GUNTIS VASIĻEVSKIS

MĀCĪBU LĪDZEKLIS VIDUSSKOLĀM KOMBINATORIKĀ

RĪGA - 1997

Saturs

Ievads

Darbā "Mācību līdzeklis vidusskolām kombinatorikā" aplūkoti temati : kombinatorikas reizināšanas likums, kombinatorikas saskaitīšanas likums, variācijas, permutācijas, kombinācijas, variācijas ar atkārtojumiem, permutācijas ar atkārtojumiem, kombinācijas ar atkārtojumiem, kombināciju īpašības un Ņūtona binoms; katrai tēmai piedāvāts pietiekoši plašs piemēru un patstāvīgai risināšanai paredzētu uzdevumu klāsts. Visi minētie temati ir vidusskolas matemātikas pamatkursa un/vai profilkursa sastāvdaļas, un mācību literatūra skolām par šiem jautājumiem latviešu valodā ir nepietiekama.

Materiāls apkopots un sakārtots ievērojot vairākus metodiskus principus.

Uzskatāmības princips.
Viens no kombinatorikas pamatjautājumiem ir dažādu kopu vai to apakškopu dažādo izvēļu skaita noteikšana. Lai pilnīgāk atsegtu matemātisko jēgu dažādiem apgalvojumiem un sakarībām, darbā katra likumsakarība ir ilustrēta grafiski vai ar attēlu palīdzību, izvēlēti dažādi raksturīgi piemēri.

No vienkāršā/ konkrētā uz sarežģīto/vispārīgo
Lai sagatavotu lasītāju apgalvojumu un likumsakarību izpratnei, vispirms tiek aplūkoti vienkārši piemēri, kuros ir ilustrēti un izskaidroti vēlāk formulētie fakti un pieņēmumi. Katru apgalvojumu vispārīgā veidā iepriekš izskaidro un sagatavo vairāki uzskatāmi ilustrēti piemēri. Arī sarežģītu teorēmu pierādījumi sadalīti vairākās daļās - konkrēts vienkāršots piemērs sagatavo teorēmas vai apgalvojuma pierādījumā sagaidāmo sprieduma algoritmu, un tad seko līdzīgi spriedumi vispārīgajā gadījumā.

Attīstošais princips
Lai veidotu pilnīgu izpratni par aplūkotajām matemātikas likumsakarībām, lasītājam tiek piedāvāts aplūkot gan tiešus apgalvojumus , gan tiem apgrieztus apgalvojumus. Uzdevumi tiek ilustrēti arī ar zīmējumu palīdzību, un otrādi, no ilustrācijām lasītājam tiek piedāvāts veidot savus uzdevumus.

Modelēšanas princips
Šajā darbā kombinatorikas likumsakarību izskaidrošanai un izpratnes veicināšanai īpaša uzmanība ir veltīta "modeļu" principa ieviešanai. Viena un tā pati matemātiskā izteiksme var raksturot dažādus notikumus un atšķirīgos formulējumos izteiktus uzdevumus/problēmas. Māksla aizstāt vienā veidā formulētu uzdevumu/ problēmu ar citu, pieejamāk izteiktu, uzdevumu/ problēmu, kam ir tā pati matemātiskā jēgā, ir prasme veidot "modeli". Atsevišķiem piemēriem ir doti pat vairāki modeļi. Šādas metodes izmantošana būtiski palielina izpratni un pasargā no formālas izpratnes veidošanās. Modeļu principa ieviešana bagātina kombinatorikas uzdevumu risināšanas metodes.

Pēctecības princips.
Darbā aplūkotais materiāls sakārtots un izklāstīts, ievērojot pēctecības principu. Lai iepazītos ar darbu un izprastu tā saturu, nav nepieciešama īpaša sagatavotība, pietiek ar matemātikas zināšanām pamatizglītības līmenī.

1. KOMBINATORIKAS REIZINĀŠANAS LIKUMS

Aplūkosim šādus piemērus:

1. piemērs.

Deju pulciņā jāizvēlas solistu pāris. Labākie dejotāji ir Jānis, Pēteris, Aivars, Māris, Kaspars, Liena, Elīna, Vineta un Baiba. Cik dažādos veidos var izvēlēties vienu zēnu un vienu meiteni solo numura izpildei?

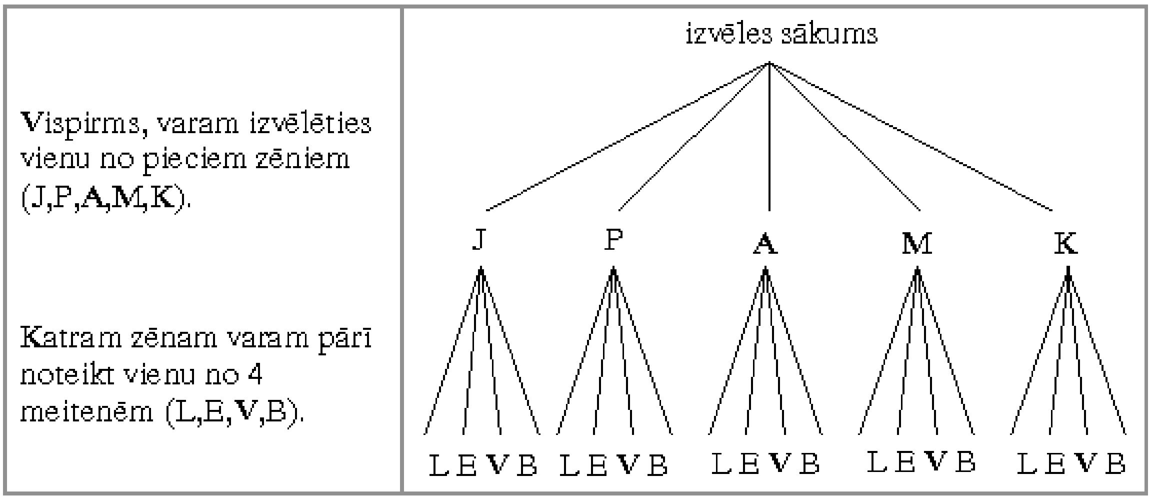
<u>Atrisinājums.</u>

Izvietosim tabulas horizontālajā ailē 5 zēnu vārdus un vertikālajā ailē 4 meiteņu vārdus (skat. zīm.).

	Jānis	Pēteris	Aivars	Māris	Kaspars
Liena	x	...			
Elīna	x				
Vineta	x				
Baiba	x				

No tabulas redzam, ka Jānim pārī var noteikt vienu no četrām meitenēm, arī Pēterim pārī var noteikt vienu no četrām meitenēm utt. Viegli pārliecināties, ka dažādo pāru skaits vienāds ar tabulas rūtiņu skaitu, tas ir $5 \cdot 4 = 20$.

Aplūkosim vēl vienu šā uzdevuma atrisinājumu shēmas veidā (skat. zīm.): attēlosim izvēles nogriežņu veidā.



Šāda uzdevuma atrisinājuma shēma pārliecina, ka dažādo pāru skaits ir $5 \cdot 4 = 20$.

Atbilde. Dažādo pāru skaits ir 20.

KOMBINATORIKAS REIZINĀŠANAS LIKUMS

Teorēma

Ja kādu objektu A var izvēlēties m veidos, bet neatkarīgi no objekta A izvēles citu objektu B var izvēlēties k veidos, tad A un B pāri var izvēlēties $m \cdot k$ veidos (A pārī ir pirmais, B - otrais elements)**.**

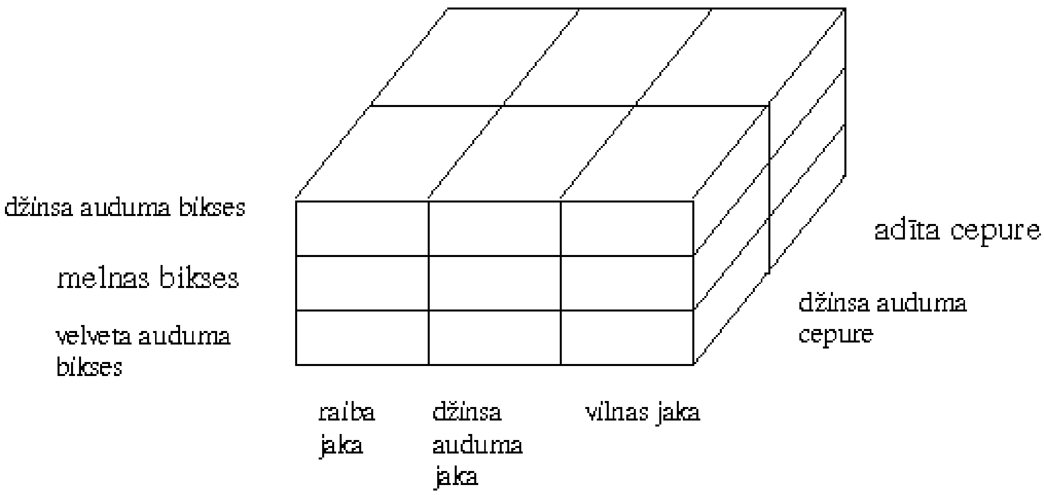
Par apgalvojuma pierādījumu varam uzskatīt 1. piemēru, ja zēnu skaits ir *k*, bet meiteņu skaits *m*.

