LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola

A. ANDŽĀNS, A. REIHENOVA, L. RAMĀNA, B. JOHANNESSONS

INVARIANTU METODE

INVARIANTI PROCESOS

Rīga, 1997.

ANOTĀCIJA

Matemātikā izstrādātas daudzas metodes, kuras sekmīgi pielieto dažādu uzdevumu risināšanā. Parasti katra metode paredzēta samērā šauras uzdevumu grupas risināšanai un izveidota, ņemot vērā šīs grupas īpatnības un specifiku. Tomēr sastopamas arī metodes, kuras lieto vairākās matemātikas nozarēs.

Šajā mācību līdzeklī aplūkoti uzdevumi, kurus var risināt, izmantojot invariantu metodi. Protams, šos uzdevumus var risināt, izmantojot arī citas metodes. Uzdevumi tiek grupēti pēc invariantiem: aritmētiskie, algebriskie, ģeometriskie un spēļu.

Mācību līdzeklī ir gan teorētiskā, gan praktiskā daļa. Praktiskajā daļā tiek piedāvāti uzdevumi, kuriem doti atrisinājumi. Pamatā uzdevumi ņemti no dažādām olimpiādēm un konkursiem Latvijā un citās valstīs. Ir arī virkne oriģinālu uzdevumu.

Mācību līdzeklis paredzēts skolēniem, kas padziļināti interesējas par matemātiku. To var izmantot arī matemātikas skolotāji un pulciņu vadītāji. Iekļautā materiāla grūtības pakāpes ir dažādas, tomēr pamatā tas pieejams deviņgadīgās skolas skolēniem.

Turpmāk paredzēts izdot arī darba otro daļu “Invarianti konfigurāciju analīzē”.

SATURS

PRIEKŠVĀRDS

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Šis notikums Latvijas iedzīvotājos radījis neizdzēšamas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts **LAIMA** (**LA**tvijas un **I**slandes **MA**temātiskās izglītības projekts), kura ietvaros paredzēts apvienot abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, publicējot grāmatu sēriju par visiem svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem. Apskatāmais darbs ir pirmais, kas tapis šīs sadarbības ietvaros.

Mēs sirsnīgi pateicamies **Islandes izglītības un kultūras ministram B.Bjarnasonam**, kompānijas **EIMSKIP prezidentam H.Sigurgestsonam**, kompānijas **NYHERJI prezidentam F.Sigurjonsonam**, kompānijas **MGH pārstāvim Latvijā B.Ragnarsonam** un **Islandes konsulei Latvijā J.Balodei** par atbalstu **LAIMA** tapšanā. Īpaši augstu vērtējams kompānijas **Talnakönnun** atbalsts, kuras **ģenerālmenedžers ir B.Johannessons**.

Darba “Invariantu metode” elektroniskais variants tiek izmantots Latvijas izglītības sistēmas informatizācijas programmā.

Autori

IEVADDAĻA.

1. INVARIANTA LIELUMA JĒDZIENS.

Mēģināsim definēt, kas ir invariants lielums.

PAR <u>**INVARIANTIEM LIELUMIEM**</u> SAUC TĀDUS LIELUMUS, KURI KĀDĀ PROCESĀ IR NEMAINĪGI.

Ar vārdiem **invarianta īpašība** apzīmē īpašību, kas kādā procesā saglabājas, nemainās.

Piemēram, mašīnas braukšanas ātrums visā ceļa posmā nav nemainīgs lielums, jo, uzsākot braucienu, tās ātrums ir nulle, bet kaut kādā ceļa posmā tas ir nemainīgs, t.i. invariants.

Šūpojoties šūpolēs, attālums no šūpolēm līdz stienim, uz kura šūpoles ir pakārtas, ir invariants lielums, bet attālums no šūpolēm līdz šūpoļu balstiem nav invariants lielums.

Jau mazs bērns neapzinoties saskaras ar invarianta jēdzienu. Vienas rokas pirkstu skaits ir invariants lielums. Skaitot mēs kādu pirkstu nosaucam par pirmo, kādu par otro, utt., t.i., piekārtojam katram pirkstam savu skaitli- 1;2;3;4;... Vairākas reizes skaitot, bērns skaitīšanu var veikt citā secībā, tomēr skaitīšanas rezultāts nebūs atkarīgs no tā, kādā secībā skaitīs pirkstus.

Invariantiem ir ļoti liela nozīme visās zinātnes nozarēs. Zinātne var pastāvēt tikai tāpēc, ka dažas objektu īpašības ir invariantas, nemainīgas. Ja katrs objekts pilnīgi atšķirtos no visiem citiem objektiem un katrā eksperimentā iegūtu citādus rezultātus, tad nevarētu runāt par vispārīgiem likumiem un īpašībām.

2. INVARIANTU METODES BŪTĪBA.

Ir daudz uzdevumu, kuros ir prasīts noskaidrot, vai, izpildot noteiktas operācijas, var iegūt norādīto rezultātu.Ja atbildē iegūstam **-NĒ-**, tad pierādījumā var mēģināt pielietot invariantu metodi. Uzdevuma risinājumā, tad <u>var vadīties pēc šāda plāna:</u>

JĀATROD PIEMĒROTA ĪPAŠĪBA, KURA **1) <u>PIEMĪT</u> SĀKUMĀ DOTAJIEM LIELUMIEM;** **2) IR INVARIANTA, t.i., <u>SAGLABĀJAS,</u> VEICOT PIEĻAUJAMĀS OPERĀCIJAS;** **3) <u>NEPIEMĪT</u> TIEM LIELUMIEM, KURI JĀIEGŪST GALAREZULTĀTĀ**.

Par <u>invarianto īpašību</u> var izmantot īpašību- elementu skaits, summa vai starpība ir ‘’pāra vai nepāra skaitlis’’, dalās ar 3, dalās ar 4,...; tiek izmantota palīgmetode - IEKRĀSOŠANA, utt..

Lai konstatētu kādas invariantas īpašības eksistenci, var izmantot MATEMĀTISKĀS INDUKCIJAS METODI.

1.1. NODAĻA. ARITMĒTISKIE INVARIANTI.

1.1.1. PARITĀTE.

Apskatīsim uzdevumus, kuru atrisināšanas pamatā ir viens apsvērums-<u>’’būt pāra vai nepāra skaitlim’’</u>.

1.UZDEVUMS.

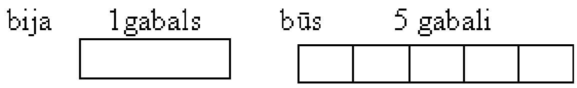
Ir 10 auduma gabali. Daži no tiem tiek sagriezti 5 vai 7 daļās. Visi iegūtie gabali tiek sajaukti un daži no tiem atkal sagriezti 5 vai 7 daļās, utt.

Vai pēc vairākiem griezumiem kaudzē var būt tieši 1997 gabali?

ATRISINĀJUMS.

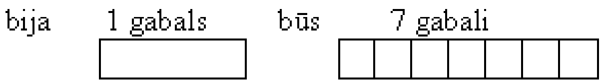
Mazliet padomājot un apsverot, varam atbildēt: protams, ka nevar. Tagad izsekosim sprieduma gaitai.

<u>1.solis</u>. Paņemsim vienu auduma gabalu un to sagriezīsim 5 daļās, tātad



tātad iegūto gabalu skaits pēc vienas griešanas palielinājās par 4, jo 5-1=4.

Vai arī paņemsim citu auduma gabalu un sagriezīsim 7 daļās, tātad



tātad iegūto gabalu skaits pēc vienas griešanas palielinājās par 6, jo 7-1=6.

<u>2.solis</u>. Izsekosim tālāk spriedumu gaitai. Sākumā bija 10 gabali, ja vienu gabalu sagriezām 5 daļās, tad gabalu skaits palielinājās par 4, tātad tagad būsim ieguvuši 10+4=14 gabalus.

Tāpat spriedīsim, ja mēs vienu gabalu sagriezīsim 7 daļās. Sākumā bija 10 gabali, tad vienu gabalu sagriezām 7 daļās, gabalu skaits palielinājās par 6, tātad būsim ieguvuši 10+6=16 gabalus.

<u>3.solis</u>. Izdarīsim secinājumus:

a)ja sākumā gabalu skaits bija 10 (pāra skaitlis), tad pēc viena gabala griešanas arī gabalu skaits paliek 14 vai 16 (pāra skaitlis);

b)veicot norādītās operācijas, auduma gabalu skaita paritāte nemainās (bija pāra skaitlis un arī paliek pāra skaitlis),tātad kaudzē nekad nebūs nepāra skaits auduma gabalu.

Šajā uzdevumā redzam, ka atrodot uzdevumā aprakstītā procesa INVARIANTU- **GABALU SKAITS IR PĀRA SKAITLIS**, mēs pierādījām, ka

- šī īpašība *<u>PIEMĪT</u>* sākumā dotajam skaitlim;
- šī īpašība *<u>SAGLABĀJAS</u>*, veicot pieļaujamās operācijas;
- šī īpašība *<u>NEPIEMĪT</u>* vēlamajam galarezultātam.

Aplūkosim vēl dažus uzdevumus.

2. UZDEVUMS.

Uz tāfeles rindā uzrakstīti skaitļi 1;2;3;...;1998. Vienā ''gājienā'' atļauts nodzēst jebkurus divus blakus esošus skaitļus un to vietā uzrakstīt šo skaitļu starpību.

Vai eksistē tāda '' gājienu'' sērija, pēc kuras uz tāfeles paliek tikai viens vienīgs skaitlis 0?

ATRISINĀJUMS.

Uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa ir nepāra skaitlis:

$$1+2+3+...+1998=\frac{(1+1998)\times 1998}{2}=\frac{1999\times 1998}{2}=1999\times 999$$

(aritmētiskā progresija).

Nodzēsīsim divus blakus esošos skaitļus 9 un 10, vietā ierakstīsim to starpību 10-9=1 (nepāra skaitli). Nodzēsto skaitļu summa ir 10+9=19 (nepāra skaitlis). Tā kā skaitļu 9 un 10 vietā jāieraksta skaitlis 1, tad skaitļu summa pamazinājās par skaitli 19-1=18, t.i., par pāra skaitli. Tā varētu apskatīt un izanalizēt arī citus blakus esošo skaitļu pārus.

Ja tiek nodzēsti divi blakus esoši skaitļi a un b, a>b, un to vietā uzrakstīta šo skaitļu starpība a-b, tad uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa pamazinās par

(a+b)-(a-b)=a+b-a+b=2b, t.i., par pāra skaitli.

Izdarīsim <u>secinājumu:</u>

ja visu sākumā doto skaitļu summa ir NEPĀRA skaitlis, bet nodzēšot divus blakus esošus skaitļus, to summa pamazinās par pāra skaitli, tad, katrreiz atņemot no nepāra skaitļa pāra skaitli, iegūsim NEPĀRA skaitli. Līdz ar to nulli nevarēsim iegūt, jo nulle ir pāra skaitlis.

Uzdevums atrisināts.

Šajā uzdevumā <u>invariants</u> ir- skaitļu summa ir <u>**NEPĀRA** skaitlis</u>:

- šī īpašība <u>*PIEMĪT*</u> sākumā dotajam skaitlim;
- šī īpašība <u>*SAGLABĀJAS*</u>, veicot norādītās operācijas;
- šī īpašība <u>*NEPIEMĪT*</u> vēlamajam galarezultātam.

Daudzos uzdevumos invariantu nevar atrast tik tieši kā iepriekšējos uzdevumos, bet tas jāizvēlas <u>**mākslīgi**</u>.

3.UZDEVUMS.

Uz displeja ekrāna uzrakstīta burtu virkne XXYXYY. Burtu grupu XY var aizstāt ar YYXXYY, bet burtu grupu YYX var aizstāt ar burtu X . Vai, izpildot šādas operācijas, var iegūt burtu virkni YXYXYXYXYXYXYXY?

ATRISINĀJUMS.

Aplūkosim burtu X un burtu Y <u>skaita starpību.</u>

Sākumā virknē šī burtu skaita starpība ir nulle, bet beigu virknē tā ir (-1).

Izdarot pirmā veida aizvietošanu, šī starpība pamazinās par 2, bet, izdarot otrā veida aizvietošanu, tā palielinās par 2.

Redzam, ka ar katru pieļaujamo operāciju starpība starp burtu Y skaitu un burtu X skaitu mainās par pāra skaitli. Tā kā sākotnējā burtu virknē šī starpība ir nulle, tad tā nevar beigu virknē kļūt vienāda ar nepāra skaitli (-1).

Uzdevums atrisināts.
INVARIANTS- dažādu burtu skaita starpība iegūstamajās virknēs ir **pāra** skaitlis.

4.UZDEVUMS.
Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Četras rūtiņas nokrāsotas melnas tā, ka katrā rindiņā un katrā kolonnā ir tieši viena melna rūtiņa. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties vienu rindiņu vai vienu kolonnu un mainīt tajā krāsojumu uz pretējo- melnās rūtiņas pārkrāsot baltas, bet baltās- melnas.
Vai var gadīties, ka kvadrātā paliek tieši 3 melnas rūtiņas?

ATRISINĀJUMS.
Vienosimies uzdevuma risinājumā gan rindiņas, gan kolonnas saukt par līnijām.
Pieņemsim, ka ar kādu gājienu tiek izmainīts rūtiņu krāsojums līnijā t. Tabulā apskatīsim, kā gājiena rezultātā mainās melno rūtiņu skaits līnijā t un arī visā kvadrātā (jo rūtiņu maiņa tiek apskatīta tikai kvadrāta iekšpusē).
Apskatīsim visus gadījumus, kā var izvietot melnās rūtiņas uz līnijas t:

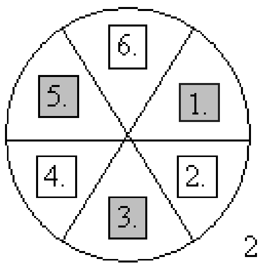
melno rūtiņu skaits līnijā t pirms gājiena	melno rūtiņu skaits līnijā t pēc gājiena	melno rūtiņu skaita izmaiņa (starpība)
4	0	- 4
3	1	- 2
2	2	0
1	3	+ 2
0	4	+ 4

1. zīm.

Izdarām secinājumu, ka jebkura gājiena rezultātā melno rūtiņu skaits kvadrātā mainās par pāra skaitli. Tā kā uzdevuma sākumā ir 4 melnās rūtiņas, tad redzam, ka melno rūtiņu skaits nevar kļūt vienāds ar 3 (ar nepāra skaitli).
Uzdevums atrisināts.
INVARIANTS- melno rūtiņu skaits ir **pāra** skaitlis.

5.UZDEVUMS.
Riņķis sadalīts 6 sektoros. Katrā sektorā atrodas aploksne ar 1 latu. Vienā gājienā atļauts vienu aploksni pārlikt blakus sektorā.
Vai var visas aploksnes pārlikt vienā sektorā, izmantojot tieši 20 gājienus?

ATRISINĀJUMS.
Vispirms sanumurēsim visus sektorus un iesvītrosim 1., 3., 5. sektoru, tātad kopējā naudas summa iesvītrotajos trīs sektoros ir S=3 LS, skat.2.zīm..

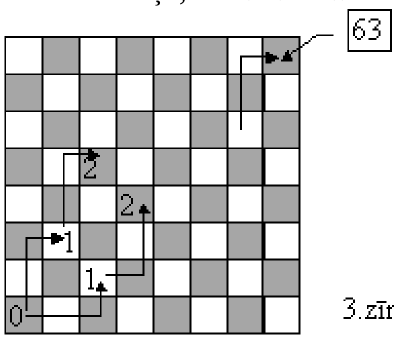


2.zīm.

Tā kā vienā gājienā atļauts pārlikt vienu aploksni blakus sektorā, tad šī naudas summa S iesvītrotajos sektoros vai nu palielināsies par 1 LS, vai pamazināsies par 1 LS. Nākošajā-otrajā gājienā šī summa atkal tāpat izmainās. Tā vai nu pamazinās, vai palielinās par 1 LS, t.n., ka pēc pāra skaita gājieniem summa S būs nepāra skaitlis. Tā kā skaitlis 20,t.i.,gājienu skaits-ir pāra skaitlis, tad šī summa S būs nepāra skaitlis. Bet pēc uzdevuma nosacījumiem, visas aploksnes ir jāpārliek vienā sektorā, tātad ir jābūt S=0 vai S=6,t.i.,pāra skaitlis, bet tas nav iespējams, tātad uzdevumā minētā prasība nav realizējama.
Uzdevums atrisināts.
<u>INVARIANTS</u>- <u>naudas summa</u> iesvītrotajos laukumos pēc pāra skaita gājienu ir **nepāra** skaitlis.

6.UZDEVUMS.
Šaha galdiņa kreisajā apakšējā stūrī atrodas zirdziņš. Vai zirdziņš, var nonākt labajā augšējā stūrī, katrā lauciņā nonākot tieši vienu reizi?

ATRISINĀJUMS.
Šaha zirdziņš sākumā atrodas uz melnā lauciņa, bet, izdarot pirmo gājienu, tas atradīsies uz baltā lauciņa; izdarot nākošo gājienu, tas atkal atradīsies uz melnā lauciņa, tātad pēc katra gājiena zirdziņš nonāk uz pretējas krāsas lauciņa:
melns → balts → melns → balts → melns → balts...
Tātad pēc pāra skaita gājienu zirdziņš atradīsies uz melnā lauciņa, bet pēc nepāra skaita gājienu zirdziņš atradīsies uz baltā lauciņa, skat. 3.zīm..



3.zīm.

Uz šaha galdiņa 8x8 ir 64 lauciņi, bet zirdziņš uz viena lauciņa jau atrodas, tātad pēc uzdevuma nosacījumiem tam vēl būs jāveic 64-1=63 gājieni. Bet skaitlis 63 ir nepārskaitlis, tātad pēc 63 gājieniem zirdziņam ir jāatrodas uz baltā lauciņa. Taču labējais augšējais lauciņš ir melns, tātad zirdziņš nevarēs nonākt labējā augšējā lauciņā, katrā lauciņā nonākot tieši vienu reizi.
Uzdevums atrisināts.
<u>INVARIANTS</u> - ik pēc diviem gājieniem zirdziņš atrodas tās <u>pašas krāsas</u> lauciņā kā sākumā.

7.UZDEVUMS.
Dots kvadrāts, kura izmēri ir 4x4 rūtiņas. Pirmās rindas otrajā rūtiņā ierakstīta "0", citās rūtiņās "1". Vienā gājienā atļauts aizstāt 0 ar 1 un 1 ar 0 vai nu visās vienas

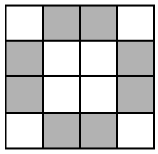
vertikāles rūtiņās, vai visās vienas horizontāles rūtiņās, vai visās vienas diagonāles rūtiņās.

Vai eksistē tāda gājienu sērija, pēc kuras visās rūtiņās ir “1”?

(Par kvadrāta diagonāli sauksim jebkuru rūtiņu virkni, kas paralēla vienai no kvadrāta galvenajām diagonālēm un nav papildināma, saglabājot šo paralelitāti. Par diagonāli sauksim arī katru stūra rūtiņu; tātad kvadrātam ir 14 diagonāles.)

ATRISINĀJUMS.

Doto kvadrātu iekrāsosim tā, lai katrā rindā un katrā kolonnā būtu iekrāsotas 2 rūtiņas (skat. 4. zīm.)



4.zīm.

Mainīsim ciparus 0 un 1 un skatīsimies, kā šī izmaiņa skar iekrāsotās rūtiņas. Veicot atbilstošos gājienus, redzam, ka izmaiņas skars vai nu divas iekrāsotās rūtiņas, vai arī nevienu rūtiņu (jo uz dažām diagonālēm nav iekrāsota neviena rūtiņa).

Aplūkosim visas iespējas, kā izmainīsies “0” skaits iekrāsotajās rūtiņās:

a) ja abās iekrāsotajās rūtiņās ir bijuši “1”, tad pēc ciparu maiņas tur būs “0” un kopējais “0” skaits iekrāsotajās rūtiņās palielināsies par 2;

b) ja abās iekrāsotajās rūtiņās ir bijušas “0”, tad pēc ciparu maiņas tur būs “1” un kopējais “0” skaits kvadrāta iekrāsotajās rūtiņās pamazināsies par 2;

c) ja vienā iekrāsotajā rūtiņā ir bijis “1”, bet otrā “0”, tad kopējais “0” skaits iekrāsotajās rūtiņās nemainīsies.

Pēc šo 3 gadījumu aplūkošanas izdarīsim secinājumu:

“0” skaits iekrāsotajās rūtiņās vai nu nemainās , vai mainās par skaitli 2 (palielinās vai pamazinās). “0” skaits mainās par pāra skaitli. Tā kā sākumā iekrāsotajās rūtiņās bija viena “0”, t.i., nepāra skaits “0”, tad “0” skaits nevar kļūt vienāds ar nulli.

Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS- iekrāsotajās rūtiņās “0” skaits ir **nepāra** skaitlis.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAI RISINĀŠANAI.

1.1.-1. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 1; 2; 3;...; 10. Ar vienu "gājienu" var izvēlēties jebkurus divus no tiem un abiem pieskaitīt pa vieniniekam. Vai, atkārtojot šādus "gājienus", var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?

1.1.-2. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 0; 1; 0; 0. Atļauts vienā "gājienā" vienalga kuriem diviem skaitļiem pieskaitīt vieninieku.
Vai var, atkārtojot šo operāciju vairākas reizes, panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?

1.1.-3. Uz tāfeles ir uzrakstīti skaitļi 1; 2; 3;...; 1993. Atļauts nodzēst jebkurus divus skaitļus un to vietā uzrakstīt šo skaitļu starpības moduli. Gala rezultātā uz tāfeles paliks tikai viens vienīgs skaitlis.
Vai šis skaitlis var būt vienāds ar nulli?

1.1.-4. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 1; 2; 3;...; 1998. Atļauts nodzēst jebkurus divus skaitļus un to vietā ierakstīt šo skaitļu starpību. Acīmredzot, ka pēc 1997 šādiem "gājieniem" uz tāfeles paliks viens skaitlis.
Pierādīt, ka šis skaitlis ir nepāra skaitlis.

1.1.-5. Uz galda stāv 16 cilindri: ar sarkaniem augšējiem pamatiem un ziliem apakšējiem pamatiem. No tiem 15 cilindri ir ar sarkano pamatu uz augšu, bet viens cilindrs- ar zilo pamatu uz augšu. Atļauts vienā "gājienā" apgriezt otrādi jebkurus 4 cilindrus.
Vai var, atkārtojot šo operāciju vairākas reizes, apgriezt visus cilindrus ar sarkanajiem pamatiem uz augšu?

