienādojuma otro, un no otrā vienādojuma- pirmo, iegūstam vienādības:

$$d=1\text{-}d,$$

$$c=d\text{-}cd,$$

$$b=cd\text{-}bcd,$$

no kurām pēc kārtas iegūst $d=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{7},$ tāpēc $a=\frac{1}{42}.$

2. uzdevums. Apzīmēsim meklējamos skaitļus ar *a, b, c, d* un *e*. Tā kā $a+c+d=be$ un $b+c+d=ae$, tad, atņemot šos vienādojumus, iegūst $a-b=be-ae=(b-a)e$. Ņemot vērā nosacījumu, ka visi skaitļi ir pozitīvi, tad šī vienādība izpildās vienīgi gadījumā, kad $a=b$. Tā kā skaitļi *a* un *b* ir brīvi izvēlēti, tad esam pierādījuši, ka visi šie pieci skaitļi savā starpā ir vienādi. Tāpēc $3a=a^2$ un, tā kā *a* ir pozitīvs, iegūstam, ka $a=b=c=d=e=3$.

3. uzdevums. Apzīmēsim dotos skaitļus ar a, *b, c, d, e, f* un *g*. Tā kā $a+c+d+e=bfg$ un $b+c+d+e=afg$, tad, atņemot otro vienādojumu no pirmā, iegūst $a-b=(b-a)fg$. Ja $a\neq b$, tad fg=-1. Ņemot vērā, ka skaitļi *a* un *b* ir brīvi izvēlēti, tad, ja $a\neq b$, tad jebkuru divu pārējo skaitļu reizinājums ir vienāds ar -1. Piemēram, fg=-1, fc=-1 un gc=-1, tad $f=-\frac{1}{g}$, $f=-\frac{1}{c}$, tad $g=c$, nevis $g=-\frac{1}{c}$. Te ir iegūta pretruna. Tas nozīmē, ka visi septiņi skaitļi ir vienādi: $a=b=c=d=e=f=g$. Tātad $4a=a^3$ un līdz ar to $a=b=c=d=e=f=g\in\{0,2,-2\}$.

4. uzdevums. Saskaitot visus sistēmas

$$\begin{cases} x(x+y+z)=a \\ y(x+y+z)=b \\ z(x+y+z)=c \end{cases}$$

vienādojumus, iegūstam $(x+y+z)^2 = a+b+c$.

Ja $a+b+c<0$, tad atrisinājuma nav.

Ja $a+b+c=0$, tad $x+y+z=0$, un no dotās vienādojumu sistēmas iegūstam, ka atrisinājums ir tikai tad, ja $a=b=c=0$, un tad par atrisinājumu der jebkurš $(x;y;z)$, kam $x+y+z=0$.

Ja $a+b+c>0$, tad $x+y+z=\pm\sqrt{a+b+c}$, un no dotās vienādojumu sistēmas iegūstam divus atrisinājumus: $(x;y;z)=\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a+b+c}};\pm\frac{b}{\sqrt{a+b+c}};\pm\frac{c}{\sqrt{a+b+c}}\right)$. Pārbaude šoreiz nav obligāta, jo atrisinājumi iegūti tieši no sistēmas.

5. uzdevums. Ja, piemēram, $a=0$, tad no dotās sistēmas

$$\begin{cases} \frac{xy}{z}=a \\ \frac{xz}{y}=b \\ \frac{yz}{x}=c \end{cases}$$

pirmā vienādojuma seko, ka $x=0$ vai $y=0$, bet kādam no pārējiem vienādojumiem kreisā puse nav definēta. Tāpēc, ja kaut viens no skaitļiem a, b, c ir vienāds ar nulli, vienādojumu sistēmai atrisinājuma nav. Ja $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$, tad sareizinot visus vienādojumus, iegūst $xyz=abc$. Dalot šo vienādojumu ar sistēmas vienādojumiem, iegūst $z^2=bc$, $y^2=ac$, $x^2=ab$. Tātad, ja starp skaitļiem a, b, c ir dažādu zīmju skaitļi, tad atrisinājuma nav. Ja visiem a, b un c zīmes ir vienādas, tad $x=\pm\sqrt{ab}$, $y=\pm\sqrt{ac}$, $z=\pm\sqrt{bc}$. Jānoskaidro, kuras zīmju kombinācijas ir derīgas. No sistēmas vienādojumiem redzams: ja $a>0$, $b>0$, $c>0$, tad no 8 atrisinājumiem $(x;y;z)=\left(\mp\sqrt{ab};\mp\sqrt{ac};\mp\sqrt{bc}\right)$ der tie četri, kuros ir pāra skaits "-" zīmju; ja $a<0$, $b<0$, $c<0$, tad der tie četri, kuros ir nepāra skaits "-" zīmju. Šī fakta noskaidrošanas gaitā notiek arī atrisinājuma pārbaude.

6. uzdevums. Reizinot sistēmas

$$\begin{cases} x+xy+y = 2+3\sqrt{2} \\ x^2+y^2 = 6 \end{cases}$$

pirmo vienādojumu ar divi un saskaitot ar otro vienādojumu, iegūst

$$x^2+2xy+y^2+2(x+y)=10+6\sqrt{2},$$

tad

$$(x+y+1)^2=11+6\sqrt{2}=\left(3+\sqrt{2}\right)^2,$$

no kurienes seko

$$(x+y+1)=\pm\left(3+\sqrt{2}\right).$$

Ja $x+y=-4-\sqrt{2}$, tad no dotās sistēmas pirmā vienādojuma seko, ka

$$xy=6+4\sqrt{2}$$

un, izsakot

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=\left(4+\sqrt{2}\right)^2-4\left(6+4\sqrt{2}\right)=-6=8\sqrt{2}<0,$$

kas nav iespējams.

Ja $x+y=2+\sqrt{2}$, tad $xy=2\sqrt{2}$, no kurienes iegūst, ka $x_1=2$, $y_1=\sqrt{2}$ un $x_2=\sqrt{2}$, $y_2=2$. Ievietojot abus atrisinājumus dotajā vienādojumu sistēmā, pārliecināmies, ka tie abi der.

7. uzdevums. Atverot iekavas visos trijos sistēmas

$$\begin{cases} x^2+(y-z)^2=a \\ y^2+(x-z)^2=b \\ z^2+(x-y)^2=c \end{cases}$$

vienādojumos un no pirmo divu vienādojumu summas atņemot trešo vienādojumu, paliks

$$(x-y+z)^2=a-b+c \qquad (1)$$

Rīkojoties analoģiski, iegūsim vēl divus vienādojumus:

$$(x+y-z)^2=a+b-c, \qquad (2)$$

$$(y+z-x)^2=b-c+a. \qquad (3)$$

Viegli pārliecināties, ka ir arī otrādi - dotā vienādojumu sistēma ir šo vienādojumu (1), (2), (3) sekas, piemēram, ja saskaitām vienādojumus (2) un (3), iegūstam dotās sistēmas otro vienādojumu.

Apzīmēsim: $a_1=\sqrt{b+c-a}$, $b_1=\sqrt{a-b+c}$, $c_1=\sqrt{a+b-c}$.

Tagad vienādojumu (1), (2) un (3) sistēmu varam uzrakstīt kā astoņu pirmās pakāpes vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x-y+z &= \pm b_1 \\ x+y-z &= \pm c_1 \\ -x+y+z &= \pm a_1. \end{cases}$$

No vienādojumiem, kuriem labajās pusēs ir plusa zīmes, iegūstam to vienīgo atrisinājumu: $x=\dfrac{b_1+c_1}{2}$, $y=\dfrac{a_1+c_1}{2}$, $z=\dfrac{b_1+a_1}{2}$. Kombinējot visos veidos zīmes vienādojumu labajās pusēs, atradīsim vēl septiņus atrisinājumus:

$$\left(\frac{-b_1+c_1}{2};\frac{a_1+c_1}{2};\frac{-b_1+a_1}{2}\right),\ \left(\frac{b_1-c_1}{2};\frac{a_1-c_1}{2};\frac{b_1+a_1}{2}\right),\ \left(\frac{b_1+c_1}{2};\frac{-a_1-c_1}{2};\frac{b_1-a_1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{-b_1-c_1}{2};\frac{a_1-c_1}{2};\frac{-b_1+a_1}{2}\right),\ \left(\frac{-b_1+c_1}{2};\frac{-a_1+c_1}{2};\frac{-b_1-a_1}{2}\right),$$
$$\left(\frac{b_1-c_1}{2};\frac{-a_1-c_1}{2};\frac{b_1-a_1}{2}\right),\ \left(\frac{-b_1-c_1}{2};\frac{-a_1-c_1}{2};\frac{-b_1-a_1}{2}\right).$$

Šie astoņi atrisinājumi ir arī visi dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumi.