2.piemērs.

Jānīša garderobē ir 3 dažāda veida bikses, 3 dažādas jakas un 2 dažādas cepures. Cik dažādos veidos Jānītis var ietērpties biksēs, jakā un cepurē?

Atrisinājums.

Šī uzdevuma atrisinājumu attēlosim zīmējumā. ”Neatkarīgu” apģērba gabalu veidi ir trīs - jaka, bikses un cepure . Attēlojam paralēlskaldni, kura 3 garuma vienības nogriežņiem varam piešķirt dažādu jaku veidus (skat. zīm.), 3 augstuma vienībām - bikšu veidus, 2 platuma vienībām - cepuru veidus.



Dažādo apģērba komplektu skaits atbilst paralēlskaldņa vienības kubiņu skaitam, bet to ir

$$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18.$$

Atbilde.

Dažādo apģērbu komplektu skaits ir 18.

3. piemērs.

Dziesmu konkursam iesniedza 5 dziesmas, no kurām 4 labākās saņems no 1. līdz 4. prēmijai. Cik veidos šīs dziesmas var iegūt pirmās četras godalgas?

Atrisinājums.

Pirmo vietu var iegūt jebkura no 5 dziesmām. Atlikušās godalgas var savā starpā dalīt tikai 4 dziesmas (viena jau būs 1. vietā). Ja otro vietu var iegūt jebkura no 4 atlikušām dziesmām, tad trešo godalgu savā starpā var sadalīt 3 dziesmas (divas ir prēmētas - 1. un 2. godalga). Ceturto godalgu savā starpā var sadalīt kāda no 2 dziesmām. Dažādu veidu skaits, kā 5 dziesmas savā starpā var sadalīt 4 godalgas, ir 5·4·3·2 =120.

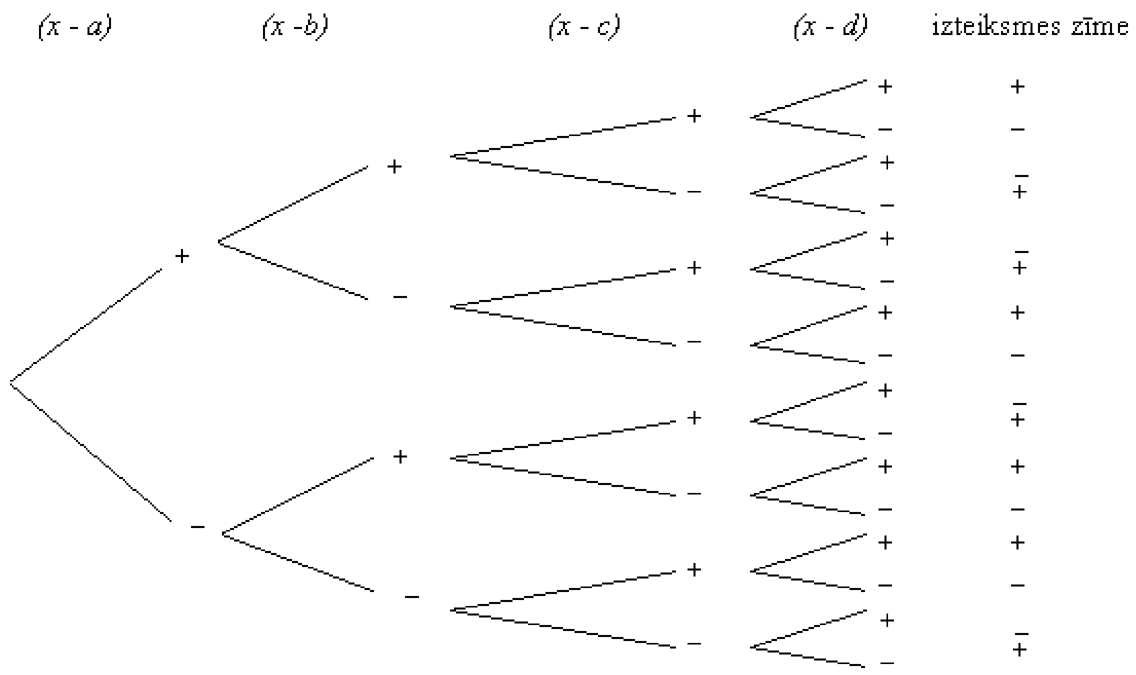
4. piemērs.

Dota izteiksme (x - a) (x -b) (x - c) (x - d) (a; b; c; d dažādi skaitļi). Cik dažādi gadījumi jāaplūko, lai noteiktu izteiksmes zīmi, ja x nesakrīt ne ar vienu no skaitļiem a, b, c, d ?

Atrisinājums.

Reizinātājs x - a var būt pozitīvs vai negatīvs (2 iespējas), neatkarīgi no reizinātāja *x - a* zīmes reizinātājs *x - b* var būt pozitīvs vai negatīvs (2 iespējas), neatkarīgi no iepriekšējiem reizinātājs *(x - c)* var būt pozitīvs vai negatīvs (2 iespējas), arī pēdējais reizinātājs - *(x - d)* neatkarīgi no iepriekšējiem, var būt pozitīvs vai negatīvs (2 iespējas). Pavisam jāaplūko $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ dažādi gadījumi, kas nosaka reizinājuma zīmi.

Aplūkosim šī uzdevuma atrisinājumu shēmas veidā:



Atbilde.
Lai noteiktu izteiksmes zīmi, jāaplūko 16 gadījumi.

Teorēma
Ja objektu A_1 var izvēlēties k_1 veidos un katram A_1 izvēles veidam objektu A_2 var izvēlēties k_2 veidos, un katram A_1 un A_2 izvēles veidam objektu A_3 var izvēlēties k_3 veidos utt., līdz objekta A_m izvēlei k_m veidos, tad objektu ‘’A_1 un A_2, un A_3,un ... A_m ‘’ var izvēlēties $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \ldots k_m$ **veidos.**

Piebilde.

Kombinatorikā reizēm ir izdevīgi doto uzdevumu aizstāt ar citu uzdevumu, kurš izsaka to pašu būtību. Šādus uzdevumus sauksim par ”modeli’’.

4. piemēram var izdomāt citu uzdevumu, kura saturs izsaka to pašu būtību. Iedomāsimies, ka katrs reizinātājs ir viena aiz otra fiksētas spuldzītes, kuras var būt iedegtas vai izslēgtas. Atbildot uz jautājumu, cik dažādus signālus var veidot šādu 4 spuldzīšu ķēde (”+” spuldzīte deg; ”-” spuldzīte nedeg), iegūstam iepriekšējā uzdevuma atrisinājumu.

5. piemērs

Izmeklētājs nopratina četrus lieciniekus, uzdodot visiem vienu un to pašu jautājumu. Katram lieciniekam ir iespējams atbildēt ar ‘’jā’’ vai ‘’nē’’. Cik dažādu atbilžu komplektu (komplekts satur visu liecinieku atbildes noteiktā secībā, atbildētāju secība nemainās) izmeklētājs var iegūt?

5. piemēra atrisinājumam aplūkojam šādu ”modeli ”:

Iedomāsim katru liecinieku kā ‘’spuldzīti’’, atbilde ” jā ” nozīmētu, ka spuldzīte deg, atbilde ”nē” - spuldzīte nedeg. Cik dažādus signālus var veidot četru spuldzīšu ķēde? Acīmredzot, $2\cdot2\cdot2\cdot2 = 16$

Cits ‘’modelis’’ 5. piemēram:

Aplūkojam izteiksmi:

$$1 \quad 10 \quad 100 \quad 1000 \quad 10\,000$$

Starp skaitļiem tukšajās vietās var likt zīmi ” + ” vai ”–”. Cik dažādu izteiksmes vērtību var iegūt?