1.1.-6. Rindā cita citai blakus novietotas 1998 monētas. Pirmā no tām nolikta ar ciparu uz augšu, pārējās- ar ģerboni uz augšu. Vienā "gājienā" atļauts apgriezt otrādi trīs blakus esošas monētas.
Vai eksistē tāda gājienu sērija, pēc kuras visas monētas ir ar ģerboni uz augšu?

1.1.-7. Pa apli uzrakstīti vairāki skaitļi; viens no tiem ir 1, citi 0. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties trīs pēc kārtas uzrakstītus skaitļus, no kuriem vidējais ir 1, un mainīt tos visus trīs: 1 aizstāt ar 0, bet 0- ar 1. Atkārtojot šādus "gājienus", gribam panākt, lai uz apļa būtu tikai nulles.
Vai to var izdarīt, ja sākumā ir 1995 skaitļi?

1.1.-8. Dota pilsētu karte ar 1996 spuldzītēm. Katrai spuldzītei ir savs slēdzis. Vienlaikus var mainīt slēdža stāvokli jebkurām 26 spuldzītēm. Sākumā ir ieslēgtas 17 spuldzītes.
Vai var nodzēst visas spuldzītes?

1.1.-9. Profesors Chewits savā laboratorijā bija izgatavojis 1997 "chewitus". Tos visus viņš gribēja aizvest uz mājām diplomātā, bet diplomātā jāieliek tieši 96 konfektes. Profesora ierīcei piemīt šāda burvestība: katra aizvestā "chewita" vietā tiek uzburta konfekte "Flinstoni". Bet, ja profesors ir aizvedis mājās konfekti "Flinstoni", tad tās vietā

tiek uzburts “chewits”. Profesoram ļoti garšo “chewiti”, un tāpēc viņš nolēma nepārtraukt darbu tikmēr, kamēr visi “chewiti” būs aizvesti mājās.
Vai tas ir iespējams?

1.1.-10. Deju grupā “Zeltene” ir 7 zēni un 11 meitenes, bet jaunas dejas iestudēšanai nepieciešami 10 zēni un 15 meitenes. Deju grupa “Venēra” ir ar mieru veikt dejotāju apmaiņu, aizdodot 8 meitenes un pretī saņemot 4 zēnus, bet deju grupa “Marss”- aizdodot 3 zēnus un pretī saņemot 5 meitenes. Abas deju grupas ir ar mieru maiņu izdarīt vairākkārt.
Vai iecerēto deju izdosies iestudēt? Lieki dejotāji “Zeltenē” nav pieļaujami.

1.1.-11. Uz displeja ekrāna attēlota virkne: VOVOVOV. Burtu grupu VO var aizstāt ar burtu grupu OVVOVOO un otrādi, bet burtu grupu OO var nodzēst, neaizstājot ne ar ko.
Vai, izpildot vairākas reizes šīs operācijas, var iegūt burtu virkni VOVOV?

1.1.-12. Naturālu skaitli katru minūti var vai nu reizināt, vai dalīt vai nu ar 2, vai 3.
Vai tieši vienas stundas laikā no skaitļa 24 var iegūt 108?

1.1.-13. Regulāra sešstūra virsotnēs uzrakstīti pēc kārtas skaitļi 7; 5; 3; 7; 1; 9. Vienā “gājienā” atļauts:
1) pieskaitīt kādam skaitlim divus skaitļus, kas atrodas blakus virsotnēs;
2) atņemt no skaitļa divkāršotu pretējā virsotnē uzrakstīto skaitli, ja starpība ir pozitīva.
Vai eksistē tāda “gājienu” sērija, pēc kuras vienā no virsotnēm ir ierakstīts skaitlis 1996?

1.1.-14. Riņķis sadalīts 14 vienādos sektoros un četros blakus sektoros pēc kārtas izvietotas monētas, kuru vērtība ir 1 sant., 2 sant., 5 sant., 10 sant. Vienā “gājienā” atļauts pārvietot jebkuru vienu monētu pāri trim sektoriem uz ceturto. Pēc vairākiem šādiem “gājieniem” monētas kopumā aizņem tos pašus četrus sektorus.
Vai var gadīties, ka 1 sant. un 2 sant. monētas apmainījušās vietām?

1.1.-15. Regulāra 12-stūra $A_1A_2A_3...A_{12}$ virsotnē A_1 atrodas “-” zīme, bet pārējās virsotnēs- atrodas “+” zīmes. Vienā “gājienā” atļauts vienlaicīgi mainīt zīmi uz pretējo sešās pēc kārtas sekojošās 12-stūra virsotnēs.
a) Pierādīt, ka pēc vairākām šādām operācijām nevarēs iegūt, lai virsotnē A_2 būtu “-” zīme, bet visās pārējās virsotnēs - “+” zīmes.
b) Pierādīt to pašu, ja vienā gājienā maina zīmi četrās pēc kārtas sekojošās virsotnēs.
c) Pierādīt to pašu, ja vienā gājienā maina zīmi trijās pēc kārtas sekojošās virsotnēs.

1.1.-16. Kvadrāts sadalīts 4x4 rūtiņās, kur katrā rūtiņā ir ierakstīta “+” vai “-” zīme, kā parādīts 5.zīm. Vienā “gājienā” atļauts vienlaicīgi mainīt zīmes visās rūtiņās, kuras ir izvietotas vienā rindā, vienā kolonnā vai uz vienas diagonāles (diagonāles definīciju skat. 7.uzdevuma formulējumā).
Pierādīt: lai cik šādu zīmju maiņu mēs arī veiktu, neizdosies iegūt tabulu, kurā ir tikai “+” zīmes.

+	+	+	+
+	+	+	+
-	+	+	+
+	+	+	+

5.zīm.

1.1.-17. Dots kvadrāts, kura izmēri ir 8x8 rūtiņas. Kvadrāta katrā rūtiņā tiek ierakstīti “+” vai “-” zīme. Vienā “gājienā” atļauts mainīt zīmes vai nu visās vienas vertikāles rūtiņās, vai visās vienas horizontāles rūtiņās, vai arī visās vienas diagonāles rūtiņās (diagonāles definīciju skat. 7.uzdevuma formulējumā).

Kā sākumā jāieraksta zīmes rūtiņās, lai pēc jebkuras gājienu sērijas būtu ne mazāk kā 6 rūtiņas, kurās ir ierakstīta “-” zīme?

1.1.-18. Uz šaha galdiņa, kura izmēri ir 9x9 lauciņi, novietoti 54 kauliņi, kā parādīts 6. zīmējumā.

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

6.zīm.

Ja divi kauliņi A un B atrodas blakus vienā horizontālē vai vienā vertikālē un aiz B ir brīvs lauciņš, tad kauliņu A drīkst pārcelt pāri kauliņam B uz šo brīvo lauciņu, bet kauliņu B noņemt no galdiņa (t.i., drīkst ar kauliņu A “nosist” kauliņu B). Jebkura citāda kauliņu pārvietošana aizliegta.

Vai iespējams panākt, lai uz galdiņa paliktu tikai viens kauliņš?

1.1.2. SPECIFISKAS ATLIKUMU VĒRTĪBAS.

1.1.2.1. DALĀMĪBA AR 3.

Dažreiz par invariantu izvēlas nevis īpašību ”būt pāra skaitlim vai “būt nepāra skaitlim”, bet gan īpašību **“dalīties ar 3 “** vai “**dalot ar 3**, **dot atlikumu 1** (resp.2)”.

Apskatīsim uzdevumu grupu, kurā būs izmantota īpašība **“ dalīties ar 3 “.**

8. UZDEVUMS.
Mežā auga 36 sēnes. Pirmās dienas rītausmā viena sēne nogāzās, bet izauga 4 jaunas sēnes. Tāpat notiek katrā nākamajā dienā - viena nogāžas, 4 izaug jaunas.
Kurā dienā šajā mežā būs tieši 15037 sēnes?
ATRISINĀJUMS.
Izpētīsim, kādas ir sēņu skaita izmaiņas mežā vienā dienā. Ja mežā izauga 4 jaunas sēnes un 1 nogāzās, tad sēņu skaits mežā palielinājās par 3, jo 4-1=3. Tā kā tādas pat izmaiņas ar sēnēm notiek katru dienu, tad sēņu skaits mežā katru dienu palielinās par skaitli 3. Tā kā sākumā tas dalās ar 3, tad tas dalās ar 3 visu laiku. Lai noskaidrotu, kurā dienā mežā būs tieši 15037 sēnes, skaitlis 15037 jādala ar 3. Bet šis skaitlis nedalās ar 3 bez atlikuma, tātad nebūs tādas dienas, kad mežā būs tieši 15037 sēnes.
Uzdevums atrisināts.
<u>INVARIANTS</u>- sēņu skaits dalās ar skaitli 3.

9.UZDEVUMS.
Pūķim ir 2000 galvas. Spēkavīrs vienā cirtienā pūķim var nocirst 33, 21, 17 vai 1 galvu, bet uzreiz pūķim ataug attiecīgi 48, 0, 14 vai 349 galvas. Ja tiek nocirstas visas galvas, tad jaunas galvas neataug.
Vai spēkavīrs varēs, uzvarēt pūķi?
ATRISINĀJUMS.
Lai spēkavīrs uzvarētu pūķi, jānocērt visas galvas. Apskatīsim kā vienā cirtienā notiek pūķa galvu nociršana un ataugšana:
<u>1.cirtiens</u>- ja cērt 33 galvas un 48 galvas ataug, tad pūķa galvu skaits palielinās par 15 (48-33=15),t.i., par skaitli, kas dalās ar 3.
<u>2.cirtiens</u>- ja cērt 21 galvu un 0 galvas ataug, tad pūķa galvu skaits pamazinās par 21 ,t.i., par skaitli, kas dalās ar 3.
<u>3.cirtiens</u>- ja cērt 17 galvas un 14 galvas ataug, tad pūķa galvu skaits pamazinās par 3 (17-14=3),t.i., par skaitli, kas dalās ar 3.
<u>4.cirtiens</u>- ja cērt 1 galvu un 349 galvas ataug, tad pūķa galvu skaits palielinās par 348 (349-1=348),t.i., par skaitli, kas dalās ar 3.
Tā kā pūķim sākumā ir 2000 galvas, t.i., skaitlis, kas nedalās ar 3, tad, izdarot cirtienu, pūķa galvu skaits atkal kļūst skaitlis, kas nedalās ar 3. Tātad tas nekad nedalās ar 3. Tātad galvu skaits nekad nevar kļūt vienāds ar nulli.
Uzdevums atrisināts.
<u>Invariants</u>- pūķa galvu skaits nedalās ar 3.

10. UZDEVUMS.

Uz salas dzīvo 13 balti, 15 sarkani un 17 zaļi hameleoni (ķirzakas, kas spēj mainīt krāsu). Hameleoni satiekas tikai pa diviem. Ja satiekas divi vienas krāsas hameleoni, tie krāsu nemaina, ja satiekas divi dažādu krāsu hameleoni, tie reizē iegūst trešo krāsu (piemēram, ja satiekas balts un sarkans hameleoni, tad tie abi kļūst zaļi, utt.).

Vai var gadīties, ka visi hameleoni vienlaicīgi ir vienā krāsā?

ATRISINĀJUMS.

Aplūkosim piemērus, kā var izmainīties dažādu krāsu hameleonu skaits pēc dažām tikšanās reizēm.

Apzīmēsim ar B- baltu hameleonu, ar S- sarkanu hameleonu, ar Z- zaļu hameleonu.

No tabulas, skat. 7.zīm., redzam, ka neizdodas izlīdzināt divu krāsu hameleonu skaitu. Ja to izdotos izdarīt, tad tālāk varētu viegli panākt, lai visi hameleoni ir vienā krāsā.

	balto hameleonu skaits	sarkano hameleonu skaits	zaļo hameleonu skaits
sākumā bija	13	15	17
pēc S un Z satikšanās	13+2=15	15-1=14	17-1=16
pēc B un Z satikšanās	15-1=14	14+2=16	16-1=15
pēc S un Z satikšanās	14+2=16	16-1=15	15-1=14
pēc S un Z satikšanās	16+2=18	15-1=14	14-1=13
pēc S un Z satikšanās	18+2=20	14-1=13	13-1=12
pēc B un S satikšanās	20-1=19	13-1=12	12+2=14
pēc B un S satikšanās	19-1=18	12-1=11	14+2=16
pēc B un Z satikšanās	18-1=17	11+2=13	16-1=15
pēc B un Z satikšanās	17-1=16	13+2=15	15-1=14

7.zīm.

Ja tas nav iespējams, tad <u>neiespējamība ir jāpierāda</u>. Apskatīsim pierādījumu tam, ka nav iespējama uzdevumā aprakstītā situācija, kurā visi 45 hameleoni būtu vienā krāsā

Izpētīsim, kā pēc vienas tikšanās reizes izmainās hameleonu skaits katras krāsas hameleonu grupā. Ja satiekas divi vienas krāsas hameleoni, tie krāsu nemaina. Tāpēc nemainās arī hameleonu skaits katrā krāsu grupā.

Dažādu krāsu hameleoni var satikties 3 veidos:

a)baltais ar sarkano hameleonu,

b)baltais ar zaļo hameleonu,

c)sarkanais ar zaļo hameleonu.

Atkarībā no šiem trim satikšanās veidiem hameleonu sadalījums krāsu grupās pēc pirmās satikšanās var izmainīties sekojoši:

a)

	baltie	sarkanie	zaļie
sākotnējais skaits	13	15	17
skaits pēc pirmās satikšanās	12 (13-1)	14 (15-1)	19 (17+2)

b)

	baltie	sarkanie	zaļie
sākotnējais skaits	13	15	17
skaits pēc pirmās tikšanās	12 (13-1)	17 (15+2)	16 (17-1)

c)

	baltie	sarkanie	zaļie
sākotnējais skaits	13	15	17
skaits pēc pirmās tikšanās	15 (13+2)	14 (15-1)	16 (17-1)

8.zīm.

Ievērosim, ka skaitļi 13; 15; 17, dalot tos ar 3, dod atlikumus 1; 0; 2. Aplūkosim, kādus atlikumus dod hameleonu skaits dažādās krāsu grupās pēc katra veida satikšanās:

a)

	baltie	sarkanie	zaļie
sākotnējā skaita atlikums, dalot ar 3	1	0	2
pēc 1. tikšanās	0	2	1

b)

	baltie	sarkanie	zaļie
sākumā	1	0	2
pēc 1. tikšanās	0	2	1

c)

	baltie	sarkanie	zaļie
sākumā	1	0	2
pēc 1. tikšanās	0	2	1

9.zīm.

Ievērosim, ka visos 3 gadījumos tabulu apakšējās rindas ir vienādas un tāpat kā sākumā satur visus atlikumus 0; 1; 2, tikai citā kārtībā. Tāpēc, ***ja aplūkotu tabulas vēl pēc 2. tikšanās, pēc 3.tikšanās,..., atkal iegūtu atlikumus 1; 0; 2, tikai varbūt citā kārtībā***

Pamatosim to.

Vienādības

$$\begin{aligned}(3a+0)-1&=3(a-1)+2,\\(3a+1)-1&=3a+0, \qquad (1)\\(3a+2)-1&=3a+1\end{aligned}$$

parāda:

ja no skaitļa, kas dalīšanā ar 3 dod atlikumu 0 (resp. 1 vai 2), atņem vieninieku, tad iegūst skaitli, kas dalīšanā ar 3 dod atlikumu 2 (resp. 0 vai 1).

Līdzīgi vienādības

$$(3a+0)+2=3a+2$$
$$(3a+1)+2=3(a+1)+0 \qquad (2)$$
$$(3a+2)+2=3(a+1)+1$$

parāda:
ja skaitlim, kas dalīšanā ar 3 dod atlikumu 0 (resp. 1 vai 2), pieskaita 2, tad iegūst skaitli, kas dalīšanā ar 3 dod atlikumu 2 (resp. 0 vai 1).

Tagad varam pierādīt iepriekš izcelto apgalvojumu.

Tiešām, ja tiekas "nulles atlikuma krāsas" hameleons un "vieninieka atlikuma krāsas" hameleons, tad šīs krāsas kļūst par "divnieka atlikuma krāsu" un "nulles atlikuma krāsu" saskaņā ar (1). Savukārt trešā krāsa, kas ir "divnieka atlikuma krāsa", kļūst par "vieninieka atlikuma krāsu" saskaņā ar (2). Tātad atkal sastopami visi trīs atlikumi.

Līdzīgi aplūko abas pārējās satikšanās iespējas.

Ja visi hameleoni būtu vienā krāsā, tad to izvietojums pa krāsām būtu 45; 0; 0, bet šiem skaitļiem ir vienādi atlikumi, dalot tos ar 3. Tātad nav iespējams, ka uz salas visi hameleoni ir vienā krāsā.

<u>INVARIANTS</u>- dažādu krāsu hameleonu skaiti, dalot ar 3, dod dažādus atlikumus.

11. UZDEVUMS.

Ar naturālu skaitli drīkst izdarīt šādas operācijas:

a)reizināt ar 2;

b)dalīt ar 2, ja skaitlis ir pāra skaitlis;

c)pierakstīt galā to pašu skaitli (piemēram, ar šo operāciju no skaitļa 1997 var iegūt skaitli 19971997).

Vai ar šīm operācijām, izdarot tās vairākas reizes, no skaitļa 24 var iegūt skaitli 1997?

ATRISINĀJUMS.

Izpētīsim vispirms abus skaitļus: doto un to, kuru jāiegūst. Skaitlim 24 izpildās īpašība "dalās ar 3",bet skaitlim 1997 šī īpašība nepiemīt.

Sīkāk analizēsim pieļaujamās operācijas "uz dalāmību ar 3". Pierādīsim: **ja kāds skaitlis dalās ar 3, tad skaitlis, kas no tā tiek iegūts ar šajā uzdevumā pieļaujamajām operācijām, arī dalīsies ar 3.** Tiešām:

a) ja n dalās ar 3, tad arī 2n dalās ar 3,

b) ja pāra skaitlis 2n dalās ar 3, tad n dalās ar 3,

c) apgalvojums par trešo operāciju izriet no dalāmības pazīmes ar 3. Ja skaitļa $\overline{n}$ ciparu summa dalās ar 3, tad arī jauniegūtā skaitļa $\overline{nn}$ ciparu summa dalās ar 3, jo tā ir divreiz lielāka nekā sākotnējā skaitļa $\overline{n}$ ciparu summa. Tātad arī pats jauniegūtais skaitlis $\overline{nn}$ dalīsies ar 3.

Tā kā uzdevumā dotais skaitlis 24 dalās ar 3, tad arī skaitļiem, kurus var iegūt no 24, jādalās ar 3. Bet skaitlis 1997 ar 3 nedalās, tātad ar uzdevumā dotajām operācijām skaitli 1997 nevarēs iegūt.

Uzdevums atrisināts.

<u>INVARIANTS</u>- visi iegūstamie skaitļi dalās ar skaitli 3.

12.UZDEVUMS.

Uz tāfeles ir uzrakstīti cipari 2; 3; 4; 5. Atļauts izvēlēties dažus no tiem un sastādīt no tiem skaitli A. Pēc tam skaitli A pareizina ar 13, un ciparus, kurus iegūst reizināšanas rezultātā, uzraksta uz tāfeles izvēlēto ciparu vietā. (Piemēram, izvēloties ciparus 2; 3; 4, varam no tiem sastādīt skaitli A=324 un iegūt skaitli 13A=13x324=4212, pie tam cipars 2 tiek iegūts divas reizes. Tagad uz tāfeles ir uzrakstīti cipari 1; 2; 2; 4; 5).

Vai ar tādu operāciju palīdzību var panākt to, ka uz tāfeles būs uzrakstīti cipari 2;2;3;3;4;4;5;5;6;6;7;7?

ATRISINĀJUMS.

Atcerēsimies: **naturāls skaitlis, dalot to ar 3, dod tādu pašu atlikumu, kādu dod šī skaitļa ciparu summa, dalot to ar 3.**

Ja vienas operācijas izpildes sākumā izvēlēto ciparu summa, dalot ar 3, dod atlikumu r, tad tādu pašu atlikumu r dod arī no šiem cipariem izveidotais skaitlis A. Tā kā 13A=A+12A, un 12A dalās ar 3, tad tādu pašu atlikumu r, dalot ar 3, dod arī jauniegūtais skaitlis 13A; tātad tādu pašu atlikumu r, dalot ar 3, dod arī to ciparu summa, kurus operācijas izpildes beigās uzraksta uz tāfeles sākumā izvēlēto ciparu vietā.

Tātad operācijas izpildes gaitā nemainās uz tāfeles uzrakstīto ciparu summas atlikums, dalot to ar 3.

<u>Ievērosim</u>, ka sākumā uzrakstīto ciparu summa ir 14, un tā dod atlikumu 2, dalot ar 3. Tātad visām ciparu sistēmām, kas parādās uz tāfeles, ir atlikums 2, dalot to summu ar 3.

Bet galarezultātā iegūstamās sistēmas ciparu summa ir 2x(2+3+4+5+6+7)=2x27=54; tā dod atlikumu 0, dalot ar 3.

Tātad šāda ciparu sistēma nav iegūstama.

Uzdevums atrisināts.

<u>INVARIANTS</u>- uz tāfeles esošo ciparu summa, dalot to ar 3, dod atlikumu 2.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAI RISINĀŠANAI.

1.1.-19. Jānītis paņēma uz skolu 15 uzlīmes. Pirmajā nedēļā viņš katru dienu izmainīja 1 uzlīmi, bet iemainīja 4 uzlīmes. Tā tas turpinājās arī nākošajās nedēļās. Nedēļā ir 5 mācību dienas.

Kuras dienas vakarā Jānītim būs tieši 113 uzlīmes?

1.1.-20. Uz galdiņa, kura izmēri ir 10×10 rūtiņas, atrodas figūra "lauva", kura pārvietojas par vienu rūtiņu pa labi, par vienu rūtiņu uz leju, pa vienu rūtiņu diagonāli tieši pa kreisi uz augšu.

Vai "lauva" var apstaigāt visas rūtiņas, katrā nonākot tieši vienu reizi un pēdējā gājienā nonākot sākuma rūtiņā?