8. uzdevums. Pārnesot vienādojumu sistēmā

$$\begin{cases} x^2 = a+(z-y)^2 \\ y^2 = b+(z-x)^2 \\ z^2 = c+(x-y)^2 \end{cases}$$

visus nezināmos uz vienādojumu kreisajām pusēm un sadalot tos reizinātājos, iegūstam šādu sistēmu:

$$\begin{cases} (x+y-z)(x-y+z) &= a \\ (x+y-z)(-x+y+z) &= b \\ (x-y+z)(-x+y+z) &= c. \end{cases}$$

Apzīmēsim *t=(x+u-z), u=(x-y+z), v=(-x+y+z),* tad vienādojumu sistēma izskatās šādi:

$$\begin{cases} tu=a \\ tv=b \\ uv=c. \end{cases}$$

Ar ievietošanas paņēmienu izsakām

$$t=\pm\sqrt{\frac{ab}{c}},\quad u=\pm\sqrt{\frac{ac}{b}},\quad v=\pm\sqrt{\frac{cb}{a}}.$$

No šejienes seko, ka

$$\begin{cases} x+y-z & =\pm\sqrt{\dfrac{ab}{c}} \\ x-y+z & =\pm\sqrt{\dfrac{ac}{b}} \\ -x+y+z & =\pm\sqrt{\dfrac{cb}{a}}. \end{cases}$$

Apzīmēsim $t_1=\sqrt{\frac{ab}{c}}, u_1=\sqrt{\frac{ac}{b}}, v_1=\sqrt{\frac{cb}{a}}$, tad no vienādojumiem, kuriem labajās pusēs ir plusa zīmes, iegūsim to vienīgo atrisinājumu:

$$x=\frac{u_1+t_1}{2},\quad y=\frac{v_1+t_1}{2},\quad z=\frac{u_1+v_1}{2}.$$

Kombinējot visos veidos zīmes vienādojumu labajās pusēs, iegūsim vēl septiņus atrisinājumus:

$$\left(\frac{-u_1+t_1}{2};\frac{v_1+t_1}{2};\frac{-u_1+v_1}{2}\right),\ \left(\frac{u_1-t_1}{2};\frac{v_1-t_1}{2};\frac{u_1+v_1}{2}\right),\ \left(\frac{u_1+t_1}{2};\frac{-v_1-t_1}{2};\frac{u_1-v_1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{-u_1-t_1}{2};\frac{v_1-t_1}{2};\frac{-u_1+v_1}{2}\right),\ \left(\frac{-u_1+t_1}{2};\frac{-v_1+t_1}{2};\frac{-u_1-v_1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{u_1-t_1}{2};\frac{-v_1-t_1}{2};\frac{u_1-v_1}{2}\right),\ \left(\frac{-u_1-t_1}{2};\frac{-v_1-t_1}{2};\frac{-u_1-v_1}{2}\right).$$

4.2.Vienādojumu sistēmu atrisināšana ar saskaitīšanas paņēmienu, reizinājumu pielīdzinot nullei

1. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 2b \\ x^2 y - xy^2 = b \end{cases}$$

reālos skaitļos.

2. uzdevums. Atrast visus vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} A^2 + B^2 = 6C \\ B^2 + C^2 = 6A \\ C^2 + A^2 = 6B \end{cases}$$

atrisinājumus.

3. uzdevums. Atrast visus iespējamos atrisinājumus *(x;y;z)*, kas apmierina nosacījumu: ja kādam no nezināmajiem lielumiem pieskaita abu pārējo nezināmo reizinājumu, tad rezultātā iegūst 2.

4. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y. \end{cases}$$

5. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + w = 2 \\ v^2 + w^2 + u = 2 \\ w^2 + u^2 + v = 2. \end{cases}$$

Atrisinājumi (4.2 nodaļa)

1. uzdevums. Sadalām dotās sistēmas abus vienādojumus reizinātājos un otro vienādojumu pareizinām ar -2:

$$\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2) = 2b \\ -2xy(x-y) = -2b.\end{cases}$$

Saskaitot abus vienādojumus, iegūstam $(x-y)(x^2-xy+y^2)=0$.
Pielīdzinām katru reizinātāju nullei:
ja x-y=0, tad x=y un b=0;
ja x^2-xy+y^2=0, tad x^2+y^2=xy, bet šim vienādojumam nav atrisinājuma reālos skaitļos, izņemot x=y=0, jo reāliem skaitļiem jāizpildās nevienādībai $a^2+b^2 \geq |ab|$.
Tātad, ja $b \neq 0$, tad sistēmai atrisinājuma nav, ja b=0, tad ir bezgalīgi daudz atrisinājumu x=y.

2. uzdevums. Vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases}A^2+B^2=6C \\ B^2+C^2=6A \\ C^2+A^2=6B\end{cases}$$

kreisās puses ir kvadrātu summas. Tas nozīmē, ka lielumi *A*, *B* un *C* ir pozitīvi. Atņemot no sistēmas pirmā vienādojuma otro, iegūstam:

$$(A-C)(A+C+6)=0.$$

Tātad (A-C)=0, jo A+C+6>0. Tas nozīmē, ka A=C. Analoģiski, no sistēmas pirmā vienādojuma atņemot trešo, iegūstam, ka B=C. Tātad A=B=C. Tādā gadījumā sistēmas pirmo vienādojumu varam uzrakstīt kā $2A^2$=$6A$, no kura seko, ka A=0 vai A=3. Līdz ar to sistēmas atrisinājumi ir A=B=C=0 un A=B=C=3.

3. uzdevums. Vienādojumu sistēma, kuru jāatrisina, ir šāda:

$$\begin{cases}x+yz=2 \\ y+zx=2 \\ z+xy=2.\end{cases}$$

Atņemot no sistēmas pirmā vienādojuma otro un no otrā vienādojuma trešo, iegūstam
(x-y)(1-z)=0 un (y-z)(1-x)=0.
Apskatām katru no četriem gadījumiem:
ja x-y=0, tad x=y un, ievietojot sistēmas pirmajā un trešajā vienādojumos, iegūstam
(x-z)(1-x)=0, no kurienes seko, ka
1) x=y=z, tad x^2+x-2=0 un x_1=1, x_2=-2;
2) x=1 un y=1, tad arī z=1.
Apskatot pārējos trīs gadījumus, iegūst analoģiskus atrisinājumus:
x=y=z=1 *un* x=y=z=-2.

4. uzdevums. Atņemot no sistēmas

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y \end{cases}$$

pirmā vienādojuma otro, iegūsim, ka $f(x) = f(y)$:

$$(y - x)(y^2 + xy + x^2 - 2x - 2y + 2) = 0 \qquad (*)$$

Ja šī vienādojuma pirmais reizinātājs ir vienāds ar nulli, tad $x=y$. Ievietojot vienādojumu sistēmā $x=y$, iegūst

$$x^3-4x^2+2x=0,$$

kur $x_1=0$, $x_2=2+\sqrt{2}$, $x_3=2-\sqrt{2}$ un attiecīgi $y_1=0$, $y_2=2+\sqrt{2}$, $y_3=2-\sqrt{2}$.

Pārbaudām vai vienādojuma (*) otrais reizinātājs $(y^2+xy+x^2-2x-2y+2)$ var būt vienāds ar nulli. No dotās sistēmas vienādojumiem varam secināt, ka $x \geq 0$ un $y \geq 0$, jo vienādojuma

$$y^2+3x^2=x^3+2x=x(x^2+2)$$

kreisā puse ir kvadrātu summa, tātad nenegatīvs lielums, bet vienādojuma labajā pusē reizinātājs $x^2+2>0$, no tā seko, ka $x \geq 0$. No sistēmas otrā vienādojuma līdzīgi secinām, ka arī $y \geq 0$. Vienādojuma (*) otro reizinātāju varam pārveidot:

$$(y^2-2y+1)+(x^2-2x+1)+xy=0,$$
$$(y-1)^2+(x-1)^2+xy=0.$$

Pēdējam vienādojumam reālu atrisinājumu nav, jo vienlaicīgi visi trīs saskaitāmie nulles nevar būt: ja $x=y=1$ (pie šīm vērtībām pirmie divi saskaitāmie pārvēršas par nullēm), $xy = 1 \neq 0$. Te jāņem vērā, ka $xy \geq 0$, jo $x \geq 0$ un $y \geq 0$. Līdz ar to ir pierādīts, ka vienādojuma (*) otrais reizinātājs nekad nav nulle, un dotajai vienādojumu sistēmai atrisinājums ir tikai tad, ja $x=y$: $x=y=0$, $x = y = 2 + \sqrt{2}$ un $x = y = 2 - \sqrt{2}$.

5. uzdevums. Ievērojot, ka sistēmas

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + w = 2 \\ v^2 + w^2 + u = 2 \\ w^2 + u^2 + v = 2. \end{cases}$$

divu vienādojumu starpību var sadalīt reizinātājos, uzrakstām pirmā un otrā vienādojumu starpību un pirmā un trešā vienādojumu starpību

$$u^2 - w^2 + w - u = 0 \Rightarrow (u - w)(u + w - 1) - 0,$$
$$v^2 - w^2 + w - v = 0 \Rightarrow (v - w)(v + w - 1) = 0.$$

Ņemot šos divus iegūtos vienādojumus kopā ar dotās sistēmas trešo vienādojumu, iegūstam sekojošu sistēmu:

$$\begin{cases} (u - w)(u + w - 1) & = & 0 \\ (v - w)(v + w - 1) & = & 0 \\ w^2 + u^2 + v^2 & = & 2. \end{cases} \qquad (*)$$

Visi šīs vienādojumu sistēmas atrisinājumi apmierina arī doto vienādojumu sistēmu, jo arī visus dotās sistēmas vienādojumus var iegūt no vienādojumu sistēmas (*), saskaitot un atņemot šīs sistēmas vienādojumus, tāpēc visi sistēmas (*) atrisinājumi ir arī dotās sistēmas atrisinājumi, šīs sistēmas ir ekvivalentas.