Piebilde.

Viens no kombinatorikas uzdevumu risināšanas paņēmieniem ir sastādīt dotajam uzdevumam modeli un to atrisināt.

6.piemērs.

Cik dažādu apakškopu var izveidot no kopas, kura satur 5 elementus?

Atrisinājums.

Sanumurējam kopas elementus - no 1 līdz 5. Kopas 1. elements var būt kādā apakškopā vai var nebūt, tātad, lai veidotu apakškopas, to ‘’attiecības’’ ar 1. elementu var izvēlēties 2 veidos; 2. elements var būt vai nebūt apakškopā – 2 veidi, 3. elements arī var būt apakškopā vai var nebūt utt. Pēc kombinatorikas reizināšanas likuma apakškopu skaits ir $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^5$. Starp visām iespējamām apakškopām ir arī tukšā kopa, kurā nevienu elementu neiekļauj, un pati kopa, kurā ir visi 5 elementi.

Teorēma.

Kopai ar *m* elementiem ir 2^m apakškopas.

Pierādījums.

Vienu pierādījuma veidu iegūst, spriežot līdzīgi kā iepriekšējā uzdevumā.

Aplūkosim pierādījumu, izmantojot matemātiskās indukcijas metodi :

Indukcijas bāze
Ja m = 1
No viena elementa var izveidot 2 apakškopas – kopu, kas satur šo elementu un tukša kopu, šo elementu neiekļaujot apakškopā.

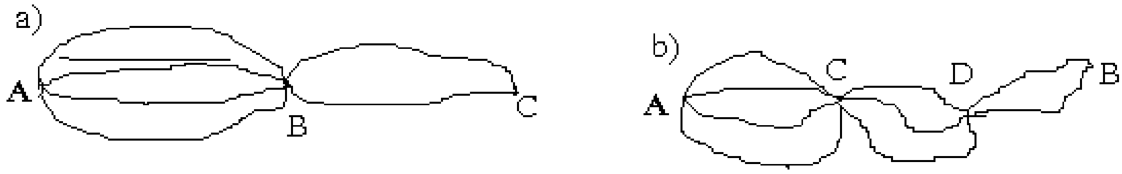
Induktīvais pieņēmums
Ja m = k
Pieņem, ka kopai ar k elementiem var izveidot 2^k apakškopas.

Induktīvā pāreja
Ja m = k + 1
Kopu ar *k* elementiem papildinām ar vienu elementu. No *k* elementiem var izveidot 2^k apakškopas un *(k +1) - o* elementu var katrai no šīm apakškopām vai nu pievienot, vai nepievienot. Tādēļ k + 1 elementa apakškopu skaits pēc kombinatorikas reizināšanas likuma būs $2^k \cdot 2 = 2^{k+1}$.

Induktīvais secinājums
Tā, kā pie $m = 1$ apgalvojums ir patiess un no pieņēmuma patiesuma k elementu kopai seko apgalvojuma patiesums $k + 1$ elementu kopai, tad apgalvojums patiess visiem $m \in N$.

Uzdevumi.

1. Kādas valsts ceļu karte attēlota zīmējumā. Cik dažādu ceļu ved no pilsētas A uz pilsētu B?



2. Klasē ir 20 skolnieki. Cik dažādu dežurantu pāru var izveidot, ja dežurantu kārtība pārī ir svarīga?

3. Akcionāru valdē ir 8 cilvēki. No šiem valdes locekļiem jāizvēlas valdes priekšsēdētājs un vietnieks. Cik dažādos veidos to var izdarīt (attēlot uzdevuma atrisinājumu shēmā)?

4. Cik veidos 15 komandas savā starpā var sadalīt zelta, sudraba, bronzas medaļas (divu pirmo, divu otro, divu trešo vietu nav)?

5. 4.[a] klasē ir 25 vienvietīgi galdi. Cik dažādos veidos klasē var izsēdināt 6 skolniekus?

6. Cik dažādu četrciparu skaitļu var izveidot no cipariem (cipari skaitlī neatkārtojas):

a) 1; 3; 4; 5,
b) 0; 3; 5; 7,
c) 1; 5; 7; 8, lai skaitlis dalītos ar 5,
d) 3; 4; 6; 7, lai skaitlis dalītos ar 2,
e) 3; 6; 9; 0; 4, lai skaitlis dalītos ar 3,
f) 2; 6; 7; 5, lai skaitlis dalītos ar 4 (uzzīmēt uzdevuma risinājuma shēmu!)?

7. Atrisināt 5. uzdevumu, ja cipari skaitlī var atkārtoties.

8. Cik trīsciparu skaitļu var izveidot no cipariem (cipari skaitlī neatkārtojas)

a) 3, 4, 6, 8, 9
b) 0, 2, 5, 6, 5
c) 3, 1, 2, 4, 5, lai skaitlis dalītos ar 5 (attēlot uzdevuma atrisinājumu shēmā)?

9. Atrisināt 8. uzdevumu, ja cipari skaitlī var atkārtoties.

10. Cik ir piecciparu skaitļu, kurus veido pāra cipari?

11. Cik ir piecciparu skaitļu, kas dalās ar 5?

12. Grāmatu plauktā ir 5 dažādas grāmatas. Cik dažādos veidos tās var izkārtot grāmatu plauktā?

13. Cik dažādos veidos var izkārtot 18 grāmatas skapī, ja tam ir trīs plaukti un tajos atrodas attiecīgi 5, 6, 7 grāmatas (pārlikt grāmatu no viena plaukta citā nedrīkst).

14. Cik sakārtotu pāru (x; y) var izveidot, ja x vietā var likt lielumus a; b; c, bet y vietā - 1; 2; 3; 4 (attēlot uzdevuma atrisinājumu shēmā)?

15. Cik dažādu dalītāju ir skaitlim:

a) 3×5;
b) $3^2 \times 5^4$, ;
c) $3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^3$,
d) 1260 ?

16. Cik dažādu dalītāju ir polinomam:

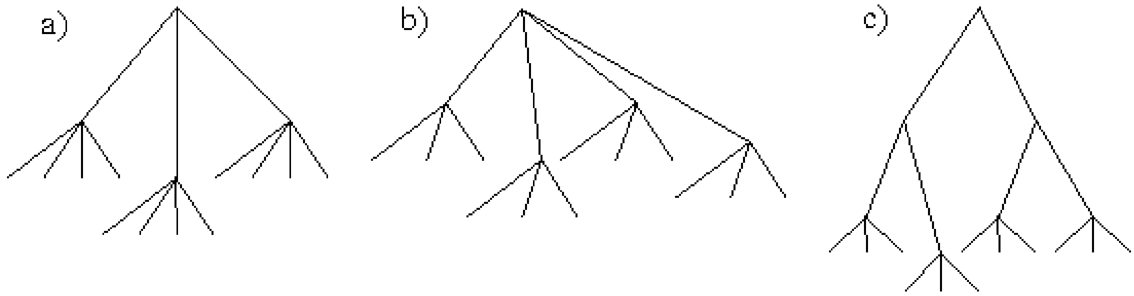
a) (x - 3) (x - 4),
b) $(x - 3)^2 (x - 4)^3$,
c) $(x - 2)^2 (x + 2)^3 (x - 3)^4$?

17. Cik dažādu vienkāršāku sistēmu būtu jāatrisina, lai atrastu sistēmas atrisinājumus?

a) $\begin{cases} A \cdot B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} A \cdot B = 0 \\ C \cdot D \cdot E = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} A \cdot B \cdot C = 0 \\ E \cdot F \cdot G = 0 \\ H = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} A \cdot B \cdot C = 0 \\ K \cdot H = 0 \\ P \cdot T = 0 \end{cases}$,

kur A, B, C, D, E, F, G, H, K, P, T ir izteiksmes, kas satur mainīgos?

18. Sastādīt noteikumus uzdevumam, kura risinājums attēlots shēmā :



19. Sastādīt uzdevumu, kura atrisinājumu izsaka reizinājums:

a) $5 \cdot 4 \cdot 3$,

b) 5^3,

c) $5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6\,!$

20. Cik veidos *n* cilvēki var nostāties rindā pie biļešu kases, ja

a) n = 7,

b) n = k ?