1.1.-21. Vai no figūru virknes ○ □ ○ □ ○ □ var iegūt virkni ○ ○ □ □ ○ □ ○, ja virknē grupu ○ □ ○ var aizstāt ar grupu ○ ○ □ ○ □ ○ ○ ○, bet grupu ○ □ ○ □ ○ ○ ○ □ ○ var aizstāt ar grupu ○ □ □ ○ □ ○?

1.1.-22. Ar naturālu skaitli var izdarīt sekojošas operācijas:

1)pieskaitīt 6;

2)dalīt ar 2, ja skaitlis ir pāra skaitlis;

3)mainīt vietām skaitļa ciparus (skaitļa sākumā nedrīkst atrasties nulle).

Vai ar šīm operācijām, izdarot tās vairākas reizes, no skaitļa 21 var iegūt skaitli 3001?

1.1.2.2. DALĀMĪBA AR 4.

Apskatīsim uzdevumus, kur par invariantu izvēlēsimies īpašību, kas saistīta ar **“dalīšanos ar 4** “.

Sākumā apskatīsim vienkāršu uzdevumu:

13.UZDEVUMS.

Vai 19990.gadā Latvijas izlases sportisti piedalīsies Olimpiskajās spēlēs?

ATRISINĀJUMS.

Lai atbildētu uz šo jautājumu, noskaidrosim, vai 19990. gadā notiks Olimpiskās spēles. Olimpiskās spēles notiek reizi četros gados, un tās notika 1996. gadā. Tā kā 1996 dalās ar 4, tad olimpiskās spēles notiek tikai gados, kuru numuri dalās ar 4. Bet 19990 ar 4 nedalās, tātad šajā gadā olimpiskās spēles nenotiks.

Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS- olimpisko spēļu gada skaitlis dalās ar 4.

14.UZDEVUMS.

Skaitļu virkni b_1, b_2, b_3, ... veido šādi: $b_1=1$, $b_2=2$, $b_{n+2}=b_nb_{n+1}+1$, kur n=1, 2, 3, ... (t.i., katru nākamo virknes locekli iegūst, abu iepriekšējo locekļu reizinājumam pieskaitot vieninieku). Pierādīt, ka b_{1996} nedalās ar 4.

ATRISINĀJUMS.

Noskaidrosim, kādi ir atlikumi, virknes b_1, b_2, ..., b_n locekļus dalot ar 4. Atlikumu, kas rodas, b_n dalot ar 4, apzīmēsim ar r_n. Tā kā $b_1=1$; $b_2=2$; $b_3=3$; $b_4=7$; utt., tad $r_1=1$; $r_2=2$; $r_3=3$; $r_4=3$; utt.

Vispirms pierādīsim lemmu.

LEMMA.
r_{n+2} ir vienāds ar atlikumu, kas rodas, skaitli $r_{n+1}\times r_n+1$ dalot ar 4.

Lemmas pierādījums.

Katru virknes (b_n) locekli dalīsim ar 4 ar atlikumu.

Iegūstam:

$$b_n=4M_n+r_n$$
$$b_{n+1}=4M_{n+1}+r_{n+1}.$$

Izmantosim uzdevumā doto formulu, kā tiek iegūts katrs nākošais virknes (b_n) loceklis:

$$b_{n+2}=b_n\times b_{n+1}+1=(4M_n+r_n)\times(4M_{n+1}+r_{n+1})+1=$$
$$=16M_nM_{n+1}+4M_nr_{n+1}+4M_{n+1}r_n+r_n\times r_{n+1}+1=$$
$$=4(4M_nM_{n+1}+M_nr_{n+1}+M_{n+1}r_n)+(r_n\times r_{n+1}+1).$$

Apskatīsim skaitļa b_{n+2} katru saskaitāmo. Pirmais saskaitāmais dalās ar 4, jo reizinātājs 4 dalās ar 4. Tātad atlikums, dalot b_{n+2} ar 4, radīsies no saskaitāmā $(r_n x r_{n+1}+1)$.

Lemma pierādīta.

Tātad atlikuma r_{n+2} vērtība ir atkarīga no atlikumu r_{n+1} un r_n vērtībām, t.i., no abiem iepriekšējiem atlikumiem.

Sastādīsim tabulu, kur $b_{n+2}=b_n\times b_{n+1}+1$, un $1\le n\le 7$:

n	1	2	3	4	5	6	7
(b_n)	1	2	3	7	22	155	3411
(r_n)	1	2	3	3	2	3	3

10.zīm.

Redzam, ka secīgu atlikumu pāris (2; 3) atkārtojas. Tā kā katrs nākošais atlikums atkarīgs tikai no diviem iepriekšējiem, tad šī atkārtošanās nosaka arī tālāko atlikumu atkārtošanos. Tātad atlikumu virkne (r_n) ir periodiska ar periodu (2; 3; 3).

Tā kā neviens virknes (r_n) loceklis nedalās ar 4, tad seko, ka arī neviens virknes (b_n) loceklis nedalās ar 4, tātad arī loceklis b_{1996} nedalās ar 4.

Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS- virknes (b_n) neviens loceklis nedalās ar 4.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAI RISINĀŠANAI.

1.1.-23. Dots šaha galdiņš ar 8x8 rūtiņām. Vienā rūtiņā ierakstīta zīme "- ", bet visās pārējās zīme"+". Vienā gājienā ir atļauts mainīt zīmes uz pretējām visās vienas rindas rūtiņās vai visās vienas kolonnas rūtiņās.
Vai eksistē tāda gājienu sērija, pēc kuras visās rūtiņās ir "+" zīme?

1.1.-24. Uz lielas rūtiņu lapas, kur rūtiņu izmēri ir 1dmx1dm, vienas rūtiņas trīs virsotnēs atrodas 3 sienāži. Viņi rotaļādamies lec pāri viens otram. Ja sienāzis A lec pāri sienāzim B, tad pēc lēciena A ir tādā pašā attālumā no B kā pirms lēciena un atrodas uz vienas taisnes ar sienāzi B un savu iepriekšējo pozīciju.
Vai kāds no sienāžiem var nokļūt sākotnējās rūtiņas ceturtajā virsotnē?

1.1.-25. Ar naturālu skaitli drīkst izdarīt šādas operācijas: pieskaitīt skaitlim tā ciparu summu vai arī atņemt no skaitļa tā ciparu summu.
Vai, izmantojot tikai šīs operācijas, no skaitļa 41 ir iespējams iegūt skaitli 9?

1.1.-26. Pa apli ir iestādīti 44 koki, tajos sēž 44 putni, katrā kokā pa vienam putnam. Laiku pa laikam kādi 2 putni vienlaikus pārlido uz blakus kokiem pretējos virzienos (viens- pulksteņa rādītāja kustības virzienā, otrs- pretējā).
Vai visi putni var vienlaicīgi nokļūt vienā kokā?

1.1. NODAĻAS UZDEVUMU ATRISINĀJUMI.

1.1.-1. Visu doto skaitļu summa ir nepāra skaitlis: 1+2+3+...+10=5x11=55.
Katrā gājienā pieskaitot pa vieniniekam diviem skaitļiem, šo abu skaitļu summa palielinās par 2, tātad arī visu skaitļu summa palielinās par 2, t.i., par pāra skaitli.
Ja sākotnējai skaitļu summai, t.i., nepāra skaitlim, pieskaita 2 (pāra skaitli), tad iegūst nepāra skaitli.
Tā kā jāiegūst 10 vienādi skaitļi, tad summai ir jābūt pāra skaitlim, bet tas nav iespējams, tātad nevar panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi.
<u>INVARIANTS</u>- skaitļu summa ir nepāra skaitlis.

1.1.-2. Aplūkojot vienalga kurus divus skaitļus un pielietojot šo operāciju, visu uzrakstīto skaitļu summa palielināsies par 2. Tā kā sākumā doto skaitļu summa ir vienāda ar 1, tad visu skaitļu summa vienmēr paliks nepāra skaitlis.
Ja ir jāiegūst četri vienādi skaitļi, tad to kopējai summai, acīmredzot, ir jābūt pāra skaitlim. Tātad panākt to, lai visi skaitļi kļūtu vienādi, nebūs iespējams.
<u>INVARIANTS</u>- skaitļu summa ir nepāra skaitlis.

1.1.-3. Visu doto skaitļu summa ir nepāra skaitlis:

$$1+2+3+...+1993=\frac{1994\times1993}{2}=997\times1993.$$

Pierādīsim:
ja tiek nodzēsti jebkuri divi skaitļi un to vietā ir uzrakstīta šo skaitļu starpība, tad uzrakstīto skaitļu summa pamazināsies par pāra skaitli.
Šeit var aplūkot 3 gadījumus atkarībā no nodzēsto skaitļu paritātes:
a) <u>(pāra; pāra</u>), tad gan summa, gan starpība ir pāra skaitlis, tātad šo skaitļu summas un starpības starpība arī ir pāra skaitlis;
b) <u>(nepāra; nepāra</u>), tad gan summa, gan starpība ir pāra skaitlis, tātad šo skaitļu summas un starpības starpība arī ir pāra skaitlis;
c) <u>(pāra; nepāra</u>), tad gan summa, gan starpība ir nepāra skaitlis, tātad šo skaitļu summas un starpības starpība ir pāra skaitlis.
Tātad skaitlis nevarēs būt vienāds ar 0.
<u>INVARIANTS</u>- skaitļu summa ir nepāra skaitlis.

1.1.-4. Uz tāfeles ir uzrakstīti 999 pāra un 999 nepāra skaitļi, jo 1998:2=999. Dzēšot jebkurus divus skaitļus, aplūkosim šādas divas iespējas:
a) ja abiem skaitļiem ir <u>viena un tā pati paritāte</u>, tad to starpība arī ir pāra skaitlis, t.n., ka, nodzēšot divus pāra skaitļus, to vietā ierakstām pāra skaitli, un nodzēšot divus nepāra skaitļus, to vietā ierakstām pāra skaitli. Tātad nepāra skaitļu skaits pamazinās par divi,, līdz ar to nepāra skaitļu skaita paritāte nemainās;
b) ja diviem skaitļiem ir <u>dažāda paritāte</u>, tad šo skaitļu starpība ir nepāra skaitlis, t.n., ka, nodzēšot divus dažādas paritātes skaitļus, to vietā tiek ierakstīts nepāra skaitlis, tātad nepāra skaitļu skaita paritāte nemainās.
<u>Secinām</u>, ka pēc katras operācijas nepāra skaitļu skaits saglabājas vai arī pamazinās par divi.

Sākumā uz tāfeles uzrakstīti 999 nepāra skaitļi, pēc katras šādas operācijas uz tāfeles paliks nepāra skaits nepāra skaitļu, tāpēc beigās uz tāfeles paliks viens nepāra skaitlis.
INVARIANTS- nepāra skaitļu skaits ir nepāra skaitlis.

1.1.-5. Pieņemsim, ka pareizi ir novietoti tie cilindri, kuriem ir sarkani augšējie pamati, bet nepareizi novietoti tie cilindri, kuriem ir zili augšējie pamati.
Analizēsim sīkāk cilindru novietojumu pēc pirmā gājiena:
a) ja visi četri sākumā apgrieztie cilindri bija novietoti pareizi, tad pareizi stāvošo cilindru skaits pamazinās par 4;
b) ja pareizi stāvēja tikai trīs cilindri, tad pareizi stāvošo cilindru skaits pamazinās par 2,t.i., pareizi stāvēja trīs cilindri, bet pēc apgriešanas pareizi būs novietots tikai viens no četriem, tātad pareizi stāvošo cilindru skaits pamazinās par 2 (3-1=2);
c) ja pareizi stāvēja tikai divi cilindri, tad pareizi stāvošo cilindru skaits neizmainās, jo 2-2=0;
d) ja pareizi stāvēja tikai viens cilindrs, tad pareizi stāvošo cilindru skaits palielinās par 2, t.i., pareizi stāvēja viens, bet pēc apgriešanas pareizi stāvēs - trīs, tātad pareizi stāvošo cilindru skaits izmainīsies par 2 (3-1=2).
e) ja pareizi nestāvēja neviens cilindrs, tad pareizi stāvošo cilindru skaits palielinās par 4.
Secinām, ka pareizi novietoto cilindru skaits pēc katra gājiena vai nu paliek iepriekšējais, vai izmainās par pāra skaitli. Tā kā sākumā pareizi ir novietoti 15 cilindri, tad pēc katra gājiena pareizi novietoto cilindru skaits būs nepāra skaitlis.
Tātad nevarēs panākt, lai visi 16 cilindri būtu novietoti pareizi.
INVARIANTS - pareizi novietoto cilindru skaits ir nepāra skaitlis.

1.1.-6. Piešķirsim rindas katrai monētai "svaru" pēc šāda principa:
- pirmajai monētai svars ir 1,
- otrajai monētai svars ir 2,
- trešajai monētai svars ir 3,
- ceturtajai monētai svars ir 1,
- piektajai monētai svars ir 2, utt.,...

Apzīmēsim:
ar □-monētas, kurām ir cipars uz augšu;
ar ○- monētas, kurām ir ģerbonis uz augšu;
ar S apzīmējam to monētu svaru summu, kas atrodas ar ciparu uz augšu.
Izpētīsim, kā var izmainīties S vērtības, apgriežot trīs blakus novietotas monētas.
Jebkuru 3 vienā gājienā apgriežamo monētu svaru summa ir 6 (skat. 11.zīm.). Ja tiek apgrieztas 3 monētas un no tām sākumā ar cipariem uz augšu esošo monētu svaru summa ir *a*, tad pēc gājiena no tām ar ciparu uz augšu esošo monētu svaru summa ir 6-*a*; tātad šī gājiena rezultātā S mainās par *a*-(6-*a*)=2*a*-6, t.i., par pāra skaitli.

1 2 3	2 3 1	3 1 2
○○○	○○○	○○○

11.zīm.

Tā kā sākumā S=1, tad S vienmēr paliek nepāra skaitlis. Tātad nevar būt, ka S=0. Tātad nevarēs panākt, lai visas monētas būtu ar ģerboni uz augšu.
INVARIANTS- ar ciparu uz augšu esošo monētu kopējais svars ir nepāra skaitlis.

1.1.-7. Nokrāsosim skaitļu pozīcijas pēc kārtas periodiski: balta, sarkana, zaļa; balta, sarkana, zaļa;... Katrā krāsā būs nokrāsotas 665 pozīcijas, jo 1995:3=665. Pēc katra gājiena sarkano vieninieku skaits, balto vieninieku skaits un zaļo vieninieku skaits maina paritāti, jo katrs gājiens skar tieši vienu katras krāsas pozīciju.

Pieņemsim, ka sākumā vienīgais vieninieks ir sarkans. Tad sākumā sarkano vieninieku skaita paritāte atšķiras no balto vieninieku skaita paritātes; tā kā tās mainās vienlaicīgi, tad tās nevar kļūt vienādas. Bet, ja vieninieki vispār no apļa pazustu, tad šīm paritātēm būtu jābūt vienādām (gan sarkano, gan balto vieninieku skaits būtu pāra skaitlis 0).

<u>INVARIANTS</u>- sarkano un balto vieninieku skaitu paritātes ir dažādas.

1.1.-8. Slēdža stāvokli var mainīt jebkurām 26 spuldzītēm, t.i., dažas no tām tiek ieslēgtas, bet dažas - izslēgtas.

Apzīmēsim ar x kādā gājienā ieslēgto spuldžu skaitu.

Analizēsim sīkāk, kādas vērtības var pieņemt x :

a) <u>x=2n</u>, t.i.,<u> pāra skaitlis</u>; tad 26-x=26-2n=2(13-n).

Ja tiek ieslēgts pāra skaits spuldžu, tad arī izslēgts tiek pāra skaits spuldžu, tātad kopējais ieslēgto spuldžu skaits mainās par pāra skaitli.

b)<u> x=2n+1,</u> t.i.,<u> nepāra skaitlis</u>; tad 26-x=26- (2n+1)= 26-2n-1=25-2n.

Ja tiek ieslēgts nepāra skaits spuldžu, tad arī izslēgts tiek nepāra skaits spuldžu, tātad ieslēgto spuldžu skaits mainās par pāra skaitli.

Tā kā ieslēgto spuldžu skaits sākumā ir nepāra skaitlis, tad tas visu laiku paliek nepāra skaitlis.

Lai visas spuldzes būtu izslēgtas, šim skaitam jākļūst vienādam ar 0. Tas nav iespējams.

INVARIANTS- ieslēgto spuldžu skaits ir nepāra skaitlis.

1.1.-9. Ja profesors uzbur un ieliek diplomātā X “chewitus” un 96-X “Flinstonus”, tad to vietā viņš atkal uzbur 96-X “chewitus” un X “Flinstonus”. Tātad “chewitu”skaits mainās par (96-X)-X=96-2X= 2(48-x),t.i., par pāra skaitli.

Tā kā sākumā ir 1997 “chewiti” un katru reizi “chewitu” skaits mainās par pāra skaitli, tad “chewitu”skaits vienmēr ir nepāra skaitlis, tātad nevar kļūt vienāds ar nulli.

INVARIANTS- “chewitu” skaits ir nepāra skaitlis.

1.1.-10. Sākumā starpība starp zēnu un meiteņu skaitu ir 4 t.i., (11-7=4). Slēdzot līgumu ar deju grupu “Venēra”, starpība mainās par 4,t.i.,8-4=4 ,bet slēdzot līgumu ar deju grupu “Marss”, starpība mainās par 2, t.i., 5-3=2. Šī starpība sākumā ir pāra skaitlis un mainās par pāra skaitli, tātad visos gadījumos paliek pāra skaitlis. Bet jaunas dejas iestudēšanai ir nepieciešamas 15 meitenes un 10 zēni. Šo skaitļu starpība ir 5 t.i., 15-10=5, tātad nepāra skaitlis, tāpēc iecerēto deju nevarēs iestudēt.

<u>INVARIANTS</u>- starpība starp zēnu un meiteņu skaitu grupā “Zeltene” ir pāra skaitlis.

1.1.-11. Veicot katru no pieļaujamajām operācijām, burtu V skaits virknē vai nu nemainās, vai mainās par 2. Sākotnējā virknē ir četri burti V, tātad beigu virknē nevar iegūt trīs burtus V.

<u>INVARIANTS</u>- burtu V skaits vienmēr ir pāra skaitlis.

1.1.-12. Sadalīsim skaitļus 24 un 108 pirmreizinātājos: $24=2^3x3^1$ un $108=2^2\times3^3$. Ik pēc minūtes skaitlī ietilpstošo pirmreizinātāju daudzuma paritāte mainās. Tāpēc pēc 60 min. tā būs tāda pati kā sākumā - pāra skaitlis. Bet 108 satur 5 pirmreizinātājus. Tātad 108 prasītajā veidā iegūt nevar.
<u>INVARIANTS</u>- ik pēc 2 minūtēm skaitlī ietilpstošo pirmreizinātāju daudzums ir pāra skaitlis.

1.1.-13. Visi skaitļi, kas uzrakstīti regulārā 6-stūra virsotnēs, sākumā ir nepāra skaitļi. Izpildot ar nepāra skaitļiem gan pirmo, gan otro operāciju, 6-stūra virsotnē atkal iegūst nepāra skaitli. Tātad visi skaitļi vienmēr paliek nepāra. Bet skaitlis 1996 ir pāra skaitlis, tātad skaitli 1996 iegūt nevarēs.
<u>INVARIANTS</u>- visi skaitļi paliek nepāra.

1.1.-14. Sanumurēsim sektorus ar skaitļiem no 1 līdz 14 pēc kārtas tā, ka 1 sant. monēta atrodas pirmajā sektorā, bet 2 sant. monēta- otrajā sektorā. Viegli pārbaudīt, ka monēta, kas sākumā bijusi sektorā ar nepāra numuru, "ceļo" tikai pa sektoriem ar nepāra numuriem. Tāpēc uzdevumā minētais nevar notikt.
<u>INVARIANTS</u>- 1 sant. monēta vienmēr atrodas sektorā ar nepāra numuru.

1.1.-15. a) sadalīsim visas12 virsotnes 6 pāros (pretējās virsotnēs):A_1A_7; A_2A_8; A_3A_9; A_4A_{10}; A_5A_{11}; A_6A_{12}. Veicot operāciju , katrā pārī tiks mainīta zīme tikai vienā virsotnē. Tātad pāros A_2A_8; A_3A_9;... A_6A_{12} pēc 2k-1 operācijām būs dažādas zīmes, bet pēc 2k operācijām būs vienādas zīmes; pārī A_1A_7 būs otrādi. Tātad nevarēs iegūt, lai pārī A_2A_8 zīmes būtu dažādas, bet pārī A_3A_9 - vienādas.
b)sadalīsim visas virsotnes 4 grupās pa trim virsotnēm katrā grupā:

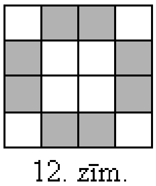
$A_1A_5A_9$;
$A_2A_6A_{10}$;
$A_3A_7A_{11}$;
$A_4A_8A_{12}$.

Atkal spriedīsim tāpat. "Plus" un "mīnus" zīmju skaitu paritātes katrā grupā mainās, veicot katru operāciju, tāpēc grupās $A_2A_6A_{10}$ un $A_3A_7A_{11}$ tām jābūt vienādām.
c)Sadalīsim 12-stūra virsotnes 3 grupās, pa četrām virsotnēm katrā grupā:

$A_1A_4A_7A_{10}$;
$A_2A_5A_8A_{11}$;
$A_3A_6A_9A_{12}$

un spriežam līdzīgi kā iepriekš.

1.1.-16. Kvadrātu iekrāsosim tā, lai katrā rindā un katrā kolonnā būtu iekrāsotas divas rūtiņas. Kvadrātā būs iekrāsotas 8 rūtiņas, bet katra rinda, kolonna vai diagonāle satur pāra skaitu iekrāsoto rūtiņu.


12. zīm.

Ar katru gājienu “-” zīmju skaits iekrāsotajās rūtiņās mainās par pāra skaitli, bet sākumā “-” zīmju skaits tur bija nepāra skaitlis. Tātad visās iekrāsotajās rūtiņās neizdosies iegūt vienlaicīgi “+ “ zīmes.
<u>INVARIANTS</u>- “-” zīmju skaits iekrāsotajās rūtiņās ir nepāra skaitlis.

1.1.-17. Kvadrātā, kura izmēri ir 8×8 rūtiņas, tiek izvietotas sešas rūtiņu grupas, līdzīgas tai, kādu izmantoja iepriekšējā uzdevuma risināšanā. Vienas grupas rūtiņas apzīmētas ar vienādiem burtiem. Dažādām grupām nav kopīgu rūtiņu (skat. 13.zīm.).