Sistēmu (*) var sadalīt 4 sekojošās sistēmās:

$$\begin{cases} u-w &= 0 \\ v-w &= 0 \\ w^2+u^2+v^2 &= 2, \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} u-w &= 0 \\ v+w-1 &= 0 \\ w^2+u^2+v^2 &= 2, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u+w-1 &= 0 \\ v-w &= 0 \\ w^2+u^2+v^2 &= 2, \end{cases} \quad (3) \qquad \begin{cases} u+w-1 &= 0 \\ v+w-1 &= 0 \\ w^2+u^2+v^2 &= 2. \end{cases} \quad (4)$$

Ņemot vērā iepriekš teikto, šo vienādojumu sistēmu atrisinājumi ir arī dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumi. Katru no šīm 4 sistēmām var pārveidot par kvadrātvienādojumu, kuram eksistē 2 atrisinājumi:

no sistēmas (1) : $2w^2 + w - 2 = 0, \quad w = u = v = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{4};$

no sistēmas (2) : $2w^2 - w - 1 = 0, \quad w = u = \dfrac{1 \pm 3}{4}, \quad v = 1 - w;$

no sistēmas (3) : $3w^2 - w - 3 = 0, \quad w = v = \dfrac{1 \pm 5}{4}, \quad u = 1 - w;$

no sistēmas (4) : $2w^2 - 3w = 0, \quad w_1 = 0, \quad w_2 = \dfrac{3}{2}, \quad u = v = 1 - w.$

Dotajai vienādojumu sistēmai eksistē 8 atrisinājumi:

$$(u; v; w) = \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right);$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \right) \quad \text{(no sistēmas (1));}$$

$$(0;1;1); \quad \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right) \qquad \text{(no sistēmas (2));}$$

$$(1;0;1); \quad \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right) \qquad \text{(no sistēmas (3));}$$

$$(1;1;0); \quad \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right) \qquad \text{(no sistēmas (4)).}$$

4. 3. Vienādojumu sistēmu atrisināšana ar saskaitīšanas paņēmienu, nenegatīvus saskaitāmos pielīdzinot nullei vai izmantojot nevienādību īpašības

1. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a^2 + 3a + 1 = \dfrac{b+c}{2} \\ b^2 + 3b + 1 = \dfrac{a+c}{2} \\ c^2 + 3c + 1 = \dfrac{a+b}{2}. \end{cases}$$

2. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 1 + x_1^2 = 2x_2 \\ 1 + x_2^2 = 2x_3 \\ 1 + x_3^2 = 2x_1 \end{cases}$$

reālos skaitļos.

3. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \dfrac{2x_1^2}{1+x_1^2} = x_2 \\ \dfrac{2x_2^2}{1+x_2^2} = x_3 \\ \dfrac{2x_3^2}{1+x_3^2} = x_1 \end{cases}$$

reālos skaitļos.

4. uzdevums. Kādiem n eksistē pozitīvi skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kas apmierina vienādības

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 3 \quad \text{un} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 3?$$

5. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_2 + \dfrac{1}{x_2}\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_3 + \dfrac{1}{x_3}\right) \\ x_3 = \dfrac{1}{2}\left(x_4 + \dfrac{1}{x_4}\right) \\ x_4 = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right) \end{cases}$$

reālos skaitļos.

6. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2x_2 = x_1 + \dfrac{2}{x_1} \\ 2x_3 = x_2 + \dfrac{2}{x_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 2x_n = x_{n-1} + \dfrac{2}{x_{n-1}} \\ 2x_1 = x_n + \dfrac{2}{x_n} \end{cases}$$

reālos skaitļos.

Atrisinājumi (4.3 nodaļa)

1. uzdevums. Saskaitot sistēmas

$$\begin{cases} a^2+3a+1=\dfrac{b+c}{2} \\ b^2+3b+1=\dfrac{a+c}{2} \\ c^2+3c+1=\dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$

visus trīs vienādojumus, iegūstam $(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2=0.$ Tā kā visi trīs šī vienādojuma saskaitāmie ir nenegatīvi, tad šī vienādība ir iespējama tikai tad, ja katrs saskaitāmais ir vienāds ar nulli:
$(a+1)^2=0$, $(b+1)^2=0$ un $(c+1)^2=0$. Tātad dotās vienādojumu sistēmas atrisinājums ir $a=b=c=-1$.

2. uzdevums. Saskaitot visus trīs sistēmas

$$\begin{cases} 1+x_1^2=2x_2 \\ 1+x_2^2=2x_3 \\ 1+x_3^2=2x_1 \end{cases}$$

vienādojumus, iegūstam $3+x_1^3+x_2^2+x_3^2=2x_1+2x_2+2x_3$ un pārgrupējot:

$$\left(x_1^2-2x_1+1\right)+\left(x_2^2-2x_2+1\right)+\left(x_3^2-2x_3+1\right)=0,$$

tas ir $$\left(x_1-1\right)^2+\left(x_2-1\right)^2+\left(x_3-1\right)^2=0.$$

Tā kā visi trīs šī vienādojuma saskaitāmie ir nenegatīvi, tad katrs saskaitāmais ir vienāds ar nulli: $\left(x_1-1\right)^2=0,$ $\left(x_2-1\right)^2=0,$ $\left(x_3-1\right)^2=0.$ No šejienes seko, ka dotās sistēmas atrisinājums ir $x_1=x_2=x_3=1$, un pārbaude rāda, ka šis atrisinājums der.

3. uzdevums. Apskatot doto vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \dfrac{2x_1^2}{1+x_1^2}=x_2 \\ \dfrac{2x_2^2}{1+x_2^2}=x_3 \\ \dfrac{2x_3^2}{1+x_3^2}=x_1, \end{cases}$$

redzams, ka visi trīs nezināmie var būt vienādi ar nulli tikai vienlaicīgi. Ņemot vērā, ka visu nezināmo reizinājums ir atšķirīgs no nulles, apskatām vienādojumu sistēmu, kuru iegūst dotās sistēmas katras vienādojuma daļas vietā rakstot tai apgriezto daļu:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x_1^2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x_2} = 0 \\ \dfrac{1}{2x_2^2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x_3} = 0 \\ \dfrac{1}{2x_3^2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x_1} = 0. \end{cases}$$

Pareizinot iegūtās sistēmas katru vienādojumu ar 2 un saskaitot visus vienādojumus, iegūstam

$$\left(1 + \frac{1}{x_1^2} - \frac{2}{x_1}\right) + \left(1 + \frac{1}{x_2^2} - \frac{2}{x_2}\right) + \left(1 + \frac{1}{x_3^2} - \frac{2}{x_3}\right) = 0, \text{ t.i.}$$

$$\left(1 - \frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{x_2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{x_3}\right)^2 = 0,$$

no kurienes redzams, ka katrs saskaitāmais ir vienāds ar nulli, tāpēc ir spēkā vienādība $x_1=x_2=x_3=1$, kas kopā ar $x_1=x_2=x_3=0$ arī ir dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumi.

4. uzdevums. Risinot šo vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 3 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} = 3 \end{cases},$$

izmantosim nevienādību $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$, ja $x>0$ (pie tam vienādība ir tikai gadījumā, kad $x=1$). Tā kā uzdevuma nosacījumos ir teikts, ka x_1, x_2, …, x_n ir pozitīvi skaitļi, tad saskaitot abus vienādojumus, iegūsim

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \cdots + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = 6,$$

kur katrs saskaitāmais $x_i + \dfrac{1}{x_i} \geq 2$, $i=1,2,\dots,n$. Redzams, ka maksimālais $n=3$ ir gadījumā, kad $x_1=x_2=x_3=1$. Ja $n=2$, tad $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ un $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, šos atrisinājumus iegūst, risinot kvadrātvienādojumu. Ja $n=1$, tad vienādojumu sistēmai atrisinājuma nav.

5. uzdevums. Apskatot sistēmu

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_2 + \dfrac{1}{x_2}\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_3 + \dfrac{1}{x_3}\right) \\ x_3 = \dfrac{1}{2}\left(x_4 + \dfrac{1}{x_4}\right) \\ x_4 = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right), \end{cases}$$

pārliecināmies, ka visi skaitļi x_1, x_2, x_3, x_4 ir ar vienādām zīmēm. Pieņemsim, ka tie visi ir pozitīvi (pretējā gadījumā mainīsim zīmi visos sistēmas vienādojumos). No nevienādības $a^2+b^2 \geq 2|ab|$, kas ir pareiza jebkuriem reāliem skaitļiem, iegūst, ka $x+\frac{1}{x}\geq 2$, kur vienādības zīme ir spēkā tikai gadījumā, ja x=1. Ņemot vērā, ka $x+\frac{1}{x}\geq 2$, no dotās sistēmas vienādojumiem secinām, ka $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 1$, $x_3 \geq 1$un $x_4 \geq 1$. Saskaitot dotās vienādojumu sistēmas visus vienādojumus, iegūstam

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4} \qquad (*)$$

un ņemot vērā, ka $x_i \geq 1$, i=1,2,3,4, vienādības zīme vienādojumā (*) ir iespējama tikai gadījumā, ja $x_1=x_2=x_3=x_4=1$. Gadījumā, ja visi nezināmie ir negatīvi, atrisinājums ir $x_1=x_2=x_3=x_4=-1$.