21. Uz trijstūra ABC malas BA izvēlēti *n* punkti, bet uz malas BC *k* punkti. Virsotne A ir savienota ar katru no *k* dalījuma punktiem uz malas BC, bet virsotne C ar katru no *n* dalījuma punktiem uz malas BA. Cik krustpunktu veidojas trijstūra iekšpusē, ja

a) $k = 3$, $n = 4$,   b) $k = 5$, $n = 10$,   c) vispārīgā gadījumā?

22. Pēc 21. uzdevuma nosacījumiem noskaidrot, cik daļās šie nogriežņi dala trijstūri.

23. Četrstūrī ABCD uz malas AB izvēlēti n punkti, bet uz malas AD izvēlēti k punkti. Virsotne D savienota ar malas AB dalījuma punktiem, bet virsotne C savienota ar malas AD dalījuma punktiem. Cik krustpunktu veidojas četrstūra iekšpusē, ja :

a) $n = 4$, $k = 5$,   b) $n = 7$, $k = 8$,   c) vispārīgā gadījumā?

24. Pēc 23. uzdevuma nosacījumiem noskaidrot, cik daļās šie nogriežņi dala četrstūri.

25. Automātiskajā bagāžas glabātuvē ir šifra atslēga, kas sastāv no viena burta un trīs ciparu pozīcijām. Cik dažādus šifrus iespējams sastādīt, ja var izvēlēties 10 dažādus burtus un ciparus 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9?

26. Viesībām uzklāts apaļais galds 11 personām. Cik dažādos veidos pie galda var piesēdināt 11 personas?

27. Cik dažādu dalītāju ir skaitlim

$$x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}, \quad p_k - \text{pirmskaitļi } i = 1;\ 2;\ \ldots?$$

28. Cik dažādu dalītāju ir polinomam, kuru var izteikt kā reizinājumu

$$P(x) = (x-a)^{\alpha_1}(x-b)^{\alpha_2}(x-c)^{\alpha_3}\ldots(x-t)^{\alpha_k}$$, $a,b,\ldots,t$ - dažādi skaitļi?

29. 6 zēni un 6 meitenes jāapsēdina 12 vienā rindā izvietotos krēslos. Zēni sēžas vietās ar pāra numuriem, bet meitenes vietās ar nepāra numuriem. Cik veidos to var izdarīt?

30. Pastā ir trīs vēstules. Katru no tām var izsūtīt uz sešām dažādām adresēm. Cik veidos var izsūtīt šīs vēstules, ja nekādas divas no tām nevar izsūtīt uz vienu un to pašu adresi? Cik veidos var izsūtīt vēstules, ja atļauts uz vienu adresi izsūtīt vairāk kā vienu vēstuli?

31. Automašīnā 10 vietas. Cik veidos 10 cilvēki var sasēsties automašīnā, ja vadītāja vietu var ieņemt tikai trīs no pasažieriem?

32. Pasažieru vagonā ir deviņas kupejas. Cik veidos šajā vagonā var izvietot četrus cilvēkus tā, lai tie visi būtu dažādās kupejās?

2. KOMBINATORIKAS SASKAITĪŠANAS LIKUMS

1. piemērs.

Uz galda ir 5 dažādi āboli un 6 dažādi bumbieri. Cik veidos var izvēlēties vienu augli?

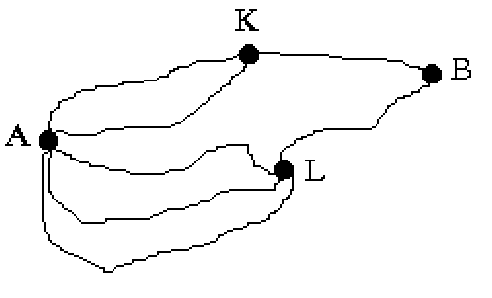
Atrisinājums.

Var paņemt vienu no 5 āboliem vai vienu no 6 bumbieriem. Tātad vienu augli var izvēlēties

$$6 + 5 = 11 \text{ veidos.}$$

2. piemērs.

Zīmējumā attēlota ceļu karte starp pilsētām A un B (skat. zīm.). Cik dažādi maršruti ved no A uz B?



Atrisinājums.
Pilsētā B var nokļūt, braucot caur ciematu K vai ciematu L. Dažādo ceļu skaitu, pa kuriem var nokļūt ciematos K un L, summa ir 2 + 3.No ciematiem K un L uz pilsētu B var nokļūt tikai pa vienu ceļu.

Atbilde.

No A uz B var nokļūt pa 5 dažādiem maršrutiem.

Kombinatorikas saskaitīšanas likums

Teorēma

Ja objektu A var izvēlēties k veidos, bet objektu B var izvēlēties *m* veidos, pie kam katrs objekta A izvēles veids atšķiras no katra objekta B izvēles veida, tad objektu ''A vai B'' var izvēlēties *m* + *k* veidos.

Pielietojot kombinatorikas saskaitīšanas likumu vairākkārtīgi, to var lietot objekta ''A_1 vai A_2 ,vai ... ,vai A_l'' izvēļu skaita noteikšanai.

3. piemērs.

Cik dažādu naturālu skaitļu ar augstākais trim cipariem var izveidot no cipariem 5; 7; 9?

Atrisinājums.

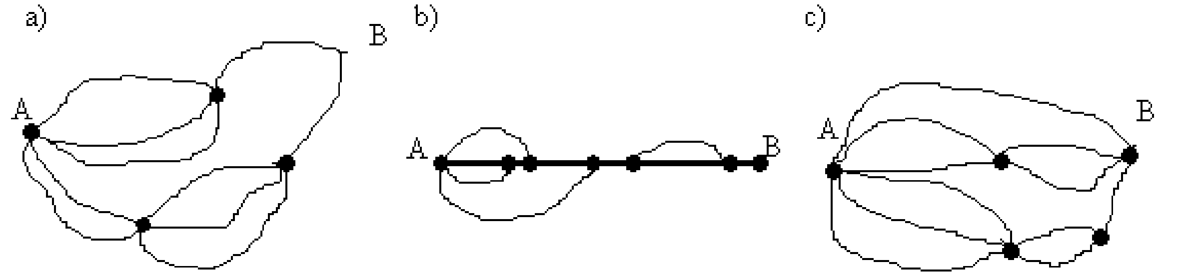
Tā kā nav īpašas norādes , tad cipari veidotajā skaitlī atkārtoties drīkst. No cipariem iespējams veidot viencipara, divciparu vai trīsciparu skaitļus.

Pēc kombinatorikas reizināšanas likuma viencipara skaitļu skaits ir:	$3 = 3$
Pēc kombinatorikas reizināšanas likuma divciparu skaitļu skaits ir:	$3 \cdot 3 = 9$
Pēc kombinatorikas reizināšanas likuma trīsciparu skaitļu skaits ir:	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
Kopējo skaitļu skaitu veido iespējamo viencipara, divciparu un trīsciparu skaitļu summa:	$3 + 9 + 27 = 39$

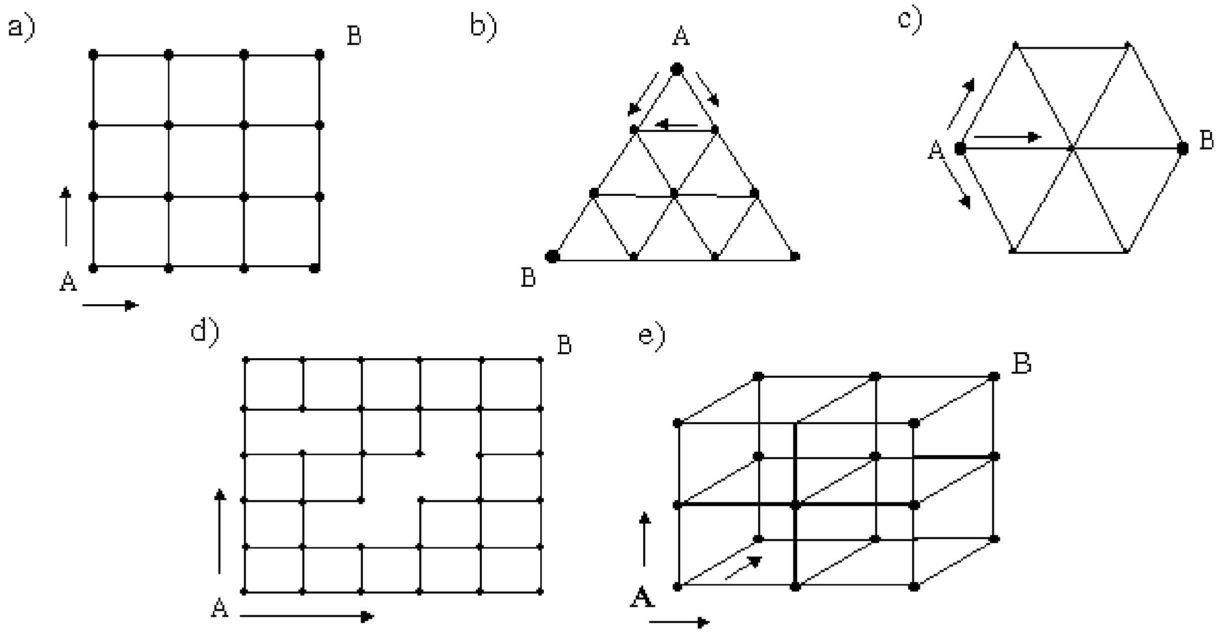
Atbilde.
No dotiem cipariem var izveidot 39 dažādus skaitļus.