	A	A	E	E	B	B	
A		E	A	B	E		B
A		E	A	B	E		B
	A	A	E	E	B	B	
	D	D	F	F	C	C	
D		F	D	C	F		C
D		F	D	C	F		C
	D	D	F	F	C	C	

13.zīm.

Katrā rūtiņu grupā vienā rūtiņā ierakstīsim “-” zīmi, bet pārējās rūtiņās - “+” zīmes. Tad, spriežot līdzīgi kā iepriekšējā uzdevumā, konstatēsim, ka katrā grupā vismaz viena “-” zīme noteikti saglabāsies. Tā kā ir sešas šādas rūtiņu grupas, tad tabulā noteikti saglabāsies vismaz sešas “-” zīmes.
<u>INVARIANTS</u>- katrā astotniekā “-” zīmju skaits paliek nepāra skaitlis.

1.1.-18. Sadalīsim visus lauciņus trijās grupās A, B un C , skatīt 14. zīm.

C	A	B	C	A	B	C	A	B
B	C	A	B	C	A	B	C	A
A	B	C	A	B	C	A	B	C
C	A	B	C	A	B	C	A	B
B	C	A	B	C	A	B	C	A
A	B	C	A	B	C	A	B	C
C	A	B	C	A	B	C	A	B
B	C	A	B	C	A	B	C	A
A	B	C	A	B	C	A	B	C

14.zīm.

Sākumā katrā grupā ir 18 kauliņi , tātad - pāra skaits kauliņu. Sitot jebkuru kauliņu, divās grupās kauliņu skaits pamazinās par 1, vienā grupā- par 1 palielinās. Tātad pēc pirmā sitiena kauliņu skaits visās grupās ir nepāra skaitlis, bet pēc otrā - pāra skaitlis. utt. Tātad uz galdiņa nevar palikt tikai viens kauliņš, jo tad vienā grupā kauliņu skaits būtu nepāra skaitlis, bet divās- pāra skaitlis.
<u>INVARIANTS</u>- kauliņu skaita paritāte visās grupās visu laiku paliek vienāda.

1.1.-19. Izpētīsim uzlīmju skaita izmaiņas vienā dienā. Jānītis iemainīja 4 jaunas uzlīmes un 1 uzlīmi izmainīja, tātad uzlīmju skaits palielinājās par 4-1=3 uzlīmēm.
Sākumā Jānītim bija 3 uzlīmes, tātad uzlīmju skaits vienmēr dalās ar 3. Bet 113 ar 3 nedalās, tātad tieši 113 uzlīmes Jānītim nebūs nekad.
<u>INVARIANTS</u>- uzlīmju skaits dalās ar 3.

1.1.-20. Sadalīsim kvadrāta 10×10 rūtiņas trīs grupās: A, B un C, līdzīgi kā 14.zīm. A grupā būs 34 rūtiņas, B grupā- 33 rūtiņas un C grupā- 33 rūtiņas.

Tā kā lauva veic noslēgtu maršrutu, tad sākumā tā var atrasties jebkuras grupas rūtiņā. Pieņemsim, ka figūra atrodas B rūtiņā. Izpētīsim, kā notiek figūras pārvietošanās pa rūtiņām:

pēc 1. gājiena- $B\rightarrow C$,
pēc 2. gājiena- $C\rightarrow A$,
pēc 3. gājiena- $A\rightarrow B$, utt.

Pēc katriem trim gājieniem figūra atkal atgriežas grupas B rūtiņā. Kad tāda pārvietošanās (C; A; B); (C; A; B); ... notikusi 33 reizes, figūra būs apstaigājusi $33\times3=99$ rūtiņas un atradīsies B rūtiņā.

Pēc uzdevuma nosacījumiem figūrai ar pēdējo, simto gājienu jānonāk sākotnējā rūtiņā. Tas nav iespējams, jo figūra jau atrodas B grupas rūtiņā un ar pēdējo gājienu nonāks C grupas rūtiņā..

<u>INVARIANTS</u>- ik pēc trim gājieniem figūra atrodas B grupas rūtiņā.

1.1.-21. Izpētot pieļaujamās operācijas, kuras varam veikt ar grupām, redzam, ka starpība starp ○ un □ skaitu virknē mainās par skaitļa 3 daudzkārtni.

Apskatīsim <u>sākotnējo virkni</u>: ○ □ ○ □ ○ □. Šajā virknē starpība starp ○ un □ skaitu ir 0, tātad dalās ar 3.

Tātad starpība starp kvadrātu un apļu skaitu vienmēr dalās ar 3.

Apskatīsim <u>beigu virkni</u>: ○ ○ □ □ ○ □ ○. Šajā virknē starpība starp ○ un □ skaitu ir 1. Tātad no sākotnējās virknes nevar iegūt beigu virkni, jo tajā starpība nav skaitļa 3 daudzkārtnis.

<u>INVARIANTS</u>- starpība starp figūru ○ un □ skaitu ir skaitļa 3 daudzkārtnis.

1.1.-22. Izpētām abus skaitļus 21 un 3001.

Skaitlim 21 izpildās īpašība "dalās ar 3", bet skaitlim 3001 šī īpašība neizpildās.

Pierādīsim: <u>ja kāds skaitlis dalās ar 3, tad skaitlis, kas no tā tiek iegūts, ar pieļaujamajām operācijām, arī dalās ar 3.</u>

Analizēsim pieļaujamās operācijas uz " dalāmību ar 3":

a) ja skaitlis n dalās ar 3, tad arī n+6 dalās ar 3 (ja katrs saskaitāmais dalās ar 3, tad arī summa dalās ar 3);

b) ja skaitlis n dalās ar 3, tad arī pāra skaitlis 2n dalās ar 3;

c) trešais apgalvojums izriet no dalāmības pazīmes ar 3 (ja skaitlis n dalās ar 3, tad arī tā ciparu summa dalās ar 3, bet summa nemainās, ja maina saskaitāmo kārtību).

Tātad pēc pieļaujamo operāciju izpildes arī jauniegūtais skaitlis dalīsies ar 3, jo dotais skaitlis dalās ar 3.

Skaitlis 3001 ar 3 nedalās, tātad ar pieļaujamajām operācijām skaitli 3001 iegūt nevarēs.

<u>INVARIANTS</u>- iegūstamais skaitlis dalās ar skaitli 3.

1.1.-23. Sākumā ir dotas 63 "+" zīmes un 1 "-" zīme, tātad starpība starp "+" zīmju skaitu un "-" zīmju skaitu ir 62, bet skaitlis 62 nedalās ar 4.

Aplūkosim, kā mainās šī starpība, ja vienā rindā vai vienā kolonnā zīmes tiek mainītas uz pretējām.

Pieņemsim, ka rindā vai kolonnā ir x "-" zīmes un (8-x) "+" zīmes, tātad vienā rindā (vai kolonnā) zīmju starpība ir (8-x)-x=8-2x. Pēc zīmju maiņas šī starpība ir x- (8-x)=2x-8. Tātad starpība ir mainījusies par

$$(2x-8)-(8-2x)=2x-8-8+2x=4x-16,$$

t.i., par skaitli, kas dalās ar 4.

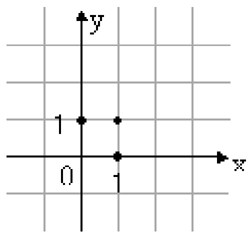
Ja maina zīmes tikai vienas rindas (vai kolonnas) robežās, tad aplūkojamā starpība nav mainījusies pārējā šaha galdiņa daļā, tātad starpība starp "+" zīmju skaitu un "-" zīmju skaitu visā šaha galdiņā ir mainījusies par lielumu, kas dalās ar 4.

Ja šaha galdiņa visās rūtiņās būtu "+"zīme, tad starpības vērtība būtu 64, t.i., tā dalītos ar 4.

Tā kā sākumā starpības vērtība ir 62 un tā mainās tikai par skaitļa 4 daudzkārtni, tad tā nevar kļūt vienāda ar 64, tātad nebūs iespējams visās rūtiņās iegūt "+" zīmes.

<u>INVARIANTS</u>- starpība starp "+" un "-" zīmju skaitu nedalās ar 4.

1.1.-24. Novilksim koordinātu asis tā, lai sākumpunkts atrastos rūtiņas tajā virsotnē, kurā nesēž sienāzis. Tad vienam no sienāžiem jānokļūst punktā, kurā koordinātas ir (0;0).



15.zīm.

Sienāžu koordinātas sākumā ir (0;1), (1;0), (1;1). Sienāžu koordinātu starpības ir veseli skaitļi. Ja sienāzis A lec pāri sienāzim B, tad pēc lēciena sienāzis A ir uz vienas taisnes ar sienāzi B un savu iepriekšējo stāvokli un tādā pašā attālumā no B, kā pirms lēciena. Tāpēc sienāža A katra koordināte ir izmainījusies par skaitli, kas ir B un A sākotnējā stāvokļa atbilstošo koordinātu divkāršota starpība. Tā kā koordinātu starpības ir veseli skaitļi, tad abas koordinātas izmainās par pāra skaitļiem.

Katram sienāzim vismaz viena koordināta sākumā ir nepāra skaitlis, tātad punktā (0;0) neviens sienāzis nenokļūs.

<u>INVARIANTS</u>- katram sienāzim visu laiku vismaz viena koordināta ir nepāra skaitlis.

1.1.-25. Atlikums, ko iegūst, dalot naturālu skaitli ar 9, ir vienāds ar atlikumu, ko iegūst, dalot ar 9 šī skaitļa ciparu summu. Tāpēc naturāla skaitļa un tā ciparu summas starpība noteikti dalīsies ar 9. Kaut vienu reizi izpildot atņemšanu, visi tālākie virknes skaitļi dalīsies ar 9. Tā kā 91 nedalās ar 9, tad iegūt 91 varēs tikai tad, ja skaitlim visu laiku pieskaita ciparu summu. Tātad skaitļi pārveidosies šādi:

$41 \rightarrow 46 \rightarrow 56 \rightarrow 67 \rightarrow 80 \rightarrow 88 \rightarrow 104 \rightarrow ...$ Visi nākošie skaitļi ir lielāki nekā 91, tātad skaitli 91 nevarēs iegūt.

<u>INVARIANTS</u>- pēc pirmās atņemšanas visi iegūtie skaitļi dalās ar 9.

1.1.-26. Putnu skaitu, kas kaut kādā laika momentā atrodas kokos, apzīmēsim šādi:

n_1 ----- uz 1. koka,

n_2 ----- uz 2. koka,

n_3 ----- uz 3. koka,

n_4 ----- uz 4. koka,

--------------- utt.,

n_{44} -------- uz 44.koka.

Apskatīsim summu $S=1\times n_1+2\times n_2+3\times n_3+...+44\times n_{44}$. Sākumā šīs summas vērtība ir $1+2+...+44=44\times 22+22$. Dalot ar 44, tā dod atlikumu 22.

Kad divi putni pārlido uz blakus kokiem, tikai pretējos virzienos, tad šī summa vai nu nemainās, vai arī izmainās par 44 (izpētiet to paši, šķirojot gadījumus, kad kāds no putniem šķērso vai nešķērso robežu starp 1. un 44. koku). Tāpēc atlikums ko iegūst, kad S dalām ar 44, nemainās, t.i., paliek 22.

Bet, ja kādā laika momentā visi putni salasītos vienā kokā, tad summai S jādalās ar 44 bez atlikuma. Bet kā redzam, tas nav iespējams.

<u>INVARIANTS</u>- summa S, dalot ar 44,dod atlikumu 22.

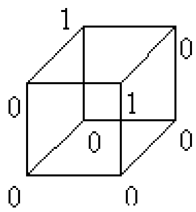
1.2.NODAĻA. ALGEBRISKIE INVARIANTI.

1.2.1. INVARIANTS- SUMMA, ELEMENTU SKAITS VAI STARPĪBA.

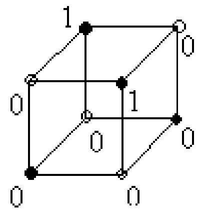
15.UZDEVUMS.

Dots kubs, kura sešās virsotnēs ierakstītas nulles, bet divās virsotnēs- vieninieki (skat. 16. un 17. zīm.). Vienā gājienā atļauts izraudzīties jebkuru kuba šķautni un tās abos galos pierakstītajiem skaitļiem pieskaitīt skaitli 1.

Vai eksistē tāda gājienu sērija, pēc kuras visās kuba virsotnēs ir ierakstīti vienādi skaitļi?



16.zīm.



17.zīm.

ATRISINĀJUMS.

Vispirms izkrāsosim 4 kuba virsotnes, kā parādīts 17.zīmējumā. Izkrāsotajās virsotnēs ierakstīto skaitļu summa ir 2, bet neizkrāsotajās virsotnēs ierakstīto skaitļu summa ir 0. Starpība starp šīm summām ir vienāda ar 2. Katra šķautne satur vienu izkrāsoto un vienu neizkrāsoto virsotni. Izdarot uzdevumā norādīto pieskaitīšanu, vienlaikus palielinām gan melnajās, gan baltajās virsotnēs ierakstīto skaitļu summu par 1, tāpēc šo virsotņu summu starpība nemainās, tātad tā vienmēr ir vienāda ar 2. Lai visās virsotnēs ierakstītie skaitļi kļūtu vienādi, šai starpībai ir jākļūst vienādai ar 0, bet tas nav iespējams.

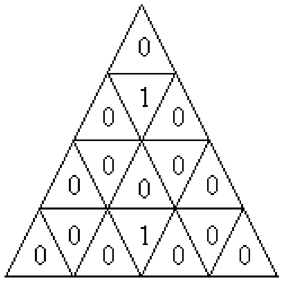
Uzdevums atrisināts.

<u>INVARIANTS</u>- starpība starp iekrāsotajās un neiekrāsotajās virsotnēs ierakstīto skaitļu summu ir konstants lielums, t.i., 2.

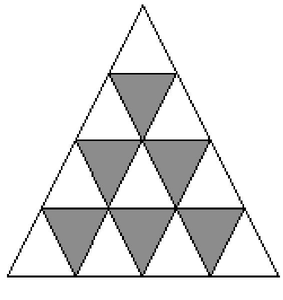
16.UZDEVUMS.

Ar vienu gājienu atļauts diviem trijstūrīšiem, kam ir kopīga mala, pieskaitīt pa vieniniekam, skat. 18 .zīm.

Vai , daudzkārt atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai visos trijstūrīšos būtu ierakstīti vienādi skaitļi?



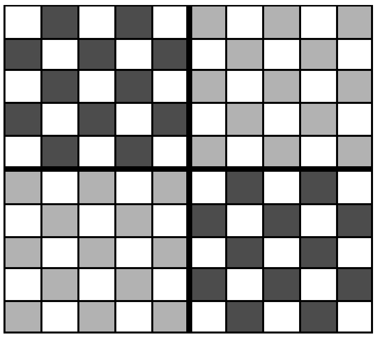
18.zīm.



19.zīm.

ATRISINĀJUMS.
Izkrāsojam trijstūrīšus, kā parādīts 19.zīm. Melnajos trijstūrīšos ierakstīto skaitļu summa ir 2, bet baltajos tā ir 0. Starpība starp šīm summām ir 2. Ar katru gājienu melnajos un baltajos trijstūrīšos ierakstīto skaitļu summa palielinās par 1, tāpēc šīs summas nekad nekļūst vienādas. Tāpēc visās rūtiņās vienādus skaitļus ierakstīt nevarēsim.
Uzdevums atrisināts.
INVARIANTS- starpība starp melnajos un baltajos trijstūrīšos ierakstīto skaitļu summu ir 2.

17.UZDEVUMS.
Uz galdiņa, kura izmēri ir 10×10 rūtiņas, Pifs izvietoja 50 krūzītes: 25- kreisajā apakšējā galdiņa ceturtdaļā un 25- labējā augšējā galdiņa ceturtdaļā. Ir atļauts vienā gājienā krūzīti pārlikt pāri par blakus esošai krūzītei- uz blakus lauciņu (gan horizontāli, gan vertikāli, gan pa diagonāli), ja šis lauciņš ir brīvs.
Vai pēc vairākiem gājieniem visas krūzītes varēs atrasties vienā galdiņa pusē?
ATRISINĀJUMS.
Vispirms izkrāsosim galdiņu šaha galdiņa secībā tādā veidā , lai sākuma pozīcijā 26 krūzītes atrastos uz melniem lauciņiem un 24 krūzītes uz baltiem lauciņiem: 13+13=26 un 12+12=24 (skat. 20.zīm.)


20.zīm.

Katrā gājienā ir atļauts pārcelt krūzīti pāri vienam lauciņam , tātad krūzīte atkal nonāk uz tās pašas krāsas lauciņa, uz kāda tā atradusies pirms gājiena). Ja pēc vairākiem šādiem gājieniem krūzītes atrastos galdiņa vienā pusē, tad tur jābūt 26 melniem lauciņiem un 24 baltiem lauciņiem, bet galdiņa vienā pusē ir 25 melni lauciņi un 25 balti lauciņi. Krūzītes no 26 melniem lauciņiem nevar novietot uz 25 melniem lauciņiem, tātad prasītā pārvietošana nav iespējama.
Uzdevums atrisināts.
INVARIANTS- krūzīšu skaits vienas krāsas rūtiņās ir nemainīgs.

18. UZDEVUMS.

Tabulas 3×3 rūtiņās ierakstītas nulles. Atļauts tajā izvēlēties kvadrātu ar izmēriem 2×2 rūtiņas un palielināt par 1 visus tajā ievietotos skaitļus.

Pierādīt, ka pēc vairākām šādām operācijām nevarēs iegūt tabulu:

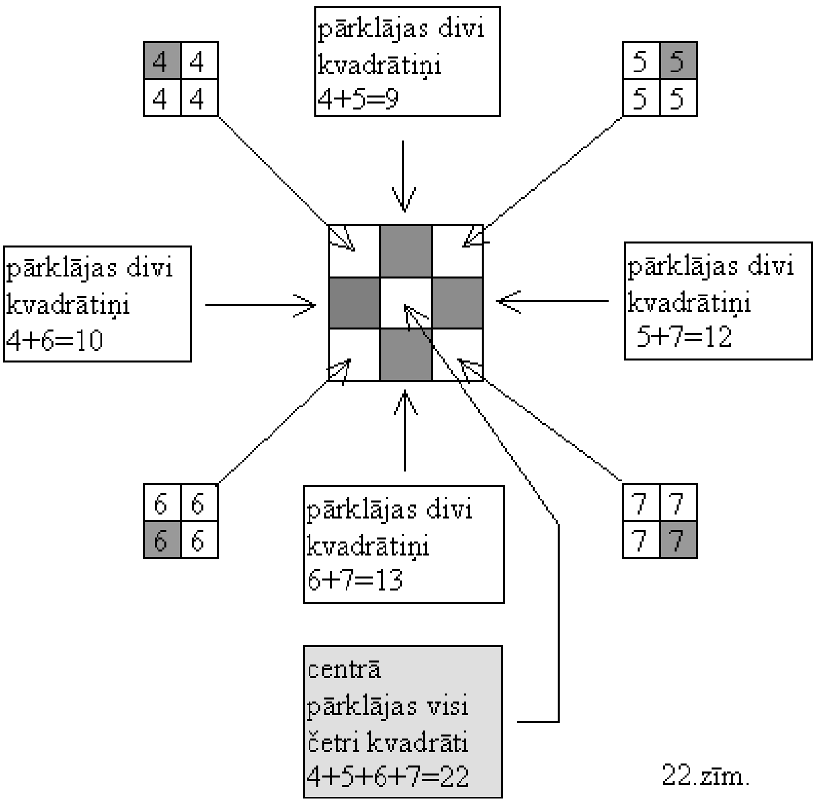
4	9	5
10	18	12
6	13	7

21.zīm.

PIERĀDĪJUMS.

Izpētīsim, kā ir veidota gala rezultātā iegūtā tabula. Redzam, ka kvadrātā 2×2, kurš atrodas kreisajā augšējā stūrī, visi skaitļi palielināti par 1 četras reizes, jo pašā stūrī atrodas skaitlis 4. Labajā augšējā stūrī atrodas skaitlis 5, tātad atbilstošajā kvadrātā 2×2 visus skaitļus palielina par 1 piecas reizes, bet apakšējos kvadrātos- attiecīgi 6 un 7 reizes.

Apskatīsim 22.zīm., kā tiek aizpildīts kvadrāts 3×3 rūtiņas, ar mazajiem kvadrātiņiem 2×2 rūtiņas.



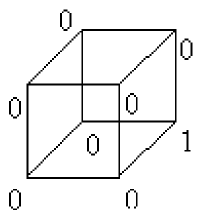
22.zīm.

No šejienes redzam: par cik palielinās stūra rūtiņās ierakstīto skaitļu summa S, par tik palielinās arī centrālajā rūtiņā ierakstītais skaitlis c. Tātad lielums (S-c) ir nemainīgs. Sākumā S-c =0. Tātad tas nevar kļūt 4, kā būtu jābūt, lai iegūtu 21.zīm. redzamo tabulu.

INVARIANTS- starpība starp stūra rūtiņās esošo skaitļu summu un centrālajā rūtiņā esošo skaitli nemainās.

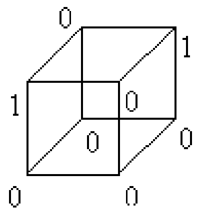
UZDEVUMI PATSTĀVĪGAI RISINĀŠANAI.

1.2.-27. Kuba katrā virsotnē ir ierakstīts skaitlis. Vienā gājienā atļauts diviem skaitļiem, kas ir izvietoti uz vienas šķautnes, pieskaitīt pa vieniniekam.
 Vai var, veicot šādas operācijas, iegūt vienādus skaitļus visās kuba virsotnēs, ja sākumā dotie skaitļi ir izvietoti tā, kā parādīts 23. un 24.zīm.?



a)

23.zīm.

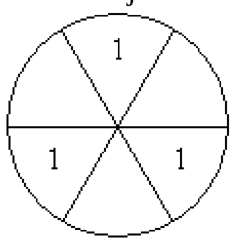


b)

24.zīm.

1.2.-28. Dots kubs, kura četrās virsotnēs, kas neatrodas blakus, ir ierakstīti vieninieki, bet pārējās četrās- nulles. Vienā gājienā atļauts izraudzīties jebkuru kuba šķautni un tās abos galos pierakstītajiem skaitļiem pieskaitīt skaitli 1.
 Vai eksistē tāda gājienu sērija, pēc kuras visās kuba virsotnēs ir ierakstīti vienādi skaitļi?