6. uzdevums. Apskatot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2x_2 = x_1+\dfrac{2}{x_1} \\ 2x_3 = x_2+\dfrac{2}{x_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2x_n = x_{n-1}+\dfrac{2}{x_{n-1}} \\ 2x_1 = x_n+\dfrac{2}{x_n}, \end{cases}$$

pārliecināmies, ka visi skaitļi x_k, kur k=1,2,…,n, ir ar vienādām zīmēm. Pieņemsim, ka visi $x_k>0$ (pretējā gadījumā mainīsim zīmes visos sistēmas vienādojumos). Pierādīsim, ka $x_k \geq \sqrt{2}$, kur k=1,2,…,n. Ņemot vērā nevienādību $a^2+b^2 \geq 2|ab|$, kas ir pareiza jebkuriem reāliem skaitļiem a un b, varam rakstīt, ka

$$x_k+\frac{2}{x_k}\geq 2\sqrt{x_k\frac{2}{x_k}}=2\sqrt{2}. \qquad (*)$$

Ievietojot šo nevienādību dotajā vienādojumu sistēmā, iegūstam, ka $x_k \geq \sqrt{2}$, kur $k=1,2,\ldots,n.$ Saskaitot visus sistēmas vienādojumus, iegūstam

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=\frac{2}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\cdots+\frac{2}{x_n} \qquad (**)$$

Ņemot vērā nevienādību (*), acīmredzams, ka vienādības zīme šeit ir iespējama tikai gadījumā, kad visi nezināmie ir vienādi ar $\sqrt{2}$. Šo atrisinājumu ir viegli pārbaudīt, ievietojot to dotajā vienādojumu sistēmā. Šis arī ir vienīgais pozitīvais atrisinājums. Mainot zīmi visiem nezināmajiem, mēs iegūstam vēl vienu reālu atrisinājumu $x_1=x_2=\cdots=x_n=-\sqrt{2}.$ Šie abi ir vienīgie dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumi.

5. nodaļa

5. 1. Vienādojumu sistēmu atrisināšana, novērtējot mainīgos pēc lieluma

1. uzdevums. Atrast vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x^y = z \\ y^z = x \\ z^x = y \end{cases}$$

pozitīvos atrisinājumus.

2. uzdevums. Pierādīt, ka vienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0 \end{cases}$$

nav atrisinājuma reālos skaitļos.

3. uzdevums. Atrast visus vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

atrisinājumus.

4. uzdevums. Novērtējot nezināmos pēc lieluma, atrisināt vienādojumu sistēmu

$$x_1^3 + x_2 = x_2^3 + x_3 = x_3^3 + x_1 = 10.$$

5. uzdevums. Novērtējot nezināmos pēc lieluma, atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 3 \\ x^3 + y + z^2 = 3 \\ x^2 + y^3 + z = 3 \end{cases}$$

pozitīvos skaitļos.

6. uzdevums Novērtējot nezināmos pēc lieluma, atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2x\left(1 + y + y^2\right) = 3\left(1 + y^4\right) \\ 2y\left(1 + z + z^2\right) = 3\left(1 + z^4\right) \\ 2z\left(1 + x + x^2\right) = 3\left(1 + x^4\right). \end{cases}$$

7. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 1. \end{cases}$$

8. uzdevums. Patvaļīgām vērtībām $n \in N$ un $a \in R$ atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n = a^n. \end{cases}$$

9. uzdevums. Katram vērtību pārim $k, n \in N$ atrast visus iespējamos nenegatīvu skaitļu x_1, x_2, …, x_n komplektus, kuri apmierina sistēmu

$$\begin{cases} x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k = 1 \\ (1 + x_1)(1 + x_2) \times \cdots \times (1 + x_n) = 2. \end{cases}$$

Atrisinājumi (5.1 nodaļa)

1. uzdevums. ja kāds no mainīgajiem *x, y, z* ir 1, tad viegli atrast, ka $x=y=z=1$. Ja, piemēram, $x>1$ un $y>1$, tad arī $z>1$, un tad no sistēmas seko $x<z$, $z<y$, $y<x$ – pretruna. Līdzīgi iegūst pretrunu, ja divi no mainīgajiem mazāki par 1. Tātad atrisinājums ir $x=y=z=1$.

2. uzdevums. Skaidrs, ka $x, y, z \neq 0$. Lai pierādītu pretrunu vienādojumu sistēmā

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} &= 0 \end{cases},$$

pietiek pierādīt, ka visiem skaitļiem *x, y* un *z* ir jābūt ar vienādām zīmēm. Piemēram, pierādīsim, ka *x* un *y* ir ar vienādām zīmēm, tas ir $xy>0$:

$$\frac{1}{z}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{(x+y)}{xy}=\frac{z}{xy},$$

no šejienes seko, ka $xy=z^2>0$. Analoģiski pierāda, ka $xz=y^2>0$ un $zy=x^2>0$. Saskaitot trīs vienādu zīmju skaitļus, summā iegūt nulli nevar.

3. uzdevums. No sistēmas

$$\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^4+y^4=1 \end{cases}$$

otrā vienādojuma seko, ka $|x|\le 1$ un $|y|\le 1$. Ja $x\le 1$, tad arī $x^3\le 1$ un no sistēmas pirmā vienādojuma seko, ka $y\ge 0$. Analoģiski pierāda, ka arī $x\ge 0$. Ja $0<x<1$, tad $x^3>x^4$, tāpat arī, ja $0<y<1$, tad $y^3>y^4$ un sistēmas vienādojumi ir pretrunā viens otram. Tāpēc vienādojumu sistēmai ir tikai atrisinājumi, ja $x=0$, $y=1$ un $x=1$ un $y=0$.

4. uzdevums. Vienādojumu sistēmas $x_1^3+x_2=x_2^3+x_3=x_3^3+x_1=10$ atrisinājums ir $x_1=x_2=x_3=2$. Pierādīsim, ka citu atrisinājumu nav. Dots, ka $x_i^3+x_j=10$. Papētīsim, kas notiek, ja izmaina x_1:

- ja $x_1<2$ (samazina), tad x_2 ir jāpalielina. Tas, savukārt, liek samazināt x_3. Bet tagad $x_3^3+x_1<10$, ir iegūta pretruna;
- ja $x_1>2$ (palielina), tad x_2 ir jāsamazina. Tas, savukārt, liek palielināt x_3. Bet tagad $x_3^3+x_1>10$. Atkal iegūta pretruna.

Ja maina x_2 un x_3, spriedumi ir līdzīgi.

5. uzdevums. Viegli ieraudzīt, ka vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x+y^2+z^3 = 3 \\ x^3+y+z^2 = 3 \\ x^2+y^3+z = 3 \end{cases}$$

atrisinājums ir $x=y=z=1$. Pierādīsim, ka citu atrisinājumu nav. Aplūkosim visus gadījumus:

1) Ja x=1, tad $\begin{cases} y^2 + z^3 = 2 \\ y + z^2 = 2 \\ y^3 + z = 2; \end{cases}$

- ja y=1 vai z=1, tad iegūstam jau minēto atrisinājumu;
- ja y>1 un z>1, vienādojumu kreisās puses ir lielākas par 2;
- ja y<1 un z<1, vienādojumu kreisās puses ir mazākas par 2;
- ja y>1 un z<1, iegūstam pretrunu starp pirmo un trešo vienādojumiem $\left(y^2 < y^3 \ un \ z^3 < z\right)$
- ja y<1 un z>1, atkal pretruna starp otro un trešo vienādojumiem.

2) Ja x>1:

- ja $y \ge 1 \ un \ z \ge 1,$ tad sākotnējā sistēmā vienādojumu kreisās puses ir lielākas par 3;
- ja $y \ge 1 \ un \ z \le 1,$ tad ir pretruna starp pirmo un trešo vienādojumu;
- ja $y \le 1 \ un \ z \le 1,$ tad ir pretruna starp pirmo un otro vienādojumu;
- ja $y \le 1 \ un \ z \ge 1,$ tad ir pretruna starp otro un trešo vienādojumu.

3) x<1: izpēta analogi 2. gadījumam.

6. uzdevums. Tā kā visiem reāliem t pastāv nevienādība $t^2 + t + 1 > 0$, tad no sistēmas

$$\begin{cases} 2x\left(1 + y + y^2\right) = 3\left(1 + y^4\right) \\ 2y\left(1 + z + z^2\right) = 3\left(1 + z^4\right) \\ 2z\left(1 + x + x^2\right) = 3\left(1 + x^4\right) \end{cases}$$

vienādojumiem seko, ka x>0, y>0 un z>0.

Pieņemam, ka vislielākais (vai viens no lielākajiem) nezināmajiem ir x, tad $x \ge y$ un $x \ge z$. No sistēmas pēdējā vienādojuma iegūstam, ka

$$2x\left(1 + x + x^2\right) \ge 3\left(1 + x^4\right),$$

pēc pārveidojumiem no šejienes seko, ka

$$\left(3x^2 + 4x + 3\right)(x - 1)^2 \le 0.$$

Tā kā visiem reāliem x

$3x^2 + 4x + 3$>0, tad x=1. No sistēmas seko, ka y=1 un z=1. Ja lielākais no nezināmajiem ir y vai z, tad spriedumi ir līdzīgi.