Uzdevumi.

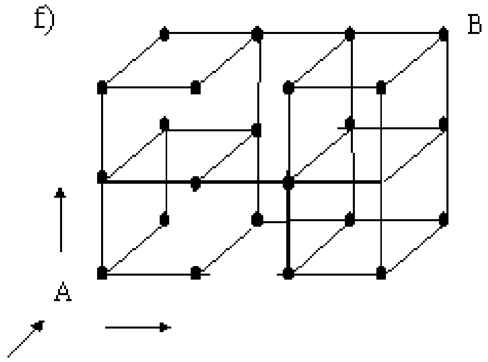
1. Cik dažādu maršrutu ved no pilsētas A uz pilsētu B, ja ceļu karte attēlota zīmējuma?



2. Īpatnējā pilsētā ir īpatnēja ceļu karte. Cik dažādos veidos(dažādos maršrutos) no pilsētas A iespējams nokļūt pilsētā B, ja pieļaujamie kustības virzieni norādīti ar bultiņu?
(Kustības virziena maiņa iespējama tikai vietās, kur zīmējumā attēlots "•".)



f)



3. Cipari 1; 2; 3; 4; 5 veido visus iespējamos skaitļus, kas sastāv ne mazāk kā no trim cipariem. Cik ir šādu skaitļu, ja cipari skaitlī neatkārtojas?

4. Atrisināt 3. uzdevumu, ja cipari skaitlī var atkārtoties.

5. Cik veidos no 8 dažādām grāmatām var izvēlēties dažas, bet ne mazāk kā vienu grāmatu?

6. Grupas veido no 9 cilvēkiem. Cik dažādu grupu var izveidot, lai grupā nebūtu mazāk kā četri cilvēki?

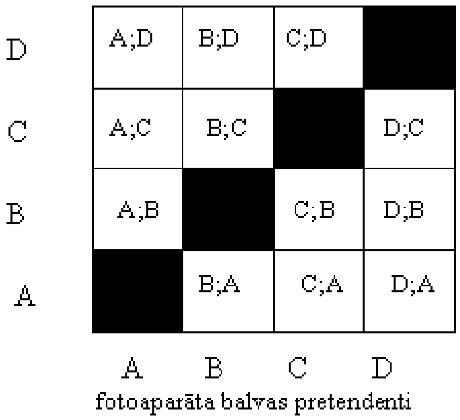
3. VARIĀCIJAS UN PERMUTĀCIJAS

3.1. Variācijas

1. piemērs

Četri loterijas dalībnieki izlozē divas dažādas balvas - viens saņem fotoaparātu, cits radioaparātu. Cik dažādos veidos dalībnieki izlozē laimestus, ja katrs var saņemt ne vairāk kā vienu balvu?

Atrisinājums.



Apzīmēsim loterijas dalībniekus ar burtiem A;B;C;D. Pie kvadrāta $4\cdot4$ pamata izvietosim dalībniekus, kas var laimēt fotoaparātu, bet pie kvadrāta sānu malas - dalībniekus, kas var laimēt radioaparātu. Tā kā viens dalībnieks nevar laimēt abas balvas, tad daļu kvadrātiņu aizkrāsosim. Sadalot balvas ir svarīgi, kurš saņem radioaparātu, kurš fotoaparātu, tādēļ neaizpildītajos kvadrātiņos vispirms ierakstam dalībnieku, kas saņem radioaparātu, tad to, kas -fotoaparātu.

Neaizkrāsoto kvadrātu skaits ir dažādo veidu skaits, kā loterijas dalībnieki var izlozēt balvas savā starpā.

Atbilde.

Loterijas dalībnieki balvas var izlozēt 12 veidos.

2. piemērs.

Finālsacensībās piedalās 6 komandas. Cik veidos tās var sadalīt savā starpā bronzas, sudraba un zelta medaļas?

Atrisinājums.

Sacensībās piedalās 6 komandas, apzīmēsim tās ar burtiem A; B; C; D; E; F. Visas finālturnīra komandas veido komandu kopu, kurā katra komanda ir šīs kopas elements. Aplūkosim, dažus iespējamos ”pirmos trijniekus” - apakškopas no trim komandām. Pirmo vietu var izcīnīt A komanda, otro - D, trešo - E komanda. Šādu vietu secību apzīmēsim A; D: E, cita ” pirmā trijnieka ” (apakškopas) kārtība varētu būt D; A; E. Abi aplūkotie trijnieki atšķiras ar komandu (elementu) secību, kārtību. Aplūkosim vēl divus ”pirmos trijniekus” (apakškopas) - A; D; E un A; B; C. šie ‘’trijnieki’’ savā starpā atšķiras ar komandām (elementiem).

Lai noteiktu iespējamo ”pirmo trijnieku” (apakškopu) skaitu, mums jāaplūko no 6 komandām (dotā kopa) visi iespējamie sakārtotie ”pirmie trijnieki ” (apakškopas). To skaita aprēķināšanai izmantosim kombinatorikas reizināšanas likumu: 1. vietu var ieņemt jebkura no 6 komandām, 2. vietu - jebkura no 5 komandām (viena jau ir 1. vietā), 3. vietu - jebkura no 4 komandām (viena jau ir 1., otra 2. vietā). Tātad iespējamo komandu trijnieku skaits ir $6\cdot5\cdot4=120$.

Definīcija.

***n* elementu kopas <u>sakārtotu</u> k ($k \le n$) elementu apakškopu sauc par variāciju.**

Iepriekš aplūkotajā piemērā, komandu A; D; E un D; A; E un A; B; C ”pirmie trijnieki” (sakārtotas apakškopas) ir variācijas no 6 elementiem pa trim; tie atšķiras gan ar elementiem, kas veido apakškopas, gan ar elementu kārtību.

Teorēma.

Dažādu variāciju skaits no n dažādiem elementiem, pa k elementiem katrā variācijā, ir vienāds ar *k* pēc kārtas sekojošu atbilstošu naturālo skaitļu reizinājumu, kurā pirmais reizinātājs ir *n*, bet pēdējais n - k +1. To apzīmē un pieraksta:

$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ (lasa ‘’variācijas no *n* elementiem pa *k*’’).

Pierādījums.

Dota *n* elementu kopa. Veidojam visas iespējamās virknītes no *k* ($k \le n$) elementiem. Pirmo elementu var izvēlēties *n* veidos, otro – *n* - 1 veidā, jo viens no *n* elementiem jau izvēlēts, trešo – *n* - 2 veidos, jo divi no elementiem jau izvēlēti, utt., līdz jāizvēlas *k*-tais elements. Pirms pēdējā – *k*- tā elementa izvēles ir atlicis $n-(k-1)=n-k+1$ neizvēlēts elements, tātad *n* - to var izvēlēties $n-k+1$ veidā. Izmantojot kombinatorikas reizināšanas likumu variācijas var izraudzīties

$$n\cdot(n-1)(9n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) \text{ veidos.}$$

Izmantojot faktoriāla pierakstu:

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

3. piemērs.