1.2.-29. Riņķis sadalīts 6 sektoros un tajos ir ierakstīti skaitļi (skat.25.zīm.).



25.zīm.

Atļauts vienlaicīgi palielināt par 1 divus blakus stāvošus skaitļus. Pierādīt, ka ar šādu operāciju palīdzību nevarēs panākt visu sešu skaitļu vienādību.

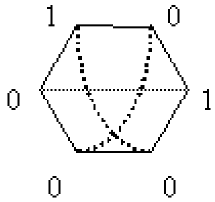
1.2.-30. Vinnijs Pūks riņķi sadalīja 6 sektoros un izvietoja tajos medus podus, kuru skaits atbilst skaitļiem 0; 0; 1; 0; 1; 0. Vienā gājienā atļauts palielināt par 1 medus podu skaitu sektoros, kuri atrodas blakus.
 Vai var panākt, lai pēc vairākiem gājieniem visos sektoros būtu vienāds skaits medus podu?

1.2.-31. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Rūtiņās ierakstīti skaitļi, skat. 26.zīm. Ar vienu gājienu drīkst pieskaitīt pa vieniniekam divās rūtiņās ierakstītiem skaitļiem, kurām ir kopīga mala.
 Vai var panākt, lai visās rūtiņās skaitļi kļūtu vienādi?

0	0	1	0
0	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

26.zīm.

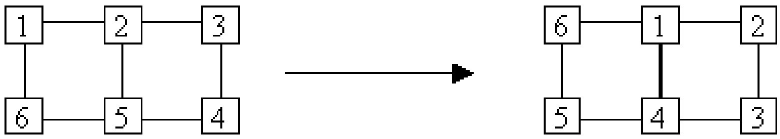
1.2.-32. Sešstūra virsotnēs ierakstīti skaitļi, skat. 27.zīm. Ar vienu gājienu var pieskaitīt pa vieniniekam vai nu abiem vienas (jebkuras) malas galapunktiem, vai divām pretējām virsotnēm. Vai, daudzkārt atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?



27.zīm.

1.2.-33. Kvadrātos ir ierakstīti skaitļi 1; 2; 3; 4; 5; 6, skat. 28.zīm. Vienā gājienā ir atļauts izvēlēties jebkuru blakus skaitļu pāri (blakus skaitļus pārī savieno nogrieznis) un pie katra skaitļa pārī pieskaitīt vienu un to pašu veselo skaitli (šis skaitlis katrā gājienā var būt cits).

Vai, veicot šādas operācijas, varēs iegūt 29.zīm. parādīto izvietojumu?



28.zīm. 29.zīm.

1.2.-34. Deviņi bandinieki ir izvietoti kvadrātā ar izmēriem 3×3 rūtiņas, kas atrodas šaha galdiņa, 8×8 rūtiņas kreisajā apakšējā stūrī. Katrs bandinieks var pārlēkt pāri tam bandiniekam, kas atrodas blakus, ja tur ir brīvs lauciņš. Lekt var gan vertikāli, gan horizontāli, gan arī pa diagonāli.

Vai var pārvietot bandiniekus citā kvadrātā ar izmēriem 3×3 rūtiņas, kas atrodas šaha galdiņa

a) kreisajā augšējā stūrī;

b) labajā augšējā stūrī?

1.2.2. INVARIANTS- REIZINĀJUMS.

19.UZDEVUMS.

Uz displeja ekrāna uzrakstītas 1997 "+" un 1996 "-" zīmes. Vienā gājienā drīkst nodzēst jebkuras divas zīmes un to vietā uzrakstīt "+" zīmi, ja nodzēstās zīmes bijušas vienādas, un "-"zīmi, ja nodzēstās zīmes bijušas dažādas.

Kāda zīme paliks uz tāfeles pēc 3992. gājiena?

ATRISINĀJUMS.

Aizstāsim katru "+" zīmi ar skaitli "+1", bet katru "-" zīmi- ar skaitli "-1". Izdarot norādītās operācijas, uz tāfeles uzrakstīto skaitļu reizinājums ir nemainīgs. Sākumā tas ir +1, jo "-1" reizinātāju skaits ir pāra skaitlis. Pēc 3992. gājiena uz tāfeles paliks tikai viens skaitlis, tāpēc tas būs skaitlis +1. Tātad uz tāfeles paliks "+" zīme.

Uzdevums atrisināts.

<u>INVARIANTS</u>- mūsu ieviesto skaitļu reizinājums paliek nemainīgs.

UZDEVUMS PATSTĀVĪGAI RISINĀŠANAI.

1.2.-35. Uz tāfeles uzrakstītas vairākas "+"un "-" zīmes. Atļauts nodzēst jebkuras divas zīmes un ierakstīt to vietā "+" zīmi, ja nodzēsa divas vienādas zīmes, bet "-" zīmi, ja nodzēsa divas dažādas zīmes.

Pierādīt, ka pēdējā palikusī zīme nav atkarīga no tā, kādā secībā nodzēš zīmes.

1.2.3. SAREŽĢĪTĀKI INVARIANTI.

20.UZDEVUMS.

Mumins uzrakstīja smiltīs skaitļus: 9; 11; 13; 15; 17; 19. Vienā gājienā var nodzēst jebkurus divus skaitļus un to vietā ierakstīt vienu skaitli, kas iegūts no nodzēsto skaitļu summas, pamazinot to par 1 (piem., ja nodzēš 11 un 19, tad ieraksta 29). Pēc vairākiem tādiem soļiem smiltīs paliks viens skaitlis.

Vai tas var būt 78?

ATRISINĀJUMS.

Ievērosim, ka pēc katra gājiena uzrakstīto skaitļu summa pamazinās par 1. Tāpēc, apzīmējot uzrakstīto skaitļu summu ar S, bet izdarīto gājienu skaitu ar n, iegūstam, ka lielums S+n nemainās, ja n palielinās par 1, tad S pamazinās par 1. Sākumā n=0 un S=84; beigās n=5 (lai skaitļu skaits pamazinātos no 6 uz 1, jāizdara 5 gājieni), tāpēc beigās S=(84+0)-5=79. Tātad iegūt beigās skaitli 78 nevar.

<u>INVARIANTS</u>- uzrakstīto skaitļu un izdarīto gājienu skaita summa nemainās.

21.UZDEVUMS.

Rindā uzrakstīti 1997 vieninieki. Atļauts nodzēst jebkurus divus uzrakstītus skaitļus a un b un to vietā uzrakstīt vienu jaunu skaitli $\frac{a+b}{4}$. *Tā turpina, kamēr paliek uzrakstīts viens skaitlis. Vai var gadīties, ka tas ir mazāks par* 0,0005 *?*

ATRISINĀJUMS.

Pieņemsim, ka tiek nodzēsti skaitļi a un b un to vietā uzrakstīts skaitlis $\frac{a+b}{4}$.

Mēs apgalvojam, ka $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{1}{\frac{a+b}{4}}$ (1).

Tiešām, veicot ekvivalentus pārveidojumus, pakāpeniski iegūstam

$$\frac{a+b}{ab}\ge\frac{4}{a+b}$$

$$(a+b)^2\ge 4ab$$

$a^2+2ab+b^2\ge 4ab$, kas ir patiesība.

$$a^2-2ab+b^2\ge 0$$

$$(a-b)^2\ge 0,$$

No nevienādības (1) seko, ka katra gājiena rezultātā visu uzrakstīto skaitļu apgriezto lielumu summa nepalielinās. Sākumā tā ir $1997\times\frac{1}{1}$=1997; tātad arī beigās tā nav lielāka par 1997. Bet, ja beigās palikušo vienīgo skaitli apzīmējam ar x, tad šī summa ir $\frac{1}{x}$; tāpēc $\frac{1}{x}\le 1997$ un $x\ge\frac{1}{1997}\rangle\frac{1}{2000}$ =0,0005. Tātad prasītais nevar notikt.

<u>INVARIANTS</u>- visu ierakstīto skaitļu apgriezto lielumu summa vienmēr lielāka vai vienāda ar 1997.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAI RISINĀŠANAI.

1.2.-36. Uz tāfeles uzzīmētas vairākas riņķa līnijas, kvadrāti un trijstūri. Vienā reizē atļauts nodzēst jebkuras divas figūras, uzzīmējot to vietā trešo pēc šāda likuma:

divu riņķa līniju vietā-------vienu riņķa līniju,
divu kvadrātu vietā -------vienu trijstūri,
divu trijstūru vietā --------vienu kvadrātu,
riņķa līnijas un kvadrāta vietā ------- vienu kvadrātu,
riņķa līnijas un trijstūra vietā ------- vienu trijstūri,
kvadrāta un trijstūra vietā ------- vienu riņķa līniju.

Pierādīt, ka figūras forma, kura paliks pēdējā, nav atkarīga no tā, kādā secībā nodzēš figūras.

1.2.-37. Doti vairāki nenulles skaitļi (ne mazāk kā divi). Atļauts nodzēst jebkurus divus skaitļus A un B un to vietā ierakstīt $A+\frac{B}{2}$ un $B-\frac{A}{2}$.

Pierādīt, ka pēc vairākām tādām operācijām, nevar vairs iegūt sākotnējos skaitļus.

1.2.-38. Piecstūra katrā virsotnē uzrakstīts skaitlis, kas mazāks par 1000, pie tam visu šo skaitļu summa ir vienāda ar 0. Katru skaitli aizvieto ar tam blakus esošo skaitļu pussummu, un šo operāciju veic 1000 reizes.

Pierādīt, ka pēc šādām operācijām katrs no skaitļiem būs mazāks par 1.

1.2.-39. Doti skaitļi: vieninieks un deviņas nulles. Vienā gājienā atļauts izvēlēties jebkurus divus skaitļus un aizstāt tos abus ar šo skaitļu vidējo aritmētisko.

Kāds vismazākais skaitlis var atrasties vieninieka vietā pēc vairākām šādām operācijām?

1.2.-40. Regulāra 25-stūra virsotnēs izvietoti skaitļi a_1, a_2, a_3,..., a_{25}, pie tam $a_1=a_2=a_3=...=a_{13}=1$, bet $a_{14}=a_{15}=...=a_{25}=-1$. Ar šiem skaitļiem veic sekojošas operācijas: katram skaitlim pieskaita tam tuvāko skaitli, kas atrodas pulksteņa rādītāju kustības virzienā. Piemēram, pie a_7 pieskaita a_8, bet pie a_{25} pieskaita a_1. Iegūtos skaitļus b_1, b_2, b_3,..., b_{25} izvieto virsotnēs skaitļu a_1, a_2, ..., a_{25} vietā tajā pašā secībā un ar tiem veic tās pašas operācijas. Šo operāciju atkārto 100 reizes.

Pierādīt, ka viens no iegūtajiem skaitļiem būs lielāks par 10^{20}.

1.2.4. PERIODISKUMS.

22.UZDEVUMS.

Bezgalīgu skaitļu virkni 1; 2; 3; 5; 8; 3; 1; 4; 5; 9; 4; 3; 7; 0; 7; 7; ... veido pēc šāda likuma: pirmie divi skaitļi ir 1 un 2, bet katrs nākošais skaitlis, sākot ar trešo, ir divu iepriekšējo skaitļu summas pēdējais cipars. Vai šajā skaitļu virknē kaut kur blakus atrodas skaitļi 2 un 4?

ATRISINĀJUMS.

Ievedīsim apzīmējumus: pāra skaitļus apzīmēsim ar **p**, bet nepāra skaitļus - ar **n**.
Skaitļu virkne veidojas šādi :n,p,n; n,p,n; n,p,n; n,p,n; ... .
Šajā virknē periodiski atkārtojas grupa **(n,p,n).** Virknē nekur blakus neatrodas divi pāra skaitļi, tātad šajā virknē nekur blakus neatradīsies skaitļi 2 un 4.
INVARIANTS- virknē periodiski atkārtojas grupa (n,p,n).

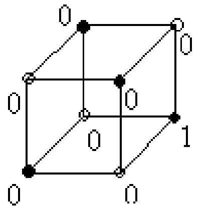
UZDEVUMI PATSTĀVĪGAI RISINĀŠANAI.

1.2.-41. Bezgalīgu skaitļu virkni 1; 1; 2; 3; 5; 8; 3; 1; 4; 5; ... veido pēc šāda likuma: pirmie divi skaitļi ir 1, bet katrs nākošais skaitlis, sākot ar trešo, ir divu iepriekšējo skaitļu summas pēdējais cipars. Vai šajā skaitļu virknē kaut kur blakus atrodas skaitļi 6 un 8?

1.2.-42. Bezgalīgu skaitļu virkni 1; 1; 2; 3; 7; 22; 155; ... veido šādi: divi pirmie tās locekļi ir 1, bet katru nākošo, sākot ar trešo, iegūst, abu iepriekšējo reizinājumam pieskaitot 1. Vai šajā virknē ir kāds skaitlis, kas dalās ar 4?

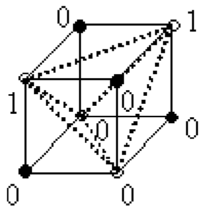
1.2. NODAĻAS UZDEVUMU ATRISINĀJUMI.

1.2.-27. Dosim divus atrisinājumus.
a) Aplūkosim visu virsotnēs ierakstīto skaitļu summu; tā ir 1 (nepāra skaitlis). Veicot norādīto operāciju, skaitļu summa katrreiz palielinās par 2, tātad visu skaitļu summa vienmēr ir nepāra skaitlis. Lai uz visām virsotnēm iegūtu vienādus skaitļus, skaitļu summai jākļūst pāra skaitlim. Tā nenotiek, tāpēc visi skaitļi nevar kļūt vienādi.



30.zīm.

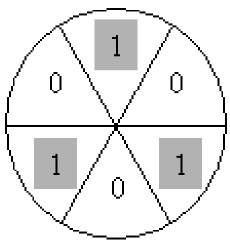
b) Tāpat iekrāsojot kuba virsotnes kā iepriekšējā uzdevuma risinājumā, iekrāsoto un neiekrāsoto virsotņu skaitļu summām jābūt
vienādām, jo katrā gājienā katra summa palielinās par 1, tātad šīs summas nekļūst vienādas.



31.zīm.

1.2.-28. Risinājums līdzīgs iepriekšējā b) uzdevuma risinājumam.

1.2.-29. Izkrāsosim sektorus: melns, balts, melns, balts,... Aprēķināsim skaitļu summu melnajos sektoros: tā ir 3, bet baltajos- tā ir 0. Starpība starp šīm summām ir 3. Ar katru gājienu ierakstīto skaitļu summa, gan melnajos, gan baltajos sektoros palielinās par 1, tātad starpība starp šīm summām atkal būs 3, un nevarēs iegūt vienādas summas. Tātad nevarēs iegūt sešus vienādus skaitļus.



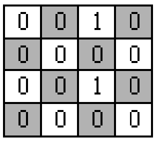
32.zīm.

<u>INVARIANTS</u>- starpība starp melnajos un baltajos sektoros ierakstīto skaitļu summu ir konstants lielums,t.i.,3.

1.2.-30. Izkrāsosim sektorus pārmaiņus: melns, balts, melns, balts,... Saskaitīsim medus podu skaitu sektoros: melnajos- tā ir 2, bet baltajos- 0. Starpība starp medus podu skaitu melnajos un baltajos sektoros ir 2. Ar katru gājienu par 1 palielinās medus podu skaits gan melnajos, gan baltajos sektoros, tātad starpība starp podu skaitu paliek 2, un nevarēs iegūt vienādu podu skaitu melnajos un baltajos sektoros.

<u>INVARIANTS</u>- starpība starp melnajos un baltajos sektoros ievietoto podu skaitu ir konstants lielums,t.i.,2.

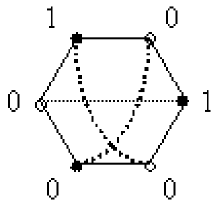
1.2.-31. Izkrāsosim rūtiņas šaha galdiņa kārtībā, skat. 33.zīm.. Melnajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 0, bet baltajās- 2. Starpība starp šīm summām ir 2. Ar katru gājienu gan melnajās, gan baltajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa palielinās par 1, tātad starpība starp šīm summām atkal būs 2.Tātad šīs summas nekļūst vienādas.



33.zīm.

<u>INVARIANTS</u>- starpība starp melnajās un baltajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summu ir konstants lielums,t.i.,2.

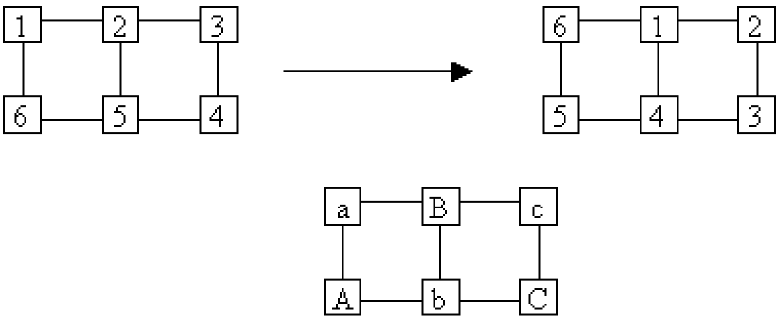
1.2.-32. Izkrāsosim 6-stūra virsotnes: melns, balts, melns, balts,... Ar katru gājienu par 1 palielinās gan melnajās, gan baltajās virsotnēs ierakstīto skaitļu summa, tātad tās abas nekad nekļūst vienādas.



34.zīm

<u>INVARIANTS</u>- starpība starp melnajās un baltajās virsotn;ēs ierakstīto skaitļu summu ir 2.

1.2.-33.



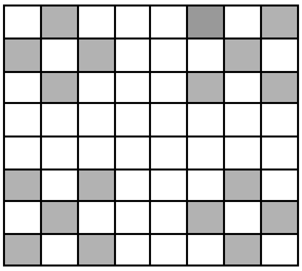
35.zīm.

Apzīmēsim skaitļus, kā parādīts 35.zīm.. Izpētīsim, kā pēc katra gājiena izmainās izteiksme S=(a+b+c)- (A+B+C), acīmredzot, tā nemainās. Uz 1.kartītes šī izteiksme ir: S_1=(1+5+3)-(6+2+4)=9-12=-3. Uz 2.kartītes šī izteiksme ir: S_2=(6+4+2)-(5+1+3)=12-9=3.

Tā kā $S_1 \neq S_2$, tad šādu pārveidojumu izdarīt nevar.

<u>INVARIANTS</u>- (a+b+c)-(A+B+C) ir konstants skaitlis.

1.2.-34. Aplūkosim sākumā doto kvadrātu 3×3 rūtiņas; tajā 5 bandinieki atrodas uz melnajiem laucinjiem un 4- uz baltajiem laucinjiem. Tā kā bandinieki pārvietojoties paliek uz tās pašas krāsas laucinjiem, tad bandinieki nevar izvietoties kreisajā augšējā 3×3 kvadrātā, jo tur ir 4 melnie un 5 baltie laucinji,skat. 36.zīm..



36.zīm.

b) Atliek vēl apskatīt labējo augšējo 3×3 rūtiņu kvadrātu. Tajā 5 bandinieki atrodas uz melnajiem laucinjiem un 4 bandinieki- uz baltajiem laucinjiem. Var likties, ka varētu bandiniekus pārvietot. ‘

Vēlreiz aplūkojot sākotnējo 3×3 rūtiņu kvadrātu, redzam, ka, skaitot no kreisās puses 6 bandinieki atrodas nepāra vertikālēs un 3- pāra vertikālēs. Bandiniekiem pārvietojoties, tie bandinieki, kas atrodas nepāra vertikālēs, tādās arī paliks, bet tie bandinieki, kas atrodas pāra vertikālēs - tādās arī paliks. Bet labējā augšējā kvadrātā ir 6 laucinji pāra vertikālēs un 3 laucinji nepāra vertikālēs, tātad bandiniekus nevarēs pārvietot uz labējo augšējo kvadrātu.

<u>INVARIANTS</u>- a) bandinieku skaits melnajos laucinjos nemainās,

b) bandinieku skaits pāra vertikālēs nemainās.

1.2.-35. Aizstāsim katru “+”zīmi ar “+1” un katru “-” zīmi ar “-1”. Tā rezultātā , veicot norādītās operācijas, visu skaitļu reizinājums nemainīsies, tāpēc pēdējais skaitlis, kas paliks uz tāfeles, nebūs atkarīgs no tā, kādā secībā nodzēsīsim skaitļus. Pēdējais skaitlis būs vienāds ar visu skaitļu reizinājumu, kuri bija doti sākumā.

<u>INVARIANTS</u>- visu skaitļu reizinājums nemainās.

1.2.-36. Viegli redzēt, ka katra gājiena rezultātā kvadrātu un trijstūru skaita starpība uz tāfeles vai nu nemainās, vai mainās par 3. Tātad šīs starpības atlikums, dalot ar 3, visu laiku paliek viens un tas pats.Ja beigās uz tāfeles paliek riņķa līnija, minētā starpība ir 0 un tās atlikums, dalot ar 3, ir 0.

Ja beigās uz tāfeles paliek kvadrāts, minētā starpība ir 1 un tās atlikums, dalot ar 3, ir 1.

Ja beigās uz tāfeles paliek trijstūris, minētā starpība ir (-1) un tās atlikums, dalot ar 3, ir 2.

Tātad to, kāda figūra paliek uz tāfeles, viennozīmīgi nosaka tas, kādu atlikumu, dalot ar 3, dod kvadrātu un trijstūru skaitu starpība uz tāfeles sākumā.

<u>INVARIANTS</u>- atlikums, dalot kvadrātu un trijstūru skaitu starpību ar 3.

1.2.-37. Izpētīsim kā pēc katras operācijas mainās visu skaitļu kvadrātu summa.
Ar n apzīmēsim izdarīto gājienu skaitu.

Ja n=1, tad skaitļu A un B vietā iegūstam skaitļus $A+\frac{B}{2}$ un $B+\frac{A}{2}$ un to kvadrātu summa būs

$$(A+\frac{B}{2})^2+(B+\frac{A}{2})^2=A^2+AB+\frac{B^2}{4}+B^2-AB+\frac{A^2}{4}=\frac{5}{4}A^2+\frac{5}{4}B^2=\frac{5}{4}(A^2+B^2).$$

Tātad visu skaitļu kvadrātu summa ir palielinājusies. Nākošajos gājienos tā nepamazinās (tā var tālāk palikt nemainīga, jo operāciju izpildes gaitā var parādīties nulles). Tātad pēc n gājieniem skaitļu kvadrātu summa būs lielāka nekā sākumā. Tāpēc sākotnējos skaitļus iegūt nevar- tad kvadrātu summa būtu tāda pati kā sākumā. INVARIANTS-pēc katras operācijas skaitļu kvadrātu summa ir lielāka nekā sākumā.