7. uzdevums. Novērtējot sistēmas

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 1 \end{cases}$$

pirmo vienādojumu, redzam, ka $|x| \le 1,$ $|y| \le 1,$ $|z| \le 1$ un $|u| \le 1.$

Tas nozīmē, ka $x^3 \le 1, y^3 \le 1, z^3 \le 1, u^3 \le 1$ (*)

un $x^3 \le x^2, y^3 \le y^2, z^3 \le z^2, u^3 \le u^2.$ (**)

Atņemot no sistēmas pirmā vienādojuma otro, iegūstam

$$x^2(1-x)+y^2(1-y)+z^2(1-z)+u^2(1-u)=0.$$

Ņemot vērā nevienādības (*), seko, ka katrs šī vienādojuma saskaitāmais ir nenegatīvs, bet summa ir nulle. Līdz ar to katrs saskaitāmais ir vienāds ar nulli: $x^2(1-x)=0, \quad y^2(1-y)=0, \quad z^2(1-z)=0, \quad u^2(1-u)=0.$
Tas nozīmē, ka vai nu x=0, vai x=1, tāpat arī pārējie nezināmie.
Gadījumā, ja kāds no nezināmajiem ir vienāds ar 1, tad ievietojot šo vērtību dotajā vienādojumu sistēmā, redzam, ka pārējiem nezināmajiem jābūt vienādiem ar nulli. Tātad atrisinājumi ir $(1;0;0;0), (0;1;0;0), (0;0;1;0), (0;0;0;1)$.

8. uzdevums. Atzīmēsim, ka jebkuram $i \in \{1;2;\ldots;n\}$, nezināmo komplekts $x_i = a, \quad x_1 = \cdots = x_{i-1} = x_{i+1} = \cdots = x_n = 0$ apmierina doto vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n = a^n. \end{cases}$$

Pierādīsim, ka citu atrisinājumu šai sistēmai nav.

1)Ja n=1, iegūstam vienīgo atrisinājumu $x_1=a$.

2)Ja n=2, ir sistēma $\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1^2 + x_2^2 = a^2, \end{cases}$

no kuras iegūstam nosacījumu $(x_1+x_2)^2 - (x_1^2+x_2^2) = 2x_1x_2 = 0$.

Tāpēc vai nu $x_1 = a \quad un \quad x_2 = 0$, vai $x_1 = 0 \quad un \quad x_2 = a.$

3)Ja $n \geq 3$, tad katram sistēmas atrisinājumam ir vismaz divi nosacījumi:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2,$$
$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^2 = a^3.$$

Ja a=0, tad no pirmā nosacījuma iegūstam, ka $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

Ja $a \neq 0$, tad $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{a}\right)^2 = 1,$

tāpēc visiem i=1,2,…,n: $\left|\frac{x_i}{a}\right| \leq 1,$ bet tas nozīmē, ka $\left(\frac{x_i}{a}\right)^3 \leq \left(\frac{x_i}{a}\right)^2$.

Tad $1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{a}\right)^3 \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{a}\right)^2 = 1,$

no kurienes seko, ka jebkuram i ir spēkā vienādība $\left(\frac{x_i}{a}\right)^2\left(\frac{x_i}{a}-1\right) = 0,$ tas ir, vai nu $x_i=a$, vai x_i=0. Ja kādam $i \in \{1;2;\ldots;n\}$ izrādās, ka $x_i=a$, tad, ņemot vērā doto vienādojumu sistēmu, visi pārējie nezināmie $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$ ir vienādi ar nulli (un otrādi). Tātad visos trīs iepriekš aprakstītajos gadījumos iegūtie skaitļu komplekti un tikai tie apmierina doto vienādojumu sistēmu.

9. uzdevums. Katram $i \in \{1;2;\dots;n\}$ nezināmo komplekts

$$x_i = 1, \quad x_1 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_n = 0$$

apmierina doto vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = 1 \\ (1+x_1)(1+x_2)\times\dots\times(1+x_n) = 2. \end{cases}$$

Pierādīsim, ka citu n nenegatīvu skaitļu komplektu, kas apmierina doto vienādojumu sistēmu, nav. Atzīmēsim, ka , ja $x_i \geq 0$, kur i=1,2,…,n, un $x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = 1$, tad $x_i \in [0;1]$.

Mums ir vēl viens vienādojums:

$$\begin{aligned} 2 &= (1+x_1)(1+x_2)\times\dots\times(1+x_n) = \\ &= 1 + (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j + \dots + x_1 x_2 \cdot\dots\cdot x_n \geq 1 + \left(x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k\right) + \\ &+ \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j + \dots + x_1 x_2 \cdot\dots\cdot x_n = 2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j, \end{aligned}$$

tāpēc $\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j = 0.$ No šejienes seko, ka visiem nezināmajiem, izņemot vienu, jābūt vienādiem ar nulli (ja atrodas nezināmo pāris x_p un x_q, kuri atšķirīgi no nulles pie $p<q$, tad izpildītos nevienādība $\sum x_i x_j \geq x_p x_q > 0$). Beidzot, ja kādam $i \in \{1;2;\dots;n\}$ visi nezināmie $x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_n = 0$, tad no vienādojumu sistēmas noteikumiem seko, ka x_i=1.

5.2. Vienādojumu sistēmas, kas simetriskas attiecībā pret visiem mainīgajiem

1. uzdevums. Atrast visus vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 \\ x_2 + x_3 = x_4^2 \\ x_3 + x_4 = x_5^2 \\ x_4 + x_5 = x_1^2 \\ x_5 + x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

pozitīvos atrisinājumus.

2. uzdevums. Atrodiet trīs skaitļus, katrs no kuriem ir vienāds ar divu pārējo starpības kvadrātu.

3. uzdevums. Atrodiet 11 skaitļus, katrs no kuriem ir vienāds ar pārējo desmit summas kvadrātu.

4. uzdevums. Atrast visus vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} (x+y)^3 = z \\ (y+z)^3 = x \\ (x+z)^3 = y \end{cases}$$

atrisinājumus.

5. uzdevums. Atrast visus vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} (x_3 + x_4 + x_5)^5 = 3x_1 \\ (x_4 + x_5 + x_1)^5 = 3x_2 \\ (x_5 + x_1 + x_1)^5 = 3x_3 \\ (x_1 + x_2 + x_3)^5 = 3x_4 \\ (x_2 + x_3 + x_4)^5 = 3x_5 \end{cases}$$

atrisinājumus.

6. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_1^2 = ax_2 + 1 \\ x_2^2 = ax_3 + 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{999}^2 = ax_{1000} + 1 \\ x_{1000}^2 = ax_1 + 1, \end{cases}$$

kur *a* ir dots skaitlis, kas apmierina nosacījumu $|a| > 1$.

Atrisinājumi (5.2 nodaļa)

1. uzdevums. Apzīmēsim ar X un Y atbilstoši vislielāko un vismazāko skaitli no $x_1,x_2,\ldots,x_5$. Tad no dotās vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 \\ x_2 + x_3 = x_4^2 \\ x_3 + x_4 = x_5^2 \\ x_4 + x_5 = x_1^2 \\ x_5 + x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

seko, ka $X^2 \le 2X \quad un \quad Y^2 \ge 2Y.$ (*)

Tā kā jāatrod ir pozitīvie atrisinājumi: $X > 0 \quad un \quad Y > 0,$ tad no nevienādībām (*) iegūst $2 \le Y \le X \le 2.$ Tātad dotajai vienādojumu sistēmai eksistē tikai viens pozitīvs atrisinājums $x_1=x_2=\ldots=x_5=2$.

2. uzdevums. Ņemot vērā uzdevuma nosacījumus, varam sastādīt šādu vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x = \left(y - z\right)^2 \\ y = \left(z - x\right)^2 \\ z = \left(z - x\right)^2 \end{cases},$$

kuras atrisinājumi ir $(0;0;0)$ vai arī viens no nezināmajiem ir vienāds ar nulli, bet divi pārējie ir vienādi ar 1. Pierādīsim, ka šie atrisinājumi ir vienīgie iespējamie, Visi trīs skaitļi *x*, *y*, *z* ir nenegatīvi. Uzdevuma simetriskuma dēļ - visiem trim nezināmajiem lielumiem vienādojumu sistēmā ir vienlīdzīgi nosacījumi - tos varam uzskatīt par sakārtotiem pēc lieluma: apzīmēsim tos dilstošā kārtībā $x \ge y \ge z \ge 0$. Tad $x - z \ge y - z \ge 0,$ no kurienes

$$\left(x - z\right)^2 \ge \left(y - z\right)^2. \qquad (*)$$

Tā kā $\left(x - z\right)^2 = y \quad un \quad \left(y - z\right)^2 = x$, no nevienādības (*) iegūstam, ka $y \ge x$, bet esam pieņēmuši, ka $x \ge y$. Tāpēc $x=y$. Tādā gadījumā no dotās vienādojumu sistēmas seko, ka $z=0$ un $x=x^2$, tātad $x=0$ vai $x=1$.