Akciju sabiedrībai no 10 akcionāriem jāievēl valde - 3 akcionāri: valdes priekšsēdētājs, priekšsēdētāja vietnieks, grāmatvedis. Cik veidos to var izdarīt?

<u>Atrisinājums.</u>

Valdi veido 3 akcionāri. Svarīgi ir arī tas, kurš no tiem ir priekšsēdētājs, vietnieks un grāmatvedis. Dažādās valdes atšķiras gan ar akcionāriem, kas to veido, gan ar pienākumu sadalījumu starp tiem. Valdes ‘’trijnieki’’ veido A_{10}^3 variācijas , to skaitu aprēķina:

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$$

Atbilde. Valdi var veidot 720 veidos.

Uzdevumi.

1. Cik dažādu vārdu var izveidot no vārda ”ziema” četriem burtiem(vārds var būt bez nozīmes, burti vārdā neatkārtojas)?

2. Cik dažādu 5 ciparu skaitļu var izveidot no cipariem

a) 1; 2; 3; 4; 5; 6;

b) 4; 6; 7; 8; 9; 3; 1;

c) 3; 2; 5; 7; 8; 1, ja cipari skaitlī neatkārtojas?

3. Patstāvīgi noformulēt uzdevuma nosacījumus, ja tā atrisinājumu izsaka izteiksme:

a) A_7^3; b) A_5^2; c) $A_3^1 + A_3^2$; d) $2 \cdot A_7^3$.?

4. Klasē ir 20 skolnieku. Skolotājs stundā strādā ar 3 vai 4 skolēnu grupām, pie kam katram skolēnam grupā ir jārisina savas grupas problēmas daļa(grupa uzdevumu ir veikusi, ja katrs tās dalībnieks ir atrisinājis savu problēmas daļu). Cik veidos var klasi sadalīt 3 vai 4 skolēnu grupās?

5. Karogā iespējamas četras horizontālas krāsu joslas, katra josla savā krāsā. Cik dažādu karogu iespējams izgatavot, ja ir 8 dažādu krāsu audumi?

6. Valstī dzīvo 10 dažādu tautību cilvēki. Kāds lielākais skaits vārdnīcu nepieciešams šai valstij?

7. Klasē ir 30 skolnieki. Cik veidos var sastādīt komandu stafetes 100 + 200 +400 + 800 m skrējienam?

8. Atrisināt vienādojumus:

$A_x^2 = 42$; b) $A_x^3 = 56x$; c) $A_{x-2}^3 = 4A_{x-3}^2$;

9. Studentu kopmītnes istabiņā dzīvo 3 studenti un viņiem ir 4 krūzītes, 6 apakštasītes un 5 tējkarotītes. Visi priekšmeti ir dažādi. Cik veidos viņi var uzklāt tējas galdu?

3.2. PERMUTĀCIJAS

4. piemērs.

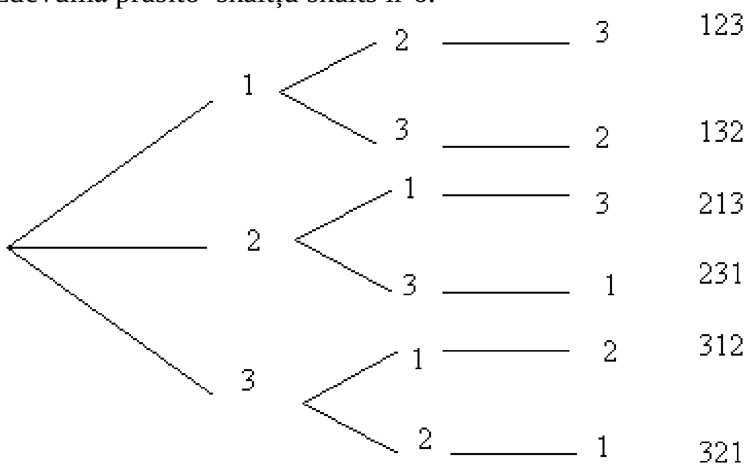
Cik dažādus trīsciparu skaitļus var izveidot no cipariem 1; 2; 3, ja cipari skaitlī neatkārtojas?

Atrisinājums.

Veidojot jaunos skaitļus, jāizmanto visi dotās kopas elementi – cipari; jaunizveidotie skaitļi viens no otra atšķiras tikai ar ciparu kārtību. Šie trīsciparu skaitļi veido īpašas variācijas:

$$A_4^3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$$

Atbilde. Uzdevumā prasīto skaitļu skaits ir 6.



Definīcija.

Variācijas no dažādiem *n* elementiem pa *n* elementiem katrā variācijā sauc par permutācijām no *n* elementiem.

Iepriekšējā piemērā skaitļi 1; 2; 3; 4 un 4; 2; 3; 1 ir divas permutācijas no 4 elementiem. Permutācijas veido no visiem kopas elementiem un tās atšķiras viena no otras tikai ar elementu kārtību.

Teorēma.

Permutāciju skaitu no *n* elementiem skaitu apzīmē P_n **un aprēķina** $P_n = n!$

Pierādījums.

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

5. piemērs.

Novada zinātniskās biedrības konferencē pieteikti 7 referāti. Cik veidos var noteikt referātu noklausīšanās kārtību?

Atrisinājums.

Sarakstā jāiekļauj 7 referenti, divi dažādi saraksti atšķirsies viens no otra tikai ar referātu kārtību, tātad dažādie saraksti ir permutācijas.

$$P_7 = 7! = 5040$$

Atbilde.

Referentu kārtību var noteikt 5040 veidos.

Uzdevumi.

1. Rindā jānostāda 30 skolēni. Cik dažādu rindu iespējams izveidot?

2. Cik dažādu piecciparu skaitļu, ja cipari skaitlī neatkārtojas, var izveidot no cipariem:

a) 7; 8; 3; 2;

b) 4; 5; 6; 7?

3. Uz viesībām ieradušies ģimenes draugi – 7 pāri (vīrs un sieva). Cik dažādos veidos visus var sasēdināt pie apaļā galda, ja ģimenes locekļus šķirt nedrīkst?

4. Cik dažādu vārdu var izveidot no vārda ”teika” burtiem(vārdam var nebūt nozīmes, burti vārdā neatkārtojas)?

5. Cik vārdu ar četriem burtiem var izveidot no vārda ”sapņot” burtiem(vārdam var nebūt nozīmes), katru burtu lietojot vārdā vienu reizi? Cik ir tādu vārdu, kuri nesatur burtu *p*? Cik tādu vārdu, kuri sākas ar *t* un beidzas ar *s*?

6. Patstāvīgi noformulēt uzdevuma nosacījumus, ja tā atrisinājumu izsaka izteiksme:

a) P_8; b) $P_5 + P_4$; c) P_k.

7. Uz izstādes paaugstinājuma var izkārtot rindā 6 mazās keramikas vāzes vai 4 lielās keramikas vāzes, vai 2 grīdas vāzes. Cik veidos var noformēt izstādes paaugstinājumu?

8. Grāmatu plauktā ir $m + n$ grāmatas, no kurām m – daiļliteratūras un n zinātniskās grāmatas.

a) Cik veidos var izkārtot grāmatas grāmatu plauktā, lai m pirmās būtu daiļliteratūras grāmatas?

b) Cik veidos var izkārtot grāmatas, lai zinātniskās grāmatas atrastos blakus?

3.3. PERMUTĀCIJAS AR ATKĀRTOJUMIEM

6. piemērs.

Cik dažādu piecciparu skaitļu var izveidot no cipariem 7; 7; 7;5; 4?

Atrisinājums.

Pirmo septītnieku aizstāsim ar burtu A, otro septītnieku ar burtu B, trešo septītnieku ar burtu C. Aplūkosim cik dažādu burtu/ skaitļu virkņu no simboliem A; B; C; 5; 4 var izveidot? Visas dažādās virknes veido permutācijas no 5 elementiem. To skaits $P_5 = 5!$

Aplūkosim virknes A; B; 5; 4; C, B; A; 5; 4; C, B; A; 4; C; 5 utt. Šādi uzrakstītās virknes ir dažādas. Ja uzrakstītu šīs virknes ar dotajiem cipariem un uzskatītu ka katra virkne veido piecciparu skaitli – 77547; 77547; 77475 utt., tad starp tiem būtu vairāki vienādi piecciparu skaitļi. Visus vienādos skaitļus var sadalīt grupās. Katrā šādā grupiņā būs tik vienādu piecciparu skaitļu, cik veidos var izteikt sakārtotas virknes no elementiem A; B; C – P_3. Atšķirīgo piecciparu skaitļu skaits būs

$$\frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

Atbilde. dažādo skaitļu ir 20.