1.2.-38. Apzīmēsim skaitļus uzrakstīšanas kārtībā ar A; B; C; D; E. Saskaņā ar doto A+B+C+D+E=0.
Viegli pārbaudīt (izdarīt to patstāvīgi), ka pēc 4 gājieniem skaitļa C vietā parādīsies skaitlis $\frac{4A+B+6C+D+4E}{16}=\frac{A+B+C+D+E}{16}+\frac{3A+5C+3E}{16}=\frac{3A+5C+3E}{16}$.
Līdzīgas formulas var iegūt arī citiem skaitļiem (koeficienti nemainās, mainās tikai skaitītājā ieejošie burti).
Ja pēc moduļa (absolūtās vērtības) lielākais no skaitļiem A, B, C, D, E ir M, tad $\left|\frac{3A+5C+3E}{16}\right|\le\frac{|3A|+|5C|+|3E|}{16}=\frac{11}{16}M$. Tātad pēc 4 gājieniem visi skaitļi uz riņķa līnijas būs samazinājušies vismaz $\frac{16}{11}$ reizes.
Viegli ievērot, ka pēc katra gājiena visu uzrakstīto skaitļu summa joprojām ir 0. Tāpēc šo spriedumu var atkārtot. Gala rezultātā (tā kā 1000=250×4) iegūstam: pēc 1000 gājieniem lielākā skaitļa modulis uz riņķa līnijas būs samazinājies vismaz $\left(\frac{16}{11}\right)^{250}$ reizes. Bet $\left(\frac{16}{11}\right)^{250}\rangle\left(\frac{16}{12}\right)^{250}=\left(\frac{4}{3}\right)^{250}\rangle\left(\frac{4}{3}\right)^{249}=\left(\frac{64}{27}\right)^{83}\rangle 2^{83}\rangle 4000.$

Tā kā sākumā lielākais skaitlis pēc moduļa nevar pārsniegt 4000 (padomājiet, kāpēc), tad pēc 1000 gājieniem visi skaitļi pēc moduļa būs mazāki par 1.
Uzdevuma risinājumā izmantoti divi INVARIANTI:

1) visu skaitļu summa paliek nulle,
2) lielākais skaitļu modulis samazinās katrā gājienā vismaz $\frac{16}{11}$ reizes.

1.2.-39. Izsekosim, kā gājienu rezultātā mainās mazākais nenulles skaitlis. Apzīmēsim to ar m. Sākumā m=1.

Ja aprēķina vidējo aritmētisko skaitlim m un nullei, tad gan m, gan šīs nulles vietā raksta $\frac{m}{2}$. Tagad mazākais nenulles skaitlis ir $\frac{m}{2}$, bet nuļļu skaits samazinājies par 1.

Ja aprēķina vidējo aritmētisko mazākajam nenulles skaitlim m un kādam citam nenulles skaitlim M (tad $M \geq m$), tad gan m, gan M vietā ieraksta $\frac{m+M}{2}$; šai gadījumā mazākais nenulles skaitlis vai nu palielinās , vai paliek tāds pats (ievērosim, ka var būt arī vairāki vienādi m "eksemplāri"). Jaunas nulles šāda gājiena rezultātā nerodas.

Secinām:

1) gājienu, kuros m samazinās, nav vairāk par 9 (sākotnējais nuļļu skaits),

2) ja m samazinās, tad tas kļūst $\frac{m}{2}$.

No šejienes seko, ka m nevar kļūt mazāks par $\frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$. Lasītājs pats viegli parādīs, kā var panākt, lai sākotnējā vieninieka vietā parādītos $\frac{1}{512}$. Tātad uzdevuma atbilde ir $\frac{1}{512}$.

Tā kā vieninieka vietā vienmēr parādās kaut kāds nenulles skaitlis, tad vieninieka vietā nav mazāks skaitlis par m, tātad vieninieka vietā nevar būt mazāks skaitlis par $\frac{1}{512}$.

Uzdevuma risinājumā izmantoti vairāki INVARIANTI:

1) visi skaitļi, kas parādās pārveidojumu procesā, ir pozitīvi vai 0 (tikai tāpēc var apgalvot, ka vieninieka vietā vienmēr ir nenulles skaitlis),

2) ja mazākais nenulles skaitlis samazinās, tad tas samazinās divas reizes, un vienlaicīgi samazinās nuļļu skaits.

1.2.-40. Viegli redzēt, ka

$$\begin{aligned} & b_1 + b_2 + \dots + b_{25} = \\ & = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{24} + a_{25}) + (a_{25} + a_1) = \\ & = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{25}). \end{aligned}$$

Tātad katra gājiena rezultātā visu uzrakstīto skaitļu summa palielinās divas reizes. Sākumā visu skaitļu summa ir 1. Tāpēc pēc 100 gājieniem visu uzrakstīto skaitļu summa būs 2 $2^{100} = 2^5 \times 2^{95} \rangle 32 \times (2^{10})^9 \rangle 25 \times 1024^9 \rangle 25 \times 1000^9 = 25 \times 10^{27} \rangle 25 \times 10^{20}$.

Ja 25 skaitļu summa ir lielāka par 25×10^{20}, tad, protams, kāds no tiem ir lielāks par 10^{20}.

INVARIANTS-katra gājiena rezultātā visu uzrakstīto skaitļu summa palielinās divas reizes.

1.2.-41. Apzīmēsim ar p- pāra skaitļus, ar n- nepāra skaitļus. Dotā skaitļu virkne ir šāda: n,n,p; n,n,p; n,n,p; ... Tajā periodiski atkārtojas grupa (n,n,p), tātad šajā virknē blakus neatrodas divi pāra skaitļi, tātad virknē nekur blakus neatrodas skaitļi 6 un 8.
INVARIANTS- virknē periodiski atkārtojas grupa (n,n,p).

1.2.-42. Aplūkosim atlikumus, kādi rodas, virknes skaitļus dalot ar 4. Sākumā šie atlikumi ir 1; 1; **2; 3;** 3; **2; 3;** ... .

Pieņemsim, ka skaitļi A un B dod attiecīgi atlikumus a un b, dalot tos ar 4. Tad A=4x+a, B=4y+b (x un y- veseli skaitļi). Tāpēc $A\times B=(4x+a)(4y+b)=16xy+4xb+4ya+ab=4(4xy+xb+ya)+ab$. Tātad, dalot reizinājumu $A\times B$ ar 4, atlikumu nosaka tikai saskaitāmais ab, t.i., reizinātāju A un B atlikumi.

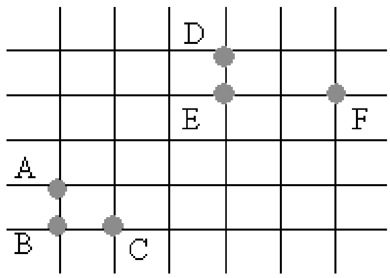
Mēs redzam, ka atlikumu virknē divas reizes parādās sekojošu atlikumu pāris (2; 3). Tāpēc arī tālāk, pēc šī pāra otrās parādīšanās, atlikumu virkne attīstīsies tāpat, ar periodu (2; 3; 3). Tātad tajā nekad neparādīsies atlikums 0. Tātad neviens sākotnējais virknes loceklis nedalās ar 4.

1.3. NODAĻA. ĢEOMETRISKIE INVARIANTI.

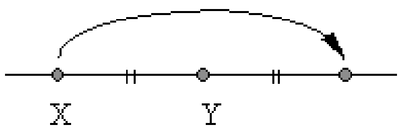
1.3.1. INVARIANTS- LAUKUMS.

23.UZDEVUMS.

Plakne sadalīta vienādos kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Atzīmētas 6 virsotnes A, B, C, D, E, F (skat. 37.zīm.).



37.zīm.



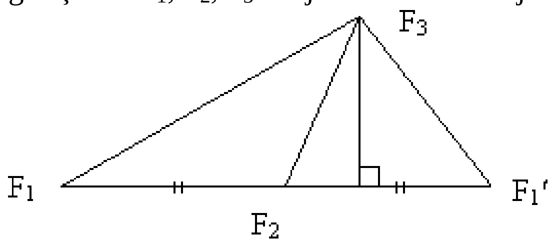
38.zīm.

Virsotnēs A, B, C atrodas pa figūriņai. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties divas patvaļīgas figūriņas (apzīmēsim tās ar X un Y) un pārcelt figūriņu X pāri Y, novietojot to tā, ka figūriņa Y, un figūriņas X vecā atrašanās vieta un figūriņas X jaunā atrašanās vieta atrodas uz vienas taisnes, pie tam attālums starp figūriņām X unY nav mainījies (skat. 38.zīm.).

Vai pēc vairākiem šādiem gājieniem var rasties tāda situācija, ka figūriņa no punkta A pārvietojusies uz punktu D, no B- uz E, bet no C- uz F?

ATRISINĀJUMS.

Apzīmēsim figūriņas ar F_1, F_2, F_3. Gājiena rezultātā trijstūra $F_1F_2F_3$ laukums nemainās.



39.zīm.

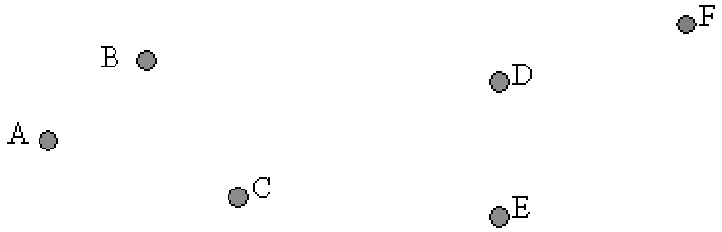
Tiešām, $\Delta F_1F_2F_3$ un $\Delta F_1'F_2F_3$ ir vienādi pamati F_1F_2 un $F_1'F_2$ un kopējs augstums pret tiem, tāpēc vienādi arī to laukumi (skat. 39.zīm.).

Atliek ievērot, ka ΔABC un ΔDEF laukumi acīmredzami atšķiras, tātad prasītais nav sasniedzams.

INVARIANTS- figūriņu veidotā trijstūra laukums nemainās.

1.3.2. INVARIANTS- ORIENTĀCIJA.

24.UZDEVUMS.
Hokeja laukumā atzīmēti punkti A, B, C, D, E, F (skat. 40.zīm.).



40.zīm.

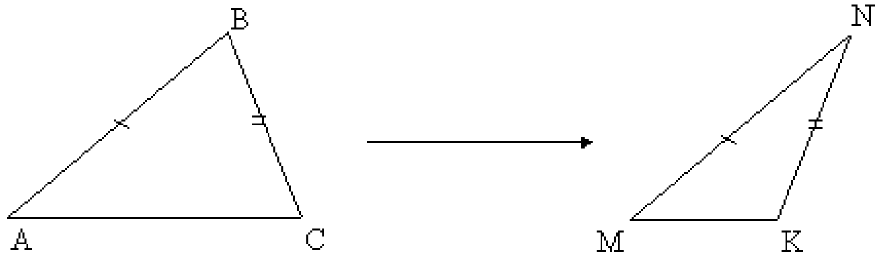
Punktos A, B, C novietots pa ripai. Hokejists trenējas mest pa vārtiem. Viņš pieslido kādai ripai un met to "vārtos", kurus veido abas pārējās ripas; pēc tam pieslido kādai citai ripai un dara to pašu, utt. . Pieņemsim, ka ripas slīd pa taisni, neatsitas pret apmali un nemaina virzienu; pieņemsim arī, ka ripa vienmēr šķērso "vārtu" līniju, t.i., visi metieni ir vienmērīgi.
Vai var gadīties, ka tieši pēc 1998 metieniem ripa no A nonāk punktā D, ripa no B- punktā E, bet ripa no C- punktā F?

ATRISINĀJUMS.
Viegli saprast, ka spēkā sekojoša <u>īpašība</u>: **ja** pirms metiena ripas A,B,C izvietotas uz ledus pulksteņa rādītāja kustības virzienā, **tad** pēc metiena tās izvietotas pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam, un otrādi. (Pārliecinieties par to patstāvīgi, atsevišķi aplūkojot gadījumus, kad met ripu A, ripu B vai ripu C.)
Tātad <u>pēc pāra skaita metiniem ripu orientācija ir tāda pati kā sākumā</u>. Atliek ievērot, ka
1) 1998- pāra skaitlis,
2) A,B,C izvietoti pulksteņa rādītāja kustības virzienā,
3) D,E,F izvietoti pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam.
Tātad uzdevumā prasītais mērķis nav sasniedzams.
<u>INVARIANTS</u>- ripu veidotā trijstūra orientācija ik pēc diviem metieniem ir tāda pati kā sākumā.

1.3.3. INVARIANTS- RĀDIUSS.

25. UZDEVUMS.

Patvaļīgu trijstūri ABC atļauts aizvietot ar trijstūri MNK tā, ka AB=MN, BC=NK un $\angle A=\angle M$ (skat. 41.zīm.)



41.zīm.

Vairāku šādu gājienu rezultātā no sākotnējā trijstūra XYZ iegūts trijstūris $X_1Y_1Z_1$, pie tam $\Delta XYZ \sim \Delta X_1Y_1Z_1$. Pierādīt, ka $\Delta XYZ = \Delta X_1Y_1Z_1$.

ATRISINĀJUMS.

Apzīmēsim ap ΔABC apvilktās riņķa līnijas rādiusu ar R_1, bet ap ΔMNK apvilktās riņķa līnijas rādiusu-ar R_2. Tad, saskaņā ar labi zināmu formulu,

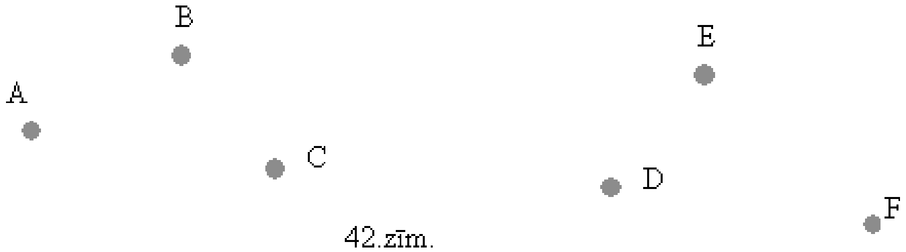
$R_1=\frac{BC}{2\sin A}$ un $R_2=\frac{NK}{2\sin M}$. Saskaņā ar doto iegūstam, ka $R_1=R_2$.

Varam secināt, ka gājienu izpildes procesā ir <u>invariants</u> lielums- <u>**iegūto trijstūru apvilkto riņķa līniju rādiusu garums.**</u> Tātad apvilkto riņķa līniju rādiusi vienādi arī ΔXYZ un $\Delta X_1Y_1Z_1$. **Ja** līdzīgiem trijstūriem vienādi divi atbilstoši garuma elementi, **tad** tie paši ir vienādi, kas arī bija jāpierāda.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAI RISINĀŠANAI.

1.3.-43. Punktos A,B,C atrodas pa figūriņai (skat. 42.zīm.). Ar vienu gājienu var izvēlēties vienu figūru un pārbīdīt to paralēli taisnei, kuru nosaka abas pārejās figūriņas, par patvaļīgu attālumu.

Vai var panākt, lai figūriņas nonāktu punktos D,E,F (vienalga, kura figūriņa kurā punktā)?

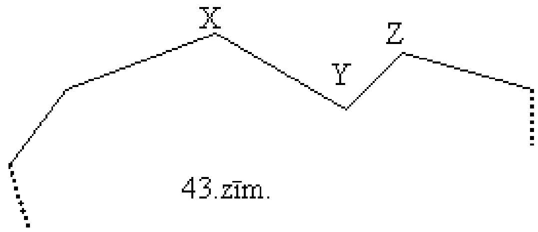


42.zīm.

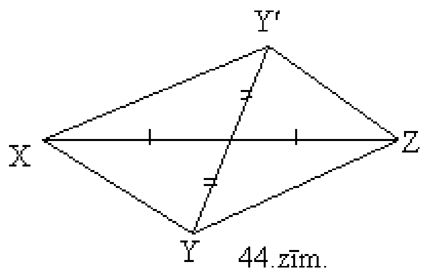
1.3.-44. No Rīgas uz Valmieru izbrauc trīs automašīnas: vispirms A, tad B, pēc tam C. Brauciena laikā 11 reizes viena mašīna apdzina otru, bet nekad reizē nenotika divas apdzīšanas (t.i., katrā apdzīšanā piedalījās tikai 2 mašīnas- tā, kuru apdzen, un tā, kas apdzen).

Vai var gadīties, ka Valmierā vispirms finišēja B, pēc tam C un pēc tam A?

1.3.-45. Uz papīra lapas uzzīmēts daudzstūris. Ja divas tā malas XY un YZ veido "ieliekumu" (skat.43.zīm.),



43.zīm.



44.zīm.

tad atļauts tās aizstāt ar divām jaunām XY′ un Y′Z, kas centrāli simetriskas pret XZ viduspunktu attiecīgi malām YZ un XY (skat. 44. zīm.). To atļauts darīt tikai tad, ja jaunajām malām nav kopīgu punktu ar pārējo daudzstūra daļu (izņemot punktus X un Z). Protams, šādas operācijas rezultātā, likvidējot vienu ieliekumu, var rasties cits.

Vai, vairākkārt veicot šādas operācijas, var atgriezties atpakaļ pie sākotnējā daudzstūra?

1.3. NODAĻAS UZDEVUMU ATRISINĀJUMI.

1.3.-43. Viegli saprast, ka tā trijstūra laukums, kura virsotnēs atrodas figūriņas, operācijas izpildes gaitā nemainās. Bet ΔDEF laukums acīmredzami lielāks par ΔABC laukumu. Tāpēc prasīto pārvietošanu izdarīt nav iespējams.

1.3.-44. Visus iespējamos automašīnu izkārtojumus virzienā Rīga- Valmiera sadalīsim 2 grupās:

1.grupa	2.grupa
CBA	CAB
BAC	ABC
ACB	BCA

Viegli redzēt: ja notiek viena (jebkura) apdzīšana, tad automašīnu izkārtojums pāriet no vienas grupas uz otru; pārliecinieties par to patstāvīgi, aplūkojot visus iespējamos variantus.

Gan uzdevumā minētais sākotnējais izkārtojums CBA, gan prasītais beigu izkārtojums ACB ir no 1.grupas. Bet tad starp tiem jābūt notikušam pāra skaitam apdzīšanu. Tomēr 11 ir nepāra skaitlis. Tātad uzdevumā prasītā automašīnu pārvietošanās nav iespējama.

INVARIANTS- ik pēc divām apdzīšanām automašīnu izkārtojums ir no tās pašas grupas kā brauciena sākumā.

1.3.-45. Veicamo operāciju rezultātā daudzstūra laukums palielinās. Ja iegūtu sākotnējo daudzstūri, tam laukums būtu lielāks nekā sākotnējam -iegūta pretruna.

INVARIANTS- visu pārkārtošanas rezultātā iegūstamo daudzstūru laukums lielāks nekā sākotnējam daudzstūrim.

1.4. NODAĻA. INVARIANTI SPĒLĒS.

Mēs katrs spēli sākam ar mērķi uzvarēt. To pašu grib arī pretinieks. Cīņā ar viņu labi balstīties uz ***spēles stratēģiju***- spēles paņēmienu kopu, kura balstās uz loģiskiem spriedumiem un nosaka mūsu rīcību spēles gaitā.

Matemātisko spēļu ir ļoti daudz. Mēs šeit aplūkosim tikai tādas spēles, kurās divi spēlētāji pamīšus izdara pa vienam gājienam (atbilstoši sauksim tos par pirmo un otro spēlētāju) un kurās nav iespējams neizšķirts, t.i., katrā partijā noteikti uzvar vai nu pirmais, vai otrais spēlētājs.

Sīkāka analīze, kuru šeit neizdarīsim, parāda, ka katrai šādai spēlei uzvarošā stratēģija saistīta ar kāda invarianta atrašanu.

Visplašāk izmantojamie invarianti saistīti ar simetriju un tās vispārinājumiem. Šajā nodaļā aplūkosim atbilstošos piemērus.

1.4.1. SIMETRIJA PRET PUNKTU.

26. UZDEVUMS.

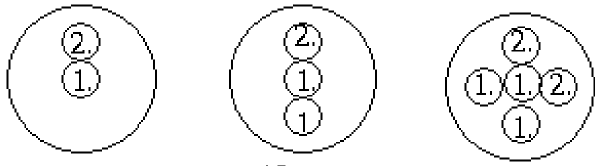
Divi spēlētāji pēc kārtas uz apaļa galda novieto vienādas apaļas salvetes, pie tam tā, lai tās nepārklātos. Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu.

Kurš spēlētājs, pareizi spēlējot, uzvar -pirmais vai otrais?

ATRISINĀJUMS.

Analizēsim šo spēli. Pirmajā gājienā jānovieto salvete tā, ka tās centrs sakrīt ar galda centru. Ja galds ir mazs, tad uzvar 1.spēlētājs, jo vairāk salvetes nevarēs novietot.

Aplūkosim tādu galdu, uz kura var novietot daudzas salvetes. Kad pirmais spēlētājs ir novietojis salveti galda centrā, tad **atlikušais apgabals, kurā vēl var novietot salvetes, ir simetrisks attiecībā pret galda centru.** Pieņemsim, ka otrais spēlētājs savu salveti novieto vienalga kurā vietā. Tā kā pirms šī gājiena brīvais apgabals bija simetrisks un otrā spēlētāja novietotā salvete nevar pārklāt vienlaicīgi nekādus divus punktus, kas simetriski viens otram attiecībā pret galda centru, tad **simetriski otrā spēlētāja nupat novietotajai salvetei ir brīva vieta, kur var novietot tieši tādu pašu salveti** (skat.45.zīm.).



45.zīm.

Ar savu gājienu pirmais spēlētājs savu salveti novietos simetriski attiecībā pret galda centru 2.spēlētāja novietotajai salvetei minētajā brīvajā vietā.

Ievērosim, ka pēc pirmā spēlētāja izdarītā gājiena brīvā vieta, kur vēl var novietot salvetes, atkal ir simetriska- pirmais spēlētājs ar savu gājienu par to parūpēsies!