3. uzdevums. Apzīmēsim dotos skaitļus ar $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$, pie kam uzdevuma simetriskuma dēļ varam pieņemt, ka

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{11}. \qquad (*)$$

Apzīmēsim šo skaitļu summu ar *S*, tad uzdevuma nosacījumus varam pierakstīt šādā veidā

$$\begin{cases} x_1 = (S - x_1)^2 \\ x_2 = (S - x_2)^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{11} = (S - x_{11})^2. \end{cases} \qquad (**)$$

Skaidrs, ka visi x_i negatīvi.

No nosacījuma (*) seko, ka

$$(S - x_1)^2 \geq (S - x_2)^2 \geq \dots \geq (S - x_{11})^2. \qquad (***)$$

Ievietojot nosacījumu (*) vienādojumu sistēmā (**), iegūstam nevienādību

$$(S - x_1)^2 \leq (S - x_2)^2 \leq \dots \leq (S - x_{11})^2. \qquad (****)$$

Ņemot vērā nevienādības (***) un (****), iegūstam

$$(S - x_1)^2 = (S - x_2)^2 = \dots = (S - x_{11})^2.$$

Tātad $x_1 = x_2 = \dots = x_{11} = x$. No sistēmas (**) seko, ka $x = (10x)^2$ un $x = \frac{1}{100}$ *vai* $x = 0.$

4. uzdevums. Ņemot vērā uzdevuma simetriskumu:

$$\begin{cases} (x + y)^3 = z \\ (y + z)^3 = x \\ (x + z)^3 = y, \end{cases}$$

varam pieņemt, ka $x \geq y$ un $x \geq z$. Tad $(y + z)^3 = x \geq y = (z + x)^3$. Tas nozīmē, ka

$y + z \geq z + x$, tātad $y \geq x$. No šī nosacījuma seko, ka $y=x$. Līdzīgi pierāda, ka $x=z$.

Tad no sistēmas seko vienādojums $8x^3=x$, kuram ir trīs reālas saknes:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad x_3 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Tātad dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumi ir

$$(x; y; z;) = (0;0;0), \left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}'; \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{4}'; -\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

5. uzdevums. Ņemot vērā vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} (x_3+x_4+x_5)^5 = 3x_1 \\ (x_4+x_5+x_1)^5 = 3x_2 \\ (x_5+x_1+x_2)^5 = 3x_3 \\ (x_1+x_2+x_3)^5 = 3x_4 \\ (x_2+x_3+x_4)^5 = 3x_5 \end{cases}$$

simetriskumu, pieņemam, ka $x_1 \geq x_2$, $x_1 \geq x_3$, $x_1 \geq x_4$, $x_1 \geq x_5$. Tad

$$\left(x_3 + \underline{x_4 + x_5}\right)^5 = 3x_1 \geq 3x_2 = \left(\underline{x_4 + x_5} + x_1\right)^5.$$

Tas nozīmē, ka $x_3 + \underline{x_4 + x_5} \geq \underline{x_4 + x_5} + x_1$, tātad $x_1 \leq x_3$. No nevienādībām

$x_1 \leq x_3$ un $x_1 \geq x_3$ seko, ka $x_1=x_3$. Ņemot vērā, ka $x_1=x_3 \geq x_5$, salīdzinām

$$\left(x_5 + \underline{x_1 + x_2}\right)^5 = 3x_3 \geq 3x_4 = \left(\underline{x_1 + x_2} + x_3\right)^5,$$

te seko, ka $x_5 \geq x_3$. Tā kā $x_1=x_3 \geq x_5$, tad arī $x_5=x_3=x_1$.

Līdzīgi pierāda, ka $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x$. Ievietojot to dotajā sistēmā, iegūstam vienādojumu $(3x)^5 = 3x$, kuram ir trīs reālas saknes: $x=0$ un $x = \pm\frac{1}{3}$. Tātad dotajai vienādojumu sistēmai ir šādi atrisinājumi:

$$(x_1;x_2;x_3;x_4;x_5) = (0;0;0;0;0) = \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right).$$

6. uzdevums. Aplūkosim tikai gadījumu, kad $a>1$ (jo gadījumu , kad $a<-1$, ievietojot $a' = -a$, $x_i' = -x_i$, varam reducēt uz $a>1$). Tā kā sistēmas

$$\begin{cases} x_1^2 = ax_2 + 1 \\ x_2^2 = ax_3 + 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{999}^2 = ax_{1000} + 1 \\ x_{1000}^2 = ax_1 + 1 \end{cases}$$

vienādojumu kreisās puses ir nenegatīvas, tad

$$x_i \geq -\frac{1}{a} > -1,\ i=1,2,\ldots,1000. \qquad (*)$$

Sistēmas simetriskuma dēļ varam pieņemt, ka

$$x_1 = max(x_i). \qquad (**)$$

1. gadījums. Ja $x_1 \geq 0$, tad no sistēmas pēdējā vienādojuma secinām, ka $x_{1000}^2 \geq 1$, tātad $|x_{1000}| \geq 1$, bet no nosacījuma (*) seko, ka $x_{1000}>-1$. Tātad $x_{1000} \geq 1$. Ņemot to vērā, varam secināt, ka arī $x_{999} \geq 1$, u.t.t. Ņemot vērā nosacījumu (**), iegūst

$$\begin{aligned} &x_1 \geq x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 \geq x_2^2 \quad \Rightarrow \quad ax_2+1 \geq ax_3+1 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_2 \geq x_3 \quad \Rightarrow \quad x_3 \geq x_4 \quad \Rightarrow \cdots \Rightarrow \quad x_{1000} \geq x_1. \end{aligned}$$

Tādā veidā esam ieguvuši, ka $x_1=x_2=\ldots=x_{1000}=t_1$, kur $t_1>1$ ir vienādojuma

$$t^2-at-1=0 \qquad (***)$$

sakne $t_1 = \dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$.

2. gadījums. x1<0. Tad arī xi<0, $i=1,2,\ldots,1000$. Esam pieņēmuši, ka $x_1=max(x_i)$, tāpēc

$$x_1 \geq x_3 \Rightarrow x_1^2 \leq x_3^2 \Rightarrow ax_2+1 \leq ax_4+1 \Rightarrow x_2 \leq x_4 \Rightarrow x_2^2 \geq x_4^2 \Rightarrow x_3^5 \geq x_5^2 \Rightarrow x_4 \leq x_6 \Rightarrow \cdots$$

Tas nozīmē, ka

a) $x_1 \geq x_3 \geq x_5 \geq \cdots \geq x_{999} \geq x_1$, tātad $x_1 = x_3 = x_5 = \cdots = x_{999}$ un

b) $x_2 \leq x_4 \leq x_6 \leq \cdots \leq x_{1000} \leq x_2$, tātad $x_2 = x_4 = x_6 = \cdots = x_{1000}$.

Doto vienādojumu sistēmu tagad varam reducēt uz šādu:

$$\begin{cases} x_1^2 = ax_2+1 \\ x_2^2 = ax_1+1, \end{cases}$$

no kurienes $(x_1-x_2)(x_1+x_2) = -a(x_1-x_2)$.

Ja $x_1=x_2$, tad $x_1=x_2=\ldots=x_{1000}=t_2$, kur t_2 ir vienādojuma (***) negatīvā sakne

$$t_2 = \frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}.$$

Ja $x_1+x_2=-a$, $x_2=-a-x_1$ un no vienādojuma $x_1^2 = -a(a+x_1)+1$ iegūstam

$$x_1^2+ax_1+(a^2-1)=0.$$

Šī vienādojuma diskriminants ir $a^2-4(a^2-1)=4-3a^2$, tāpēc, ja $a>\frac{2}{\sqrt{3}}$, vienādojumam sakņu nav.

Ja $1<a\le\frac{2}{\sqrt{3}}$, tad $x_1=\frac{-a\pm\sqrt{4-3a^2}}{2}$.

Tātad a>1, tad sistēmai vienmēr ir atrisinājums $x_1=x_2=...=x_{100}=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4})$.

Ja $1<a\le\frac{2}{\sqrt{3}}$, sistēmai ir vēl šādi atrisinājumi:

$$\begin{cases} x_1=x_3=\cdots=x_{999}=\frac{1}{2}\left(-a-\sqrt{4-3a^2}\right) \\ x_2=x_4=\cdots=x_{1000}=\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{4-3a^2}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=x_3=\cdots=x_{999}=\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{4-3a^2}\right) \\ x_2=x_4=\cdots=x_{1000}=\frac{1}{2}\left(-a-\sqrt{4-3a^2}\right). \end{cases}$$

(Šie divi atrisinājumi sakrīt, ja $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$.)

6. nodaļa Dažādas metodes

1. uzdevums. Noteikt visus atrisinājumus vienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} x+y+z+w = 10 \\ x^2+y^2+z^2+w^2 = 30 \\ x^3+y^3+z^3+w^3 = 100 \\ xyzw = 24. \end{cases}$$

2. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x+y+z = 6 \\ xy+yz+zx = 11 \\ xyz = 6. \end{cases}$$

3. uzdevums. Doti racionāli skaitļi *a* un *b*, pie kam $a \neq 0$. Pierādīt, ka var atrast tādus četrus racionālus skaitļus (starp tiem var būt arī vienādi), kuru summa ir *a*, bet reizinājums ir *b*.