Definīcija.
Permutācijas no *n* elementiem, starp kuriem ir arī vienādi elementi, sauc par permutācijām ar atkārtojumiem.

Iepriekšējā uzdevumā veidojām permutācijas no 5 elementiem, starp kuriem trīs elementi ir vienādi (atkārtojas). Kopas veidotās permutācijas ir permutācijas ar atkārtojumiem.

Teorēma
Permutāciju skaitu no *n* elementiem ar viena elementa $k(k \le n)$ atkārtojumiem apzīmē ar

$P_{n(k)}$ **un to skaitu aprēķina:**

$$P_{n(k)} = \frac{n!}{k!}$$

8. piemērs.

Cik dažādu vārdu var izveidot no vārda ”tautasdziesma” 13 burtiem (vārdam var nebūt nozīmes)?

Atrisinājums.

Vārdā ir 13 burtu, no tiem 2 – ” t ” , 2 – ” s ”, 3 – ” a ”, pārējie seši burti sastopami vārdā vienu reizi.

Mainot vietām burtus *z* un *u*, iegūsim citu vārdu. Šie vārdi veido permutācijas. Mainot vietām abus burtus *t*, vārds nemainās, mainot vietām kādus no trim burtiem *a*, vārda jēga arī nemainās, līdzīgi ar burtu *s*. Veidojas permutācijas ar atkārtojumiem. Spriežot līdzīgi kā iepriekšējā piemērā, dažādo vārdu skaitu aprēķināsim

$$P_{13(2,2,3)} = \frac{13!}{2!2!3!}$$

Atbilde. Šādu dažādu vārdu ir $\frac{13!}{2!2!3!}$.

Pēdējā piemērā aplūkojām permutācijas no kopas, kurā ir vairākas apakškopas(*t burtu, s burtu, a burtu apakškopas*) ar vienādiem elementiem.

Teorēma

***n* elementu kopas ar *t* vienādu elementu apakškopām permutāciju skaitu aprēķina:**

$$P_{n(k_1;k_2;...k_t)} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!...k_t!}$$

***vienādo elementu skaits katrā apakškopā* (** $k_1 + k_2 + ... + k_t \leq n,$ *kur* $k_1; k_2; \ldots k_t$ **) .**

Uzdevumi.

1. Cik dažādu vārdu var izveidot no vārda ”kabata” visiem burtiem(vārdam var nebūt nozīmes) ? Cik vārdos trīs vai divi burti atrodas blakus?

2. Cik veidos 10 skolēnu grupu var sadalīt divās grupās, kur vienā grupā būtu 4 skolnieki, bet otrā grupā 6 skolnieki?

3. Cik dažādu vārdu var izveidot, pārkārtojot burtus vārdā ”kosmoss” (vārdam var nebūt nozīmes)? Cik tādu vārdu, kuros visi trīs burti ”s” neatrodas blakus?

4. Patstāvīgi noformulēt uzdevuma nosacījumus, ja tā atrisinājumu izsaka izteiksme:

a) $P_{4(2)}$; b) $P_{6\,(2;\,3)}$; c) $P_{8\,(4;\,2)} - P_{8(4)}$ d) $5 \cdot P_{7(3;\,2)}$

3.4. Variācijas ar atkārtojumiem

9. piemērs.

Cik dažādu trīsciparu skaitļu var izveidot no cipariem 1, 2, 3, 4, 5?

Atrisinājums.

Aplūkosim dažus šādus trīsciparu skaitļus 111, 112, 211, 113, 122, 144 utt. Skaitļi atšķiras gan ar pašiem cipariem, gan ar to secību. Skaitlī cipari var atkārtoties. Šādi veidotie skaitļi veido variācijas, kurās skaitļi var atkārtoties.

Aprēķināsim šādu skaitļu skaitu. Par pirmo ciparu var izvēlēties jebkuru no 5 cipariem, par otro ciparu var izvēlēties jebkuru no 5 cipariem, par trešo ciparu varam izvēlēties jebkuru no 5 cipariem. Izmantojot kombinatorikas reizināšanas likumu dažādo iespējamo skaitļu skaitu apzīmēsim un aprēķināsim $\overline{A}_5^3 = 5^3$.

Atbilde. Dažādo skaitļu skaits 125.

Definīcija.

***n* dažādu elementu kopas veidotas sakārtotu *k* elementu kopas, kurās elementi var atkārtoties, sauc par variācijām ar atkārtojumiem.**

Iepriekšējā piemērā no pieciem cipariem veidotie trīsciparu skaitļi ir variācijas no pieciem elementiem pa trīs elementiem ar atkārtojumiem, jo skaitļi var veidoties gan no dažādiem, gan no vienādiem cipariem..

Teorēma

Variāciju skaitu no n elementiem pa k ar atkārtojumiem apzīmē $\overline{A}_n^k$ un to aprēķina $\overline{A}_n^k = n^k$.

Uzdevumi.

1. Cik dažādus sešu burtu vārdus var sastādīt no vārda ”saule” burtiem(vārdiem var nebūt jēga)?

2. Cik dažādus četru burtu vārdus var sastādīt no vārda ”siena” burtiem(vārdiem var nebūt jēga)? Cik būs tādu vārdu, kuros nav patskaņa ”a”?

3. Pilsētā telefona numuri sastāv no 6 cipariem. Cik dažādu telefonu numuru var būt šajā pilsētā, ja telefona numura 1. cipars nav lielāks par 5?

4. Sastādīt nosacījumus uzdevumam, kura atrisinājumu izsaka:

a) $\overline{A}_5^3$; b) $\overline{A}_7^4$; c) $\overline{A}_3^6$; d) $\overline{A}_3^5 - \overline{A}_3^4$; e) $4 \cdot \overline{A}_6^4$;

5. Četri skolnieki kārto eksāmenu. Cik veidos viņu zināšanas var būt novērtētas ar atzīmi no 1 līdz 10, ja zināms, ka neviens no viņiem nesaņēma mazāk nekā 5?

6. Cik dažādu atslēgu var pagatavot, ja robiņus var vīlēt 5 kolonās ar 4 dažādiem izmēriem (skat. zīm.)?

Dažādi uzdevumi par variācijām un permutācijām

1. Pastā ir 6 dažādas aploksnes un dažādas markas. Cik veidos var izvēlēties pastmarku ar aploksni?

2. Klases vakarā piedalās 12 jaunieši. Lai spēlētu spēli, visiem jānostājas aplī. Cik dažādos veidos to var izdarīt?

3. Kādam jokdarim ir 8 dažādu krāsu cimdu pāri. Cik veidos jokdaris var izvēlēties vienu cimdu labajai rokai un vienu cimdu kreisajai rokai, lai tie būtu dažādās krāsās?

4. Cik dažādu piecciparu skaitļu var izveidot no cipariem

a) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7,

b) 2; 4; 6; 8; 9,

c) 3; 2; 1; 5; 4, ja skaitļos cipari nedrīkst atkārtoties?

5. Atrisināt iepriekšējo uzdevumu, ja cipari drīkst atkārtoties.

6. Atrisināt vienādojumus un nevienādības

a) $20A_{x-2}^{3} = A_x^5$; e) $A_x^5 \leq 18A_{x-2}^4$; i) $A_{x-3}^2 \cdot A_{x+4}^5 > 0$;

b) $A_{2x}^3 = 14A_x^5$; f) $A_{x-2}^3 > 5x(x-1)$; j) $A_{x+2}^2 \cdot A_{x-2}^2 < 0$;

c) $A_7^3 = 42x$; g) $A_x^4 < 15A_{x-2}^5$; k) $\dfrac{A_{x+2}^3}{A_{x-2}^2} < 0$.

d) $A_x^2 = 13$; h) $A_x^5 > 30A_{x-2}^4$;

7. Atrisināt vienādojumu:

a) $\dfrac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$; b) $\dfrac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89$.

8. Cik veidos no 9 cilvēkiem var izvēlēties 4 vai 3 personas dažādu pienākumu veikšanai?

9. Vāzē ir 7 dažādu šķirņu puķes. Cik veidos var izraudzīties 3 vai 5 puķes?

10. Loterijas biļetei ir sērija un biļetes numurs. Biļetes numurs ir skaitlis no 1 līdz 100, bet sērijas numurs ir veidots no 6 cipariem. Cik dažādu biļešu piedalās izlozē? Kāda daļa biļešu ir laimīgās, ja laimestu skaits ir 10^5 ?