Tāpēc, **ja** otrais spēlētājs izdarīs savu gājienu, **tad** pirmais varēs izdarīt atbildes gājienu simetriskajā vietā, un **brīvā vieta, kur tālāk novietot salvetes, atkal būs simetriska.**

Pirmais spēlētājs turpina spēlēt līdzīgi, “kopējot” otrā spēlētāja gājienus simetriski attiecībā pret galda centru. Tādējādi **pirmais spēlētājs nodrošina invariantas īpašības izpildīšanos- pēc viņa gājieniem brīvā vieta ir centrāli simetriska. Savukārt šī īpašība garantē, ka pirmajam spēlētājam gājienu nepietrūks- ja otrais var novietot salveti kādā vietā, tad pirmais to var novietot simetriskajā vietā.**

Bet skaidrs, ka spēle nevar turpināties bezgalīgi- kādreiz vietas uz galda, kur novietot jaunas salvetes, vairs nebūs. **Tā kā mēs jau redzējām, ka pirmajam spēlētājam gājienu nepietrūks, tad to pietrūks otrajam spēlētājam.** Tātad otrais spēlētājs zaudēs, bet pirmais- uzvarēs.

Līdzīgā ceļā tiek analizētas visas šī punkta spēles.

27.UZDEVUMS.

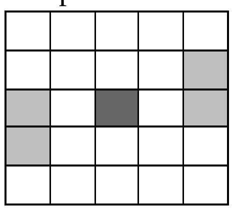
Divi lācēni: Letenīte un Ķetaurītis izvieto medus burkas kvadrātā, kas sastāv no 5×5 rūtiņām, turklāt vienā gājienā drīkst izvietot 1 medus burku 1 rūtiņā vai 2 medus burkas pa 1 divās blakus rūtiņās, ja tās ir brīvas. Tas lācēns, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē, bet lācēns, kurš uzvar, iegūst visas medus burkas.

Kurš lācēns, pareizi spēlējot, uzvar - Letenīte vai Ķetaurītis (spēli sāk Letenīte)?

ATRISINĀJUMS.

Pirmajā gājienā Letenītei jānovieto 1 medus burka tā, lai tā atrastos kvadrāta centrā. Līdz ar to Letenīte būs nodrošinājusi sev uzvaru, ja tālāk spēlēs pareizi, skat. 46.zīm..

Otrais spēlētājs - Ķetaurītis savu medus burku (vai arī divas) var novietot vienalga kurā vietā, 3.gājienā Letenīte novietos medus burku (burkas) simetriski Ķetaurīša novietotajai burkai (burkām) attiecībā pret kvadrāta centru.



46.zīm.

Letenītei jānovieto tieši tik pat burkas, cik iepriekšējā reizē ir novietojis Ķetaurītis. Arī tālāk Letenīte spēlē līdzīgi.

Ja Ķetaurītim ir iespējams izdarīt kārtējo gājienu, tad ir iespējams simetriskais gājiens, ko veic Letenīte.

Šajā spēlē uzvarēs Letenīte, t.i.,1.spēlētājs.

Uzdevums atrisināts.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAI RISINĀŠANAI.

1.4.-46. Divi spēlētāji pēc kārtas iekrāso pa vienai rūtiņai kvadrātā, kas sastāv no 10×10 rūtiņām, turklāt neviens nedrīkst iekrāsot rūtiņu, kurai ir kopēja mala ar kādu jau agrāk iekrāsoto rūtiņu. Tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē.
Kurš spēlētājs, pareizi spēlējot, uzvar - tas, kurš izdara pirmo, vai tas, kurš izdara otro gājienu?

1.4.-47. Divi spēlētāji, liek konfektes "Magone" un "Vāverīte" uz lauciņa ar izmēriem 7×7 rūtiņas. Pirmais spēlētājs liek konfekti "Magone", bet otrais - "Vāverīte"; drīkst likt pa vienai konfektei. Beigās saskaita, cik ir tādu rindu un kolonnu, kurās konfekšu "Magone" ir vairāk nekā konfekšu "Vāverīte", un otrādi. Uzvar tas spēlētājs, kuram tādu kolonnu un rindu ir vairāk; viņš iegūst visas konfektes.
Kurš spēlētājs, pareizi spēlējot, uzvarēs?

1.4.-48. Rindā novietotas 17 bumbiņas. Divi spēlētāji pēc kārtas pārkrāso vai nu vienu, vai divas blakus esošās bumbiņas. Tas spēlētājs, kuram nav pieejamas nepārkrāsotās bumbiņas, zaudē (otrreiz pārkrāsot nedrīkst). Kurš spēlētājs, pareizi spēlējot, uzvar - pirmais vai otrais?
Kurš uzvarētu, ja būtu jāpārkrāso 18 bumbiņas?

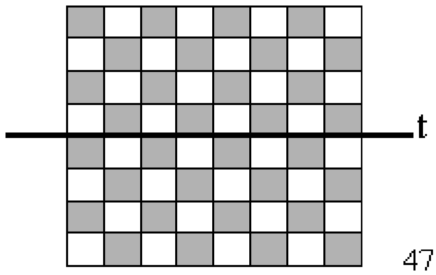
1.4.-49. Ir dots 1 metru garš "balts nogrieznis". Divi spēlētāji pēc kārtas iekrāso sarkanā krāsā pa vienam vismaz 1cm garam nogrieznim, ievērojot nosacījumu, ka nedrīkst otrreiz krāsot nevienu jau nokrāsotu punktu. Zaudē tas spēlētājs, kurš vairs nevar izdarīt gājienu.
Kurš spēlētājs uzvarēs, pareizi spēlējot?

1.4.-50. Ir doti 8 četru krāsu baloni:2 sarkani, 2 zili, 2 zaļi un 2 dzelteni. Divi spēlētāji pēc kārtas piestiprina tos pie kuba virsotnēm. Pirmais spēlētājs uzvar, ja pēc visu balonu piestiprināšanas, var atrast kuba šķautni, kurai abos galos piestiprināti vienas krāsas baloni, pretējā gadījumā uzvar otrais spēlētājs.
Kurš spēlētājs, pareizi spēlējot, uzvar?

1.4.2. SIMETRIJA PRET ASI.

28.UZDEVUMS.
Divi spēlētāji pēc kārtas novieto uz šaha galdiņa laidņus pa vienam tā, lai tie viens otru nesistu. (Laidņu krāsai nav nozīmes.) Zaudē tas spēlētājs, kas nevar izdarīt gājienu.
Kas uzvar pareizi spēlējot?

ATRISINĀJUMS.
Varētu mēģināt lietot stratēģiju "simetrija pret centru". Tā kā šaha galdiņa izmēri ir 8×8 rūtiņas, tad tam nav simetrijas centra. tāpēc varētu iedomāties, ka ar šādu stratēģiju var uzvarēt otrais spēlētājs, liekot savus laidņus simetriski pirmā spēlētāja novietotajiem laidņiem attiecībā pret kvadrāta centru- četru vidējo rūtiņu kopējo virsotni. Tomēr šāds spriedums būtu nepareizs. Nelaime tā, ka šādu stratēģiju nevar realizēt- ja pirmais spēlētājs novieto savu laidni uz vienas no diagonālēm, tad tam simetriskā rūtiņa jau ir apdraudēta, un otrais spēlētājs tur laidni likt nedrīkst.
Šī uzdevuma atrisināšanā izmantosim **SIMETRIJU PRET ASI**. Par simetrijas asi izvēlēsimies taisni, kas atdala ceturto un piekto horizontāli. Katriem diviem laučiņiem, kas ir simetriski pret šo asi, ir dažādas krāsas, tātad laidnis, kas novietots uz viena no tiem, nesitīs otru (skat. 47.zīm.).



47.zīm.

Tas dod iespēju otrajam spēlētājam lietot simetrisko stratēģiju.
Otrais spēlētājs rīkojas šādi: uz katru pirmā spēlētāja gājienu viņš atbild, novietojot laidni simetriski attiecībā pret asi t nupat novietotajam pirmā spēlētāja laidnim. Līdz ar to viņš garantē, ka brīvā vieta, kurā vēl var novietot laidņus, ir simetriska attiecībā pret t. Tas savukārt garantē: **ja** pirmais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, **tad** atbilstošo gājienu varēs izdarīt arī otrais. Tātad otrajam spēlētājam gājienu nepietrūks; tātad to pietrūks pirmajam spēlētājam; tātad otrais spēlētājs uzvarēs.
Uzdevums atrisināts.

29.UZDEVUMS.

Pa riņķa līniju izvietoti n punkti, kas pēc kārtas sanumurēti ar naturāliem skaitļiem 1, 2, ... , n. Šī riņķa līnija ir spēles A(n) "laukums". Divi spēlētāji pēc kārtas velk pa hordai, kas savieno divus punktus ar vienādas paritātes numuriem (t.i., vai nu abiem punktiem numuri ir pāra skaitļi, vai abiem- nepāra). Drīkst savienot tikai punktus, kas vēl nav savienoti ne ar vienu citu; novilktās hordas nedrīkst krustoties. Tas spēlētājs, kas nevar izdarīt gājienu, zaudē.

Ar kādām n vērtībām spēlē A(n) uzvar pirmais spēlētājs?

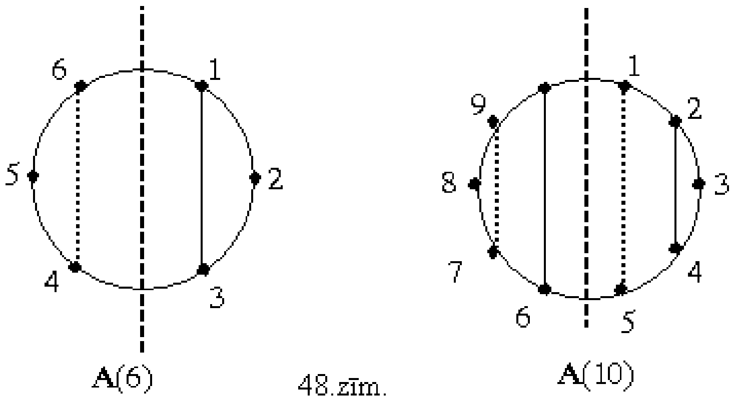
ATRISINĀJUMS.

Viegli saprast, ka spēlēs A(1) un A(2) pirmais zaudē, spēlēs A(3) un A(4)- uzvar. Arī spēlē A(5) uzvar pirmais, savienojot 1 un 3.

Aplūkosim tagad spēles A(n), kur n=4k+2, k=1; 2; ... . Parādīsim, ka tajās uzvar otrais spēlētājs.

Varam iztēloties, ka punkti (nemainot to savstarpējo novietojumu) sabīdīti tā, ka atrodas regulāra n-stūra virsotnēs; tas spēles gaitu un iznākumu neietekmē. Ievērojam, ka diametrāli pretējos punktos ir skaitļi ar pretējām paritātēm, tāpēc pirmais spēlētājs savā pirmajā gājienā nevar novilkt nevienu diametru.

Tāpēc pēc pirmā spēlētāja pirmā gājiena otrais var domās novilkt īpašu diametru- punktu kopas simetrijas asi tā, ka pirmā spēlētāja novilktā horda atrodas vienā pusē no šīs ass (skat. 48.zīm., kur attēlotas dažas no iespējamām situācijām, ja n=6 un n=10).

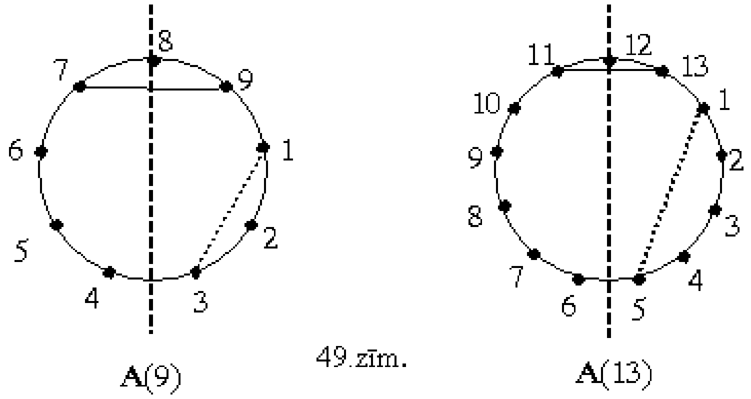


48.zīm.

Turpmāk visi gājieni jāizdara vai nu vienā, vai otrā pusē šim īpašajam diametram. Tā kā punktiem, kas simetriski viens otram attiecībā pret diametru, ir pretējas paritātes, tad uz katru pirmā spēlētāja gājienu diametra vienā pusē otrais spēlētājs var atbildēt ar simetrisku gājienu otrā pusē. Analizējot līdzīgi kā iepriekšējās spēlēs, secinām: šādi spēlējot, otrais spēlētājs uzvar.

Tagad aplūkosim spēles A(n), kur n=4k+1, k=1; 2; ... . Parādīsim, ka tajās uzvar pirmais spēlētājs.

Ar savu pirmo gājienu viņš savieno punktus n un n-2.



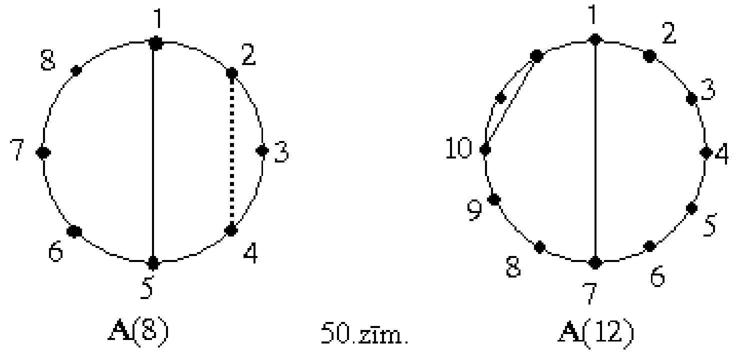
49.zīm.

Līdz ar to no tālākas spēles izslēgts arī punkts n-1, un spēlē vairs piedalās tikai punkti ar numuriem 1, 2, ... , 4k-2.

Ievērosim, ka 4k-2=4(k-1)+2, t.i., spēle reducēta uz jau aplūkoto gadījumu, kurā, izmantojot simetriju pret asi, uzvar tas, kas iet otrais. Tā kā šajā "atlikušajā" spēlē otrais iet pirmais spēlētājs, tad viņš arī uzvar.

<u>Aplūkosim tagad spēles A(n), kur n=4k, k=1; 2; ... . Parādīsim, ka tajās uzvar pirmais spēlētājs.</u>

Pirmais spēlētājs ar savu pirmo gājienu savieno diametrāli pretējos punktus 1 un 2k+1 (atkal varam uzskatīt, ka punkti ir regulāra n-stūra virsotnēs). Tālākā analīze līdzīga iepriekšējam gadījumam.

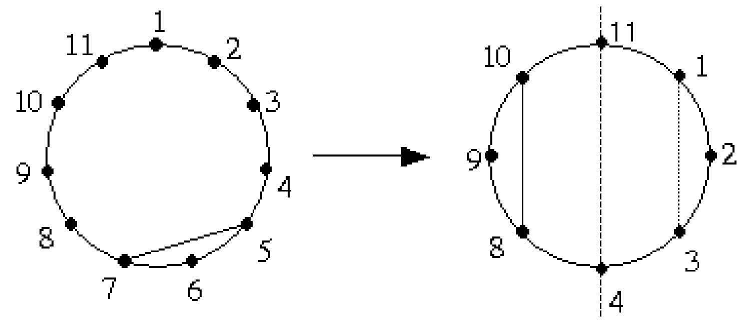


50.zīm.

<u>Tagad aplūkosim spēles A(n), kur n=4k+3, k=1; 2; ... . Parādīsim, ka tajās arī uzvar pirmais spēlētājs.</u>

Pirmais spēlētājs ar savu pirmo gājienu savieno punktus ar numuriem 2k+1 un 2k+3; tādējādi no spēles tiek izslēgts arī punkts 2k+2, un tālākajā spēlē piedalās 4k punkti

1, 2, 3, ..., 2k, 2k+4, 2k+5, ..., 4k+3.



A(11) 51.zīm.

Tālāk pirmais spēlētājs uzskata, ka atlikušie punkti atrodas regulāra 4k-stūra virsotnēs, ievēro, ka nedrīkst novilkt nevienu diametru, un spēlē līdzīgi pirmajam aplūkotajam gadījumam.

Tā kā **n, dalot ar 4, var dot atlikumu 0; 1; 2 vai 3**, tad esam apskatījuši visus iespējamos gadījumus.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAI RISINĀŠANAI.

1.4.-51. Divi spēlētāji pēc kārtas lauž šokolādi, kuras izmēri ir 5×6 rūtiņas. Vienā gājienā drīkst lauzt vienu gabalu pa vienu vertikāli vai pa vienu horizontāli (pa padziļinājumiem starp rūtiņām). Uzvar tas spēlētājs, kurš pirmais nolauzīs gabaliņu ar izmēriem 1×1 rūtiņa.
Kurš spēlētājs, pareizi spēlējot, uzvar - pirmais vai otrais?

1.4.-52. Dota taisnstūrveida tabula, kas sastāv no 10×16 rūtiņām. Divi spēlētāji pēc kārtas izsvītro vai nu vienu rindu, vai vienu kolonnu, ja vien tajā ir kaut viena neizsvītrota rūtiņa. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē.
Kurš spēlētājs, pareizi, spēlējot uzvar: pirmais vai otrais? Kurš spēlētājs uzvarētu, ja tabulā būtu 10×15 rūtiņas?

1.4.-53. Pa apli izvietotas 20 spuldzītes. Vienā gājienā, drīkst savienot jebkuras divas spuldzītes ar taisnu vadu, kas nekrusto agrāk pieslēgtos vadus. Tas spēlētājs, kas nevar izdarīt gājienu zaudē.
Kurš spēlētājs uzvarēs, pareizi spēlējot, - pirmais vai otrais?

1.4.-54. Dotas divas konfekšu kaudzītes, katrā pa 20 konfektēm. Vienā gājienā drīkst paņemt jebkuru konfekšu skaitu no vienas kaudzītes. Tas spēlētājs, kas nevar izdarīt gājienu, zaudē.
Kurš spēlētājs, pareizi spēlējot, uzvarēs, - pirmais vai otrais?

1.4.-55. Divi spēlētāji pēc kārtas aizkrāso tabulu 8×8 rūtiņas. Vienā gājienā var aizkrāsot vai nu vienu rūtiņu, vai vairākas rūtiņas, kuras atrodas vai nu vienā rindiņā, vai vienā kolonnā. Rūtiņas, kuras ir aizkrāsotas, otrreiz neaizkrāso. Tas spēlētājs, kas nevar izdarīt gājienu, zaudē.
Kurš spēlētājs, pareizi spēlējot, uzvar: pirmais vai otrais?

1.4.-56. Uz rūtiņu papīra atzīmēts taisnstūris ar m×n rūtiņām . Divi spēlētāji A un B pēc kārtas izsvītro pa vienai kolonnai vai rindiņai, ja tajā ir vēl neizsvītrotas rūtiņas.
Kurš spēlētājs, pareizi spēlējot, var nodrošināt sev uzvaru, ja uzvar tas, kas izsvītro pēdējo rūtiņu?

1.4.-57. Sūnu Ciemā mājas ir izvietotas regulāra 8-stūra virsotnēs. Ikkatras divas mājas ir savienotas ar celiņu. Divās blakus mājās A un B dzīvo sētnieki, kuriem ir jānotīra visi celiņi. Celiņus viņi tīra pa vienam celiņam pēc kārtas. Sētnieks A iesāka darbu pirmais. Tīrot celiņus jāievēro nosacījumi:
a) neiet pa celiņu, to netīrot,
b) neiet pa tīru celiņu,
c) tīrot celiņu, neiet uz turieni, kur atrodas otrs sētnieks,
d) nestaigāt ārpus celiņiem.
Kuram sētniekam nav celiņa ko tīrīt, tas zaudē. Kurš sētnieks uzvarēs?

1.4.3. PĀRA STRATĒĢIJA.

Abos iepriekšējos punktos uzvarošās stratēģijas tika realizētas šādi: uz katru viena spēlētāja gājienu otrs atbildēja ar pilnīgi noteiktu savu gājienu, pie tam šis atbildes gājiens bija atkarīgs tikai no nupat izdarītā pretinieka gājiena, nevis no iepriekšējās spēles gaitas. Varētu sacīt, ka **visi iespējamie gājieni bija apvienoti pāros, un uzvaroša stratēģija bija šāda: “ja pretinieks izdara kādu gājienu G_1, tad es izdaru to gājienu G_2, kas ar G_1 apvienots vienā pārī”. Pati apvienošana pāros notika ar ģeometriska jēdziena- simetrijas palīdzību.**

Ideju par gājienu apvienošanu pāros var realizēt arī citādi, bez simetrijas jēdziena lietošanas. Šajā punktā aplūkosim dažus piemērus, kā to dara.

30. UZDEVUMS.

Rindā uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 2002 (ieskaitot). Divi spēlētāji pēc kārtas izsvītro pa vienam skaitlim no rindas tik ilgi, kamēr rindā paliek tikai divi skaitļi (ar katru gājienu var izsvītrot jebkuru no palikušajiem skaitļiem). Pirmā spēlētāja mērķis ir rīkoties tā, lai abiem atlikušajiem skaitļiem būtu kopīgs dalītājs, *kas lielāks par 1, bet otrais spēlētājs cenšas viņam traucēt. Vai otrais spēlētājs var izjaukt pirmā nodomu?*

ATRISINĀJUMS.

Otrais spēlētājs domās sadala skaitļus pa pāriem (1;2), (3;4), ... , (2001;2002). Ja pirmais spēlētājs izsvītro vienalga kuru skaitli no kāda pāra, tad 2.spēlētājs atbildot, izsvītro šī pāra otru skaitli.

Tā spēlējot, 2.spēlētājs vienmēr izjauc 1.spēlētāja nodomus, jo beigās paliek divi skaitļi, kas atšķiras par 1, bet tādu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

Ar savu stratēģiju otrais spēlētājs garantē šādas invariantas īpašības izpildīšanos: **pēc viņa gājieniem paliek tikai “vēl neaizskarti” pāri.** Tas savukārt garantē to, ka pēdējie divi skaitļi būs no viena pāra, kas, kā redzējām, garantē uzvaru otrajam spēlētājam.

UZDEVUMI PATSTĀVĪGAI RISINĀŠANAI.