4. uzdevums. Pozitīviem skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_k$ un $b_1, b_2, \ldots, b_n$ izpildās vienādība $a_1+a_2+\ldots+a_k = b_1+b_2+\ldots+b_n$. Pierādīt, ka taisnstūra veida $k \times n$ tabulas rūtiņās var ierakstīt nenegatīvus skaitļus, starp kuriem ir vismaz $(k-1)(n-1)$ nuļļu tā, lai skaitļu summas rindiņās būtu $a_1, a_2, \ldots, a_k$, bet kolonās - $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

5. uzdevums. Pierādīt, ka vienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{y^2-a^2} = 1 \\ \sqrt{y^2-b^2}+\sqrt{z^2-b^2} = 1 \\ \sqrt{x^2-c^2}+\sqrt{z^2-c^2} = 1 \end{cases}$$

eksistē atrisinājums, ja $a+b+c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

6. uzdevums. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a+b+c = 3 \\ (a-b+c)(-a+b+c)(a+b-c) = 1 \end{cases}$$

pozitīvos skaitļos.

7. uzdevums. Pozitīvi skaitļi x, y un z ir vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{y^2}{3} = 25 \\ \dfrac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + zx + x^2 = 16 \end{cases}$$

atrisinājumi. Aprēķināt lielumu $xy + 2yz + 3zx$.

8. uzdevums. Vai eksistē četri dažādi skaitļi, kuriem izpildās nosacījums, ka jebkuriem diviem X un Y no šiem četriem skaitļiem ir spēkā sakarība

$$X^{10} + X^9Y + \cdots + XY^9 + Y^{10} = 1 \ \ ?$$

Atrisinājumi (6.nodaļa)

1. uzdevums. Pārbaudot atrisinājumu (1;2;3;4), pārliecināmies, ka tas der visiem četriem sistēmas

$$\begin{cases} x+y+z+w &= 10 \\ x^2+y^2+z^2+w^2 &= 30 \\ x^3+y^3+z^3+w^3 &= 100 \\ xyzw &= 24 \end{cases}$$

vienādojumiem. Ņemot vērā, ka visi dotās sistēmas vienādojumi ir simetriski attiecībā pret *x, y, z* un w, arī visas pārējās 23 šo skaitļu 1, 2, 3 un 4 permutācijas būs šīs vienādojumu sistēmas atrisinājumi. Visu četru vienādojumu pakāpju reizinājums ir 4!=24, tāpēc citu atrisinājumu dotajai sistēmai nav.

2. uzdevums. Risinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x+y+z &= 6 \\ xy+yz+zx &= 11 \\ xyz &= 6, \end{cases}$$

atceramies sakarību starp trešās pakāpes vienādojuma ar vienu mainīgo saknēm un koeficientiem:

$$a^3-(x+y+z)a^2+(xy+yz+xz)a-xyz=0.$$

Redzam, ka *x, y* un *z* sakrīt ar trešās pakāpes vienādojuma

$$a^3-6a^2+11a-6=0 \text{ saknēm.}$$

Sadalot šo vienādojumu reizinātājos, iegūstam

$$(a-1)(a-2)(a-3)=0, \text{ kur } a=1,2,3.$$

Tā kā vienādojumu sistēma ir simetriska attiecībā pret *x*, *y* un *z*, tad visi seši sistēmas atrisinājumi sakrīt ar sešiem šo skaitļu komplektiem $(x;y;z)=(1;2;3),(1;3;2),(2;1;3),(2;3;1),(3;2;1),(3;1;2)$.

3. uzdevums. Lai atrastu šos četrus skaitļus, apskatām vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 &= a \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4 &= b. \end{cases} \qquad a\neq 0.$$

Ja $b=0$, tad der skaitļi $x_1=a$, $x_2=x_3=x_4=0$.

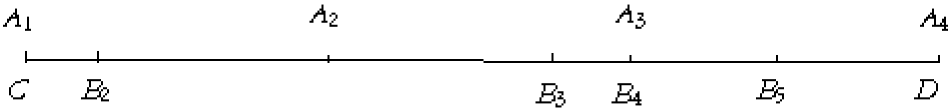
Ja $b \neq 0$ un $b \neq 1$, meklēsim skaitļus tā, ka $x_1+x_2=a$, bet $x_3+x_4=0$; tad $x_3=-x_4$; un pirmais vienādojums izpildās. Ja mēs izvēlēsimies skaitļus $z,\ -bz,\ \frac{1}{z}, -\frac{1}{z},$ tad to reizinājums ir b; atliek atrast z tā, lai $-bz+z=a$. Varam ņemt $z = \frac{a}{1-b}$.

Tātad meklējamie skaitļi var būt, piemēram, $-\frac{ab}{1-b}; \frac{a}{1-b}; \frac{1-b}{a}; \frac{b-1}{a}$.

Ja $b=1$, tad $x_1+x_2=a$, $x_3=-x_4$, bet $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 1$. Viens atrisinājums šajā gadījumā ir $-\frac{a}{3};\frac{4a}{3};\frac{3}{2a};-\frac{3}{2a}$.

4. uzdevums. Uz nogriežņa, kura garums ir $S=a_1+a_2+\ldots+a_k=b_1+b_2+\ldots+b_n$, atliekam punktus $A_1=C, A_2, A_3, \ldots, A_{k+1}=D$ un $B_1=C, B_2, B_3, \ldots, B_{n+1}=D$ tā, ka $\left|A_i A_{i+1}\right| = a_i \quad un \quad \left|B_j B_{j+1}\right| = b_j$ visiem $i=1,2,\ldots,k$ un $j=1,2,\ldots,n$. Ierakstām tabulas i-tajā rindiņā un j-tajā kolonā skaitli, kas ir vienāds ar nogriežņu A_iA_{i+1} un B_jB_{j+1} pārklāšanās garumu. Šādā veidā aizpildot visas tabulas rūtiņas, skaitļu summa i-tajā rindiņā ir vienāda ar nogriežņu A_iA_{i+1} un B_jB_{j+1} kopējās daļas garumu, tas nozīmē, ka šo skaitļu summa ir vienāda ar A_iA_{i+1} - tas ir skaitlis a_i. Tāpat pārliecināmies, ka skaitļu summa j-tajā kolonā ir vienāda ar b_j. Tabulā ir tik nenulles elementu, cik daļās nogriezni CD sadala visi nogriežņu A_iA_{i+1} un B_jB_{j+1} galapunkti. Nogriežņa CD iekšpusē tādu punktu skaits ir tieši vienāds vai mazāks par lielumu $(k-1)+(n-1)=k+n-2$ un tie sadala nogriezni ne vairāk kā $k+n-1$ daļās. Līdz ar to starp visiem tabulā ierakstītajiem skaitļiem ir vismaz $kn-(k+n-1)=(k-1)(n-1)$ nuļļu.

Piemērs: $a_1=2$, $a_2=2$, $a_3=2$, $b_1=0{,}5$, $b_2=3$, $b_3=0{,}5$, $b_4=1$, $b_5=1$.



3.zīm.

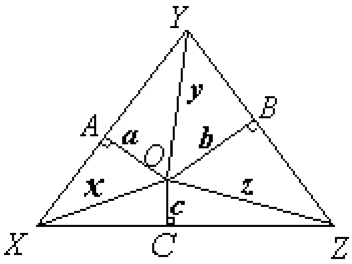
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_i summa
a_1	0,5	1,5	0	0	0	2
a_2	0	1,5	0,5	0	0	2
a_3	0	0	0	1	1	2
b_j summa	0,5	3	0,5	1	1	

Tabulā ir 9 nulles: CD ir sadalīts 6 nogriežņos, ir 7 nogriežņu galapunkti (galapunkti A_3 un B_4 sakrīt). Tātad $k=3$, $n=5$ un nuļļu skaits tabulā ir 9, kas nav mazāks par (3-1)(5-1)=8.

5. uzdevums. Lai pierādītu, ka vienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{y^2-a^2}=1 \\ \sqrt{y^2-b^2}+\sqrt{z^2-b^2}=1 \\ \sqrt{x^2-c^2}+\sqrt{z^2-c^2}=1 \end{cases}$$

eksistē atrisinājums, apskatām regulāru trijstūri *XYZ*, kura malu garumi ir vienādi ar 1; tad tā augstuma garums ir $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

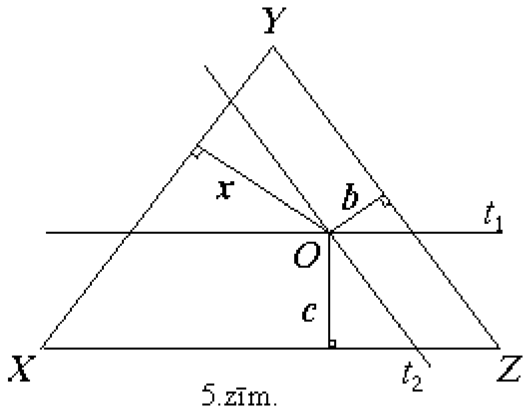


4.zīm.