11. Liftā atrodas 8 pasažieri. Lifts var apstāties jebkurā no 10 stāviem. Cik veidos pasažieri var izkāpt?

4. KOMBINĀCIJAS

4.1. KOMBINĀCIJAS BEZ ATKĀRTOJUMIEM.

1.Piemērs.
Loterijā piedalās trīs dalībnieki un izlozē divas vienādas balvas. Viens dalībnieks nevar iegūt abas balvas. Cik dažādos veidos dalībnieki var saņemt balvas?

<u>Atrisinājums.</u>

	C	B	A
A	A,C	A,B	
B	B,C		B,A
C		C,B	C,A

Apzīmēsim dalībniekus ar burtiem A; B; C un izvietosim burtus kvadrāta $3\cdot 3$ divās malās. Ierakstīsim kvadrāta rūtiņās iespējamos balvu izlozes sadalījumus - A,C (ieraksts nozīmē, ka balvas saņem dalībnieks A un B). Tā, kā viens dalībnieks nevar laimēt abas balvas, tad daļu kvadrātiņu (kvadrātiņus, kas raksturo to, ka abas balvas saņem viens un tas pats dalībnieks) aizkrāsosim. Ieraksti A,B un B,A, B,C un C,B, C,A un A,C nozīmē vienu un to pašu, jo balvas ir vienādas. Lai noteiktu prasīto skaitu, tabulā aizpildīto rūtiņu skaits jādala ar 2.

Atbilde.
Izlozes dalībnieki balvas var izlozēt 3 veidos.

2.Piemērs.
Ziemas olimpiskajās spēlēs priekšsacīkstēs piedalās 9 komandas, no kurām 4 iekļūst finālā un sāk cīņu par medaļām no jauna. Cik dažādu fināla komandu "četrinieku" var būt?

<u>Atrisinājums.</u>
Apzīmēsim šīs 9 komandas A; B; C; D; E; F; G; H; I. Ja priekšsacīkšu rezultātā komandas varētu sarindot 1., 2., 3., 4. vietā, tad no deviņām komandām varētu izveidot A_9^4 dažādus četriniekus, piemēram, A; B; F; H vai A; F; B; H, vai A; D; H; E. Bet, tā kā finālā nav svarīga komandu secība, tad komandu četrinieks A; B; F; H un A; F; B; H ir viena fināla komandas.
Vienādo sakārtoto četrinieku skaits ir P_4 . No katra vienādo sakārtoto četrinieku skaita izvēlēsimies vienu komandu četrinieku (vietu secība finālā netiek ņemta vērā). Nesakārtoto fināla komandu četrinieku skaits ir $\frac{A_8^4}{P_4}=\frac{9!}{5!\cdot 4!}=126$.
Atbilde. Dažādo fināla komandu skaits ir 126.

Definīcija.
***n* dažādu elementu kopas apakškopu, kas satur k (k$\leq$n) dažādus elementus, sauc par kombināciju no *n* elementiem pa *k* elementiem.**

Iepriekšējā piemērā aplūkojām 9 elementu kopas 4 elementu nesakārtotas apakškopas - kombinācijas.
Kombinācijās savā starpā atšķiras tikai ar elementiem, nevis ar to kārtību.

Teorēma.
Kombināciju skaitu no *n* elementiem pa *k* elementiem apzīmē $C_n^k \,(vai\binom{k}{n})$ un aprēķina $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ **.**

Pierādījums.

Aplūkosim dažādu *n* elementu visas iespējamās nesakārtotās apakškopas pa *k* elementiem, to skaits ir C_n^k. Katru šādu apakškopu no *k* elementiem var sakārtot P_k veidos. Pēc kombinatorikas reizināšanas likuma no *n* elementiem sakārtoto *k* elementu apakškopu skaits ir $C_n^k \cdot P_n$, bet tās ir variācijas un to skaits ir A_n^k, tādēļ:

$$C_n^k \cdot P_n = A_n^k, \text{ no kurienes } C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3.Piemērs.
Futbola turnīrā piedalās 15 komandas. Katra komanda spēlē ar visām citām vienu reizi. Cik spēles paredzētas turnīrā?

Atrisinājums.
Vienā spēlē piedalās divas komandas, spēle notiek starp tām. Aplūkojam komandas A un komandas B spēli - spēles komandu pāris A;B un B;A attiecas uz vienu un to pašu spēli. Visu spēļu skaitu noteiks kombināciju skaits no 15 komandām pa 2. $C_{15}^2 = \dfrac{15!}{2!\cdot 13!} = 105$.

Atbilde. Turnīrā paredzētas 105 spēles.

4.Piemērs.

Uz galda ir 7 dažādas konfektes un 4 dažādu šķirņu cepumi. Cik veidos zēns var paņemt no galda trīs cepumus un četras konfektes? Cik veidos zēns var paņemt trīs saldumus?

Atrisinājums.

Kārtība, kādā zēns paņem 4 konfektes, nav svarīga (ieliekot konfektes kabatā, to kārtība izjuks). Izvēles veido kombinācijas no 7 konfektēm pa 4. Kārtība, kādā no 4 cepumiem zēns izvēlas trīs, nav svarīga, tātad tās ir kombinācijas no 4 saldumiem pa trīs. Izmantojot kombinatorikas reizināšanas likumu, veidu skaits, kādos zēns var paņemt trīs cepumus un četras konfektes, ir

$$C_4^3 \cdot C_7^4 = \frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 140$$

Atbildot uz otru jautājumu, jāaplūko vairākas iespējas, kā var paņemt trīs saldumus.

3 cepumus	iespējams izvēlēties	C_4^3	veidos
2 cepumus un 1 konfekti	iespējams izvēlēties	$C_4^2 \cdot C_7^1$	veidos
1 cepumu un 2 konfektes	iespējams izvēlēties	$C_4^1 \cdot C_7^2$	veidos
3 konfektes	iespējams izvēlēties	C_7^3	veidos
trīs saldumus	iespējams izvēlēties	$C_4^3 + C_4^2 \cdot C_7^1 + C_4^1 \cdot C_7^2 + C_7^3$	veidos.

Izmantojot kombinatorikas reizināšanas un saskaitīšanas likumus, nosaka dažādo izvēļu veidu skaitu:

$$C_4^3 + C_4^2 \cdot C_7^1 + C_4^1 \cdot C_7^2 + C_7^3 = 4 + 6 \cdot 7 + 4 \cdot 21 + 35 = 106 \ .$$

Atbilde: Trīs cepumus un četras konfektes zēns var paņemt 140 veidos, bet trīs saldumus – 106 veidos.

Ja no elementu kopas nav jāizvēlas neviens elements, tad šo izvēli var veikt vienā veidā - neizvēlēties nevienu elementu . Tāpēc uzskata, ka $C_n^0 = 1$.

Uzdevumi.

1. Aprēķināt a) C_9^3; b) C_9^6; c) C_3^n; d) C_{n+k-1}^k.

2. Cik veidos no 8 cilvēkiem var izvēlēties komisiju 4 cilvēku sastāvā?

3. Jaunsaimniekam nepieciešami vasaras strādnieki. Cik veidos darba biržā jaunsaimnieks var salīgt 4 strādniekus no 10?

4. Uz riņķa līnijas izvēlēti 12 dažādi punkti. Cik dažādu hordu iespējams novilkt? Cik dažādu trijstūru nosaka šie punkti?

6. Sastādīt nosacījumus uzdevumam, kura atrisinājumu nosaka:

a) C_5^3; b) C_7^2; c) $2\cdot C_6^4$; d) $C_5^2 + C_5^3$ e) $C_n^k + C_n^t$ (k;t $\langle$ n).

7. Cik veidos no deviņām grāmatām var izvēlēties kaut kādas četras? Cik veidos var veikt šo pašu izvēli tā, lai starp grāmatām būtu tieši viena noteikta grāmata? Cik veidos var veikt izvēli, lai starp paņemtajām grāmatām nebūtu tieši viena, iepriekš noteiktā grāmata?

8. Kāršu komplektā 26 kārtis. Spēlētājs saņem 8 kārtis. Cik dažādu sadalījumu var