1.4.-58. Kvadrāts sadalīts 8×8 rūtiņās. Kreisajā apakšējā rūtiņā atrodas dzintars. Divi spēlētāji pēc kārtas pārbīda dzintaru uz blakus esošu rūtiņu, pie tam aizliegts pārbīdīt dzintaru uz tādu rūtiņu, kurā tas jau reiz bijis. (Rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.) Tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē.

Pierādīt, ka spēlētājs, kurš izdara pirmo gājienu, var uzvarēt, lai kā arī spēlētu pretinieks.

1.4.-59. Kvadrāts sadalīts 4×4 rūtiņās. Divi spēlētāji pēc kārtas aizkrāso pa vienai rūtiņai. Rūtiņas drīkst aizkrāsot tikai vienu reizi. Zaudē tas spēlētājs, pēc kura gājiena pirmo reizi aizkrāsots kāds kvadrāts, kas sastāv no 2×2 rūtiņām.

Kurš spēlētājs, pareizi spēlējot, uzvar: pirmais vai otrais?

1.4.-60. Jānis un Andris spēlē sekojošu spēli. Rindā uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 1997 ieskaitot. Zēni pārmaiņus izsvītro pa vienam vēl neizsvītrotam skaitlim (pirmais svītro Jānis), kamēr paliek tieši divi neizsvītroti skaitļi. Jānis grib, lai to starpības modulis (absolūtā vērtība) būtu vismaz 999.

Vai Jānis to var panākt?

1.4.-61. Šaha dēlis sadalīts n×n kvadrātiskās rūtiņās, $n\geq2$; tā stūrī atrodas figūriņa. Divi spēlētāji pēc kārtas pārbīda figūriņu uz blakus rūtiņu, pie tam aizliegts pārbīdīt figūriņu uz tādu rūtiņu, kurā tā jau reiz bijusi. (Rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.) Tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē.

a) Pierādīt, ka n- pāra skaitlis, tad sācējs var uzvarēt, bet, ja n- nepāra skaitlis, tad uzvar pretinieks.

b) Kurš uzvar, ja sākumā figūriņa neatrodas stūra rūtiņā, bet gan blakus stūra rūtiņai?

1.4.-62. Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Divi spēlētāji pēc kārtas atzīmē pa vienai vēl neatzīmētai rūtiņai. Pirmais lieto zīmi "×", bet otrais - 0. Uzvar tas, kurš pirmais ar savām zīmēm aizpilda kādu no 2×2 rūtiņām sastāvošu kvadrātu.

Kurš spēlētājs, pareizi spēlējot, var uzvarēt?

1.4.-63. Atrisiniet šīs nodaļas 1.4.-57.uzdevumu, ja sētnieki dzīvo tādās 2 virsotnēs, starp kurām ir vēl viena cita virsotne.

1.4. NODAĻAS UZDEVUMU ATRISINĀJUMI.

1.4.-46. Uzvar otrais spēlētājs, lietojot stratēģiju “simetrija pret kvadrāta centru”.

1.4.-47. Pareizi spēlējot šajā spēlē uzvarēs 1.spēlētājs. Savā pirmajā gājienā viņš konfekti "Magone" ieliks kvadrāta centrālajā rūtiņā. Pēc tam uz katru otrā spēlētāja gājienu viņš atbild ar centrāli simetrisku gājienu.

Tā rezultātā viņa “kontā” ir gan centrālā rinda, gan centrālā kolonna; ja otrā spēlētāja “kontā” ir kāda cita rinda (kolonna), tad pirmā spēlētāja “kontā” ir tai simetriskā rinda (kolonna) .

1.4.-48. Uzvar pirmais spēlētājs, ar savu pirmo gājienu pārkrāsojot vienu (resp. abas) centrālo bumbiņu un pēc tam krāsojot simetriski otrā spēlētāja gājieniem attiecībā pret rindas vidu.

1.4.-49. Pareizi spēlējot, uzvarēs 1.spēlētājs. Pirmajā gājienā 1.spēlētājam ir jāiekrāso patvaļīgs vismaz 1cm garš nogrieznis, kurš atradīsies tieši pa vidu dotajam nogrieznim tā, lai uz vienu un otru pusi paliek vienāda garuma "balti nogriežņi". Nākošajos gājienos 1.spēlētājam jāiekrāso nogriežņi simetriski 2.spēlētāja iekrāsotajiem nogriežņiem (tādā pašā garumā).

1.4.-50. Otrais spēlētājs katrā gājienā izvēlas tās pašas krāsas balonu, kuru nupat ir izvēlējies 1.spēlētājs. Viņš balonu piestiprina pie tās virsotnes, kas ir centrāli simetriska attiecībā pret kuba centru 1.spēlētāja izvēlētajai virsotnei . Tāpēc spēles beigās nekādās divās vienas šķautnes virsotnēs nebūs piestiprināti vienādas krāsas baloni.

1.4.-51. Pirmajam spēlētājam savā 1.gājienā jāsalauž šokolāde divos gabalos ar izmēriem 3×5, tātad šī lauzuma līnija kalpos par simetrijas asi.

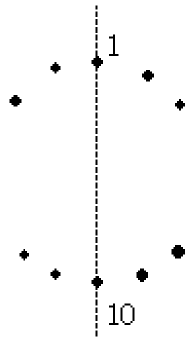
Uzvarēs 1.spēlētājs, ja viņš sākumā pielietos simetriskus gājienus, t.i., ja 2.spēlētājs lauž loksni no viena gabala, tad pirmais no otra gabala lauž tieši tādu pat loksni (gan novietojums, gan gabaliņu skaits sakrīt).

Tādējādi otrais spēlētājs pirmais nolauzīs loksni ar platumu 1. Uz šo gājienu pirmais spēlētājs atbild, nolaužot no šīs loksnes vienu kvadrātiņu, un uzvar.

1.4.-52. Tabulas 10×16 gadījumā uzvar 2.spēlētājs. Ja 1.spēlētājs izsvītro kolonnu, tad 2.spēlētājs - tai simetrisko kolonnu, ja 1.spēlētājs izsvītro rindu, tad 2.spēlētājs - tai simetrisko rindu. Tātad gājienu pietrūks 1.spēlētājam, un 2.spēlētājs būs uzvarētājs.

Ja spēlētāji svītro rindas un kolonnas tabulā 10×15 rūtiņas, tad šajā spēlē uzvar 1.spēlētājs. 1.spēlētājs 1.gājienā izsvītro vidējo kolonnu un tālāk veic simetriskus gājienus 2. spēlētāja gājieniem. Tātad gājienu pietrūks 2.spēlētājam.

1.4.-53. Šajā uzdevumā var izmantot simetriju pret asi. Pareizi spēlējot, uzvarēs 1.spēlētājs. 1.gājienā viņš savieno spuldzītes tā, lai abās pusēs no savienotajām spuldzītēm paliktu vienāds skaits spuldzīšu, t.i., deviņas. Pēc tam uz katru 2.spēlētāja gājienu viņš atbild ar simetrisku gājienu, savienojot attiecīgās spuldzītes simetrijas ass pretējā pusē, skat. 52.zīm..



52.zīm.

1.4.-54. Šajā uzdevumā, izmantojot simetrijas stratēģiju, uzvarēs 2.spēlētājs.
Tā kā abās kaudzītēs ir vienāds konfekšu skaits, tad katrā gājienā 2.spēlētājam jāņem tik konfekšu, cik ir paņēmis 1.spēlētājs iepriekšējā gājienā. Pielietojot simetrijas stratēģiju, otrais spēlētājs ņem konfektes no otras kaudzītes. Šādi spēlējot, otrais spēlētājs vienmēr varēs izdarīt gājienu.
<u>INVARIANTS</u> - 2.spēlētāja gājiens ir simetrisks attiecībā pret (punktu, taisni, plakni, kas atdala abas kaudzītes) otru konfekšu kaudzīti un 1.spēlētāja gājienu, tātad uzvarēs.

1.4.-55. Šajā spēlē uzvar 2.spēlētājs. Lai uzvarētu, viņš var izmantot simetriju attiecībā pret kvadrāta centru.
Padomājiet paši, kāpēc neder simetrija pret kvadrāta viduslīniju!

1.4.-56. Šajā uzdevumā jāšķiro 3 gadījumi:
1) ja m un n ir <u>pāra skaitļi</u>, tad uzvar otrais spēlētājs B, ja viņš katru savu gājienu izdara simetriski iepriekšējam spēlētāja A gājienam attiecībā pret vienu no taisnstūra simetrijas asīm.
2) ja m un n ir <u>nepāra skaitļi</u>, tad uzvar B, ja uz spēlētāja A pirmo gājienu atbild ar patvaļīgu perpendikulāru svītrojumu un reducē uzdevumu uz iepriekšējo gadījumu,
3) ja viens no skaitļiem m un n ir <u>pāra</u>, bet otrs - <u>nepāra</u> skaitlis, uzvar spēlētājs A, ja pirmajā gājienā izsvītro vidējo līniju un uz katru spēlētāja B gājienu atbild ar simetrisku gājienu.

1.4.-57. Pareizi spēlējot, uzvar otrais sētnieks B. Viņš domās novelk AB vidusperdendikulu un izdara savus gājienus simetriski A gājieniem attiecībā pret šo vidusperpendikulu. **Ievērojiet, ka uz vidusperpendikula nav nevienas mājas.**

1.4.-58. Pirmais spēlētājs domās sadala kvadrātu taisnstūrīšos ar izmēriem 1×2 rūtiņas. Pirmajā gājienā viņš iebīda dzintaru otrajā tā taisnstūrīša rūtiņā, kurā tas atrodas sākumā, bet pēc tam uz katru otrā spēlētāja gājienu atbild, iebīdot dzintaru tā taisnstūrīša otrajā rūtiņā, kurā to ar savu iepriekšējo gājienu iebīdījis otrais spēlētājs.

1.4.-59. Sadalīsim rūtiņas pa pāriem. Rūtiņām, kuras ietilpst vienā pārī, ir viens un tas pats burts, piem., pāri (a;a), (b;b), ... , (h;h), skat. 53.zīm. .

a	b	c	d
e	f	g	h
a	b	c	d
e	f	g	h

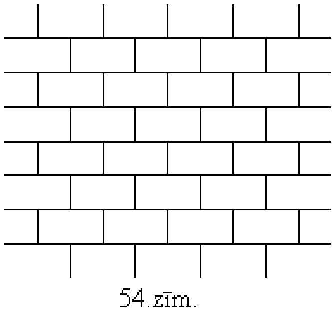
53.zīm.

Ievērosim, ka nekādā kvadrātā ar izmēriem 2×2 rūtiņas nav divu vienādu burtu.
Otrais spēlētājs uzvarēs, ja katrreiz aizkrāsos rūtiņu ar tādu pašu burtu, kāds ir 1.spēlētāja nupat aizkrāsotajā rūtiņā.

1.4.-60. Jā, var.
Ar pirmo gājienu Jānis izsvītro skaitli 999 (vidējo pēc lieluma). Tālāk Jānis domās sadala neizsvītrotos skaitļus pāros (1, 1000), (2, 1001), (3, 1002), ... , (998, 1997). Ja Andris izsvītro kādu skaitli, Jānis ar nākošo gājienu izsvītro otru skaitli no tā paša pāra. Skaidrs, ka beigās paliek neizsvītroti divi viena pāra skaitļi, kuru starpība ir 999.

1.4.-61. a) Gadījumā, ja n-pāra skaitlis, uzvar sācējs. Viņš var izmantot tādu pašu stratēģiju, kāda aprakstīta 1.4.-58.uzdevuma risinājumā, un uzvarēt.
b) Ja n- pāra skaitlis, sācējs lieto tādu pašu stratēģiju kā a)gadījumā un uzvar.
Ja n- nepāra skaitlis, arī uzvar sācējs. Viņš domās sadala taisnstūros ar izmēriem 1×2 visu dēli, izņemot to stūra rūtiņu, kurai blakus sākumā atrodas figūriņa. Ja pierādīsim, ka **otrais spēlētājs nekad nevar ieiet šajā stūra rūtiņā**, tad sācējs uzvar, lietojot tādu pašu stratēģiju kā iepriekš.
Izceltā apgalvojuma pareizību visvieglāk saprast, izkrāsojot rūtiņas šaha galdiņa kārtībā. Redzam, ka otrais spēlētājs vienmēr ieiet pretējas krāsas rūtiņās nekā apskatāmā stūra rūtiņa.`

1.4.-62. Parādīsim, ka spēle, pareizi spēlējot, beidzas neizšķirti. Skaidrs, ka pietiek parādīt: neizšķirtu var panākt otrais spēlētājs.
Otrais spēlētājs domās sadala visu plakni taisnstūrīšos ar izmēriem 1×2, kā parādīts 54.zīm. .

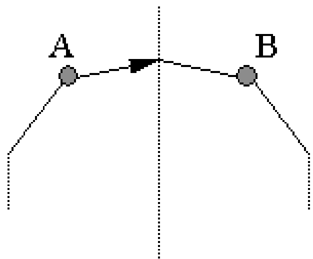


54.zīm.

Ja pirmais spēlētājs ieraksta savu zīmi kādā rūtiņā R, otrais nekavējoties ieraksta savu zīmi tajā rūtiņā, kas ir vienā taisnstūrītī ar R.

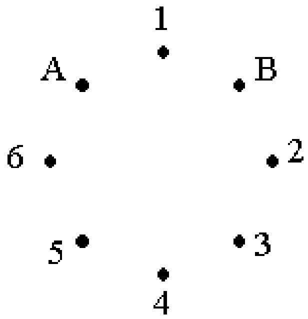
Tā kā katrā kvadrātā pilnībā ietilpst viens dalījuma taisnstūrītis, tad katrā kvadrātā, kurš vispār tiks aizpildīts pilnībā, būs arī vismaz viena otrā spēlētāja zīme. Tāpēc viņš nezaudēs.

1.4.-63. Iepriekšējo stratēģiju tiešā veidā nevar pielietot: var gadīties, ka, tīrot simetrisku celiņu nupat notīrītajam, sētniekam B nākas iet uz māju, kurā patlaban atrodas pirmais sētnieks A
(skat. 55.zīm.)

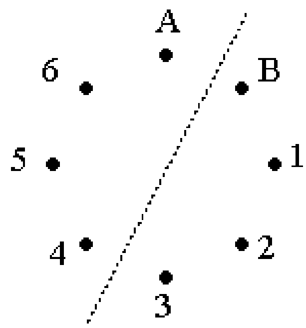


55.zīm.

Otrais sētnieks var uzvarēt, lietojot šādu stratēģiju. Viņš piešķir visām 6 pārejām mājām numurus no 1 līdz 6 (skat. 56.zīm.) un savai lietošanai uz papīra uzzīmē otru regulāru 8-stūri (skat.57.zīm.).



56.zīm.



57.zīm.

Ja pirmais sētnieks notīra kādu celiņu 56.zīm., otrais atzīmē celiņu starp mājām ar tiem pašiem numuriem 57.zīm., atrod tam simetrisko celiņu 56.zīm. un notīra celiņu ar tādiem pašiem numuriem 57.zīm.. tāpat otrais sētnieks turpina rīkoties arī tālāk. Īsuma var teikt, ka viņš “attēlo” reālo situāciju no 56.zīm. uz 57.zīm., tajā lieto simetrisko stratēģiju saskaņā ar 1.4.-57.uzdevuma atrisinājumu un šo stratēģiju pēc tam “attēlo atpakaļ” jeb “iemieso” dzīvē- 56.zīm.

1.5. NODAĻA PAR KĀDU BIEŽI SASTOPAMU KĻŪDU

Pēc iepazīšanās ar invariantu metodi skolotājs uzdeva matemātikas pulciņa dalībniekiem šādu uzdevumu.

31.UZDEVUMS

Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 1998. Ar vienu gājienu tam var vai nu pieskaitīt 12, vai atņemt 18. Vai, daudzkārt izdarot šādus gājienus, var iegūt skaitli 998?

Gandrīz vienlaicīgi roku pacēla Jānītis un Pēterītis.

JĀNĪŠA RISINĀJUMS. Sākumā dotais skaitlis ir pāra skaitlis. Gan 12, gan 18 arī ir pāra skaitļi. Pāra skaitlim pieskaitot vai no tā atņemot pāra skaitli, iegūst pāra skaitli. Tātad uz tāfeles visu laiku parādīsies tikai pāra skaitļi. Arī beigās iegūstamais skaitlis 998 ir pāra skaitlis. Tātad to **var** iegūt ar norādītajām darbībām.

PĒTERĪŠA RISINĀJUMS. Sākumā dotais skaitlis dalās ar 3. Gan 12, gan 18 arī dalās ar 3. Ja skaitlim, kas dalās ar 3, pieskaita vai no tā atņem skaitli, kas dalās ar 3, tad atkal iegūst skaitli, kas dalās ar 3. Tātad uz tāfeles visu laiku parādīsies tikai tādi skaitļi, kas dalās ar trīs. Bet beigās iegūstamais skaitlis 998 ar 3 nedalās. Tātad to **nevar** iegūt ar norādītajām darbībām.

Kurš no tiem ir pareizs?

Pēterīša spriedums ir pareizs, bet Jānīša spriedums ir kļūdains.

Jānītis savā risinājumā koncentrējās uz īpašību "būt pāra skaitlim". Viņš atzīmējis, ka **šī** īpašība piemīt gan visiem skaitļiem, kurus var iegūt, gan arī skaitlim 998, par kura iegūšanas iespējām jautāts uzdevumā. Tātad Jānītis konstatējis, ka ar skaitļa paritāti saistīti apsvērumi **netraucē** skaitļa 998 iegūšanai. Bet no tā vēl neizriet, ka 998 iegūšanai netraucē nekādi citi apsvērumi ! Gluži otrādi, kā to savā risinājumā atradis Pēterītis, dalāmība ar 3 ir apsvērums, kas parāda, ka 998 ar atļautajiem gājieniem nav iegūstams.

Situācija ir apmēram tāda pati, kāda rastos, ja Jānītim un Pēterītim būtu uzdots noskaidrot, vai celiņu cauri džungļiem no Mumbo ciema uz Tumbo ciemu neapdraud nekādas briesmas. Jānītis, ķīmiski analizējot gaisa sastāvu, nekļūdīgi noskaidro, ka celiņa tuvumā nav neviena lauvas, un no tā secina, ka var droši doties ceļā. Turpretī Pēterītis koncentrējas uz jaguāru meklēšanu un konstatē, ka 10 metrus no celiņa guļ vesela jaguāru saime. Kura zēna secinājums ir pareizs, varat saprast paši.

Tāpēc atcerieties!

JA IZDODAS ATRAST ĪPAŠĪBU, KAS

1) <u>PIEMĪT</u> SĀKUMĀ DOTAJIEM LIELUMIEM,

2) IR INVARIANTA, T.I., <u>SAGLABĀJAS</u>, VEICOT PIEĻAUJAMĀS OPERĀCIJAS,

3) <u>PIEMĪT</u> TIEM LIELUMIEM, KURI JĀIEGŪST GALAREZULTĀTĀ,

TAD NO TĀ VIEN VĒL NEVAR SECINĀT, KA GALAREZULTĀTĀ VAJADZĪGOS LIELUMUS TIEŠĀM VARĒS IEGŪT.

Protams, nevajag krist galējībā un uzskatīt, ka visās šādās situācijās prasīto galarezultātu patiesībā nevar iegūt. Apskatīsim piemēru.

32.UZDEVUMS

Dots kubs, kura divās pretējās virsotnēs ierakstīti vieninieki, bet pārējās virsotnēs – nulles. Vienā gājienā atļauts izraudzīties jebkuru kuba šķautni un tās abos galos pierakstītajiem skaitļiem pieskaitīt skaitli 1.

Vai eksistē tāda gājienu sērija, pēc kuras visās virsotnēs ierakstīti vienādi skaitļi?

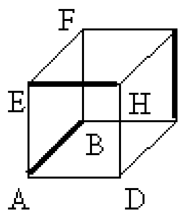
ATRISINĀJUMS.

Izkrāsojot kuba virsotnes kā 15. uzdevuma atrisinājumā un cenšoties veikt tādus pašus spriedumus, nonākam pie šādiem rezultātiem:

1) iekrāsotajās un neiekrāsotajās virsotnēs skaitļu summas sākumā ir vienādas savā starpā,
2) katra gājiena rezultātā šīs summas palielinās par 1, tātad joprojām paliek vienādas,
3) situācijā, kura jāiegūst beigās, šīs summas arī ir vienādas.

Mēs jau zinām: **no augšminētajiem spriedumiem vien nedrīkst secināt, ka visus skaitļus var padarīt vienādus**! Tomēr šoreiz ar **citu** spriedumu var parādīt, ka tas tomēr ir izdarāms.

Pieņemsim, ka vieninieki sākumā ir virsotnēs F un D, bet citās virsotnēs ir nulles (58.zīm.).



58.zīm.

Pieskaitot pa vieniniekam šķautņu EH, GC un AB galos, iegūstam vajadzīgo.

Tātad gadījumos, ja mēs zinām, ka kāda īpašība piemīt sākotnējiem lielumiem, saglabājas izpildāmo gājienu rezultātā un piemīt arī beigās vajadzīgajam rezultātam, tad šī informācija vien vēl neļauj secināt, vai vajadzīgais beigu rezultāts iegūstams no sākotnējiem lielumiem, izpildot pieļautos gājienus. Tādos gadījumos uzdevuma risināšanai jāmeklē citi ceļi – varbūt citi invarianti, varbūt veids, kā iegūt vajadzīgo galarezultātu, u.t.t.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA

1. E.Riekstiņš, A.Andžāns. Atrisini pats!- R.:Zvaigzne, 1984.- 271lpp.

2. A.Andžāns, I.Kreicberga. Vai vari atrisināt?- R.:Zvaigzne, 1985.-159 lpp.

3. A.Andžāns, A.Bērziņš, M.Stupāne. Matemātikas olimpiāžu un konkursu uzdevumi- R.:Zvaigzne, 1992.-239 lpp.

4. A.Andžāns, M.Vītuma. 1982./83. mācību gada dažādu matemātikas olimpiāžu, konkursu uzdevumi un to atrisinājumi- R.:Latvijas PSR Izglītības ministrija, 1986.-199 lpp.

5. I.Muceniece. Algoritmisko uzdevumu krājums 5.-9.klasei-A.:Krauklītis, 1996.-116 lpp.

6. A.Andžāns, I.Jēkabsone. Profesora Cipariņa kluba uzdevumi un to atrisinājumi- R.:Mācību apgāds, 1996.-65 lpp.

7. LU A.Liepas NMS uzdevumu kartotēka