Izvēlēsimies patvaļīgu punktu *O* tā iekšpusē. Ja *O* attālumi līdz *XYZ* malām ir *a, b, c* (4.zīm.), tad no fakta, ka *XYZ* laukums vienāds ar *XOY*, *YOZ* un *ZOX* laukumu summu, viegli seko, ka $a+b+c=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pierādīsim arī apgriezto apgalvojumu: ja $a+b+c=\frac{\sqrt{3}}{2}$ un *a, b, c* – pozitīvi skaitļi, tad ΔXYZ iekšpusē atrodas tāds punkts, kura attālumi līdz malām *XY, YZ, ZX* ir atbilstoši *a, b, c.*

Novelkam taisnes t_1 un t_2 paralēli atbilstoši *XZ* un *YZ* attālumos *c* un *b* no tām (5.zīm.); to krustpunktu apzīmējam ar *O*.



5.zīm.

Ja *O* attālumu līdz *XY* apzīmē ar *x*, tad no vienādības *L(XYZ)=L(XOY)+L(YOZ)+L(ZOX)* seko $\frac{1}{2}\cdot x\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot b\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot c\cdot 1=\frac{\sqrt{3}}{4}$ un $x+b+c=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tā kā arī $a+b+c=\frac{\sqrt{3}}{2}$, tad *x=a*. Tātad *O* attālumi līdz ΔXYZ malām tiešām ir *a, b, c.*

Vēl jāpamato, kāpēc taisnes *t*1 un *t*2 krustojas ΔXYZ iekšpusē. Pamatojiet to patstāvīgi, pierādot, ka pretējā gadījumā būtu *b+c>1* (pierādījumā izmanto laukumus).

Apzīmēsim punkta *O* attālumus līdz ΔXYZ virsotnēm: *x=OX, y=OY* un *z=OZ*. Tā kā *a<x, a<y, b<y, b<z* un *c<z, c<x* (perpendikuls no punkta līdz taisnei ir īsāks par jebkuru slīpni), tad visas dotās sistēmas zemsakņu izteiksmes ir pozitīvas. No Pitagora teorēmas (4.zīm.)

$\Delta XOZ:\ \sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{y^2-a^2}=XY=1$, kas ir dotās sistēmas pirmais vienādojums;

$\Delta YOZ:\ \sqrt{y^2-b^2}+\sqrt{z^2-b^2}=YZ=1$, kas ir dotās sistēmas otrais vienādojums;

$\Delta XOZ:\ \sqrt{x^2-c^2}+\sqrt{z^2-c^2}=XZ=1$, kas ir dotās sistēmas trešais vienādojums.

Līdz ar to ir pierādīts, ka dotajai vienādojumu sistēmai eksistē atrisinājums.

6. uzdevums. Lai atrisinātu vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a+b+c & =3 \\ (a-b+c)(-a+b+c)(a+b-c) & =1 \end{cases}$$

apskatām divus gadījumus:
a) sistēmas otrajā vienādojumā visas iekavas ir pozitīvas,
b) kāds no reizinātājiem (iekavām) ir negatīvs.

a) Ja visas trīs iekavas ir pozitīvas, tad:

$-a+b+c>0$, tātad $b+c>a$,
$a-b+c>0$, tātad $a+c>b$,
$a+b-c>0$, tātad $a+b>c$.

Šajā gadījumā katrs no skaitļiem a, b un c ir mazāks par abu pārējo skaitļu summu un, ņemot vērā uzdevuma nosacījumu, ka atrisinājums ir pozitīvos skaitļos, varam pieņemt, ka a, b un c ir trijstūra malas. Šī trijstūra laukumu varam uzrakstīt ar Hērona formulu

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b+c-2a}{2}\cdot\frac{a+b+c-2b}{2}\cdot\frac{a+b+c-2c}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}. \quad (*)$$

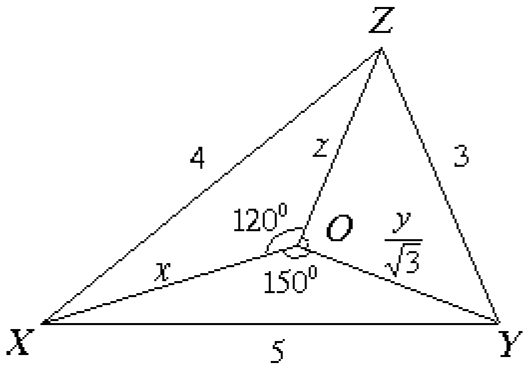
Ņemot vērā sistēmas pirmo vienādojumu $a+b+c=3$, kas ir šī trijstūra perimetrs, un sistēmas otro vienādojumu $(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)=1$ un ievietojot šīs abas izteiksmes trijstūra laukuma vienādojumā, iegūstam, ka $S=\frac{1}{4}\sqrt{3}$. No visiem trijstūriem ar dotu perimetru vislielākais laukums ir vienādmalu trijstūrim; ja perimetrs ir 3, tad šis laukums ir $\frac{1}{4}\sqrt{3}$. Tātad mūsu trijstūris ir regulārs trijstūris ar malu garumiem $a=b=c=1$, kas arī ir dotās vienādojumu sistēmas atrisinājums.

b) Apskatām gadījumu, ja kāda no dotās vienādojumu sistēmas otrā vienādojuma iekavām ir mazāka par nulli. Tādā gadījumā divām iekavām jābūt negatīvām, jo triju iekavu reizinājums ir pozitīvs. Pieņemam, ka $a \le b \le c$ un a, b, c ir pozitīvi skaitļi; tad negatīva var būt tikai iekava $a+b-c$. Te ir pretruna - divas iekavas nevar būt negatīvas. Līdz ar to šāds gadījums, kad kāda no iekavām ir mazāka par nulli nav iespējams.

7. uzdevums. Lai no vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{y^2}{3} & = 25 \\ \dfrac{y^2}{3}+z^2 & = 9 \\ z^2+zx+x^2 & = 16 \end{cases}$$

aprēķinātu lielumu $xy+2yz+3xz$, apskatām taisnleņķa trijstūri XYZ, kura malas ir $XY=5$, $XZ=4$ un $ZY=3$. Sadalām ΔXYZ trijos trijstūros: ΔXOZ, ΔYOZ un ΔXOY, kuriem leņķi O attiecīgi ir 120^o, 90^o un 150^o, bet nogriežņi $OX=x$, $OZ=z$ un $OY=\frac{y}{\sqrt{3}}$.



6.zīm.

Tādā gadījumā sistēmas pirmais vienādojums izsaka ΔXOY malas XY garuma kvadrātu pēc kosinusu teorēmas:

$$XY^2 = 5^2 = x^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2xy\cos 150^o \; ; \qquad (*)$$

tā kā $cos150^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, tad vienādojumu (*) varam uzrakstīt kā

$$25 = x^2 + \frac{y^2}{3} + xy\,,$$

kas ir sistēmas pirmais vienādojums.

Sistēmas otrais vienādojums izsaka ΔYOZ malas ZY garuma kvadrātu pēc Pitagora teorēmas: $ZY^2 = 3^2 = z^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2$, tas ir, $9 = z^2 + \frac{y^2}{3}$.

Sistēmas trešais vienādojums izsaka ΔXOZ malas XZ garuma kvadrātu pēc kosinusu teorēmas:

$$XZ^2 = 4^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos 120^o\,.$$

Tā kā $cos120^o = -\frac{1}{2}$, iegūstam sistēmas trešo vienādojumu: $16=x^2+z^2+xz$.

Uzrakstām ΔXYZ laukumu kā šo trīs trijstūru laukumu summu:

$$S_{\Delta XYZ} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6 = \frac{1}{2}xz\sin 120^o + \frac{zy}{2\sqrt{3}} + \frac{xy}{2\sqrt{3}}\sin 150^o = \frac{xz\sqrt{3}}{4} + \frac{zy}{2\sqrt{3}} + \frac{xy}{4\sqrt{3}} = 6.$$

Pareizinot iegūto izteiksmi ar $4\sqrt{3}$, atrodam meklēto lielumu:

$$xy+2yz+3xz=24\sqrt{3}.$$

8. uzdevums. Šādi četri skaitļi, no kuriem jebkuriem diviem izpildās sakarība $x^{10} + x^9y + \cdots + xy^9 + y^{10} = 1$, neeksistē. Reizinot šo vienādību ar $x–y$, mēs iegūtu, ka $x^{11} - y^{11} = x - y$, tas ir $x^{11} - x = y^{11} - y = c$. Tad funkcijai $f(t) = t^{11} - t + c$ pēc uzdevuma nosacījumiem vajadzētu būt četrām dažādām saknēm. Tas nav iespējams, jo $f'(t)$ ir tikai divas saknes.

Nobeigums

Mācību līdzeklī aplūkotas izplatītākās “nestandarta” metodes, ko skolā un matemātikas olimpiādēs patlaban lieto vienādojumu sistēmu risināšanai. Sakarā ar izglītošanas procesa informatizāciju tālāk būtu vēlama tādu uzdevumu klašu izveide un to risināšanas metožu izstrāde, kuros reizē ar teorētiskiem spriedumiem pielietojumus gūtu arī skaitliskais eksperiments.

Literatūra

1. LU A. Liepas NMS uzdevumu kartotēka.
2. I. France. Interpretāciju metode. LU, 1995.
3. E. Riekstiņš, A. Andžāns. Atrisini pats! Zvaigzne, 1984.
4. В. А. Кречмар. Задачник по алгебре. М., Наука, 1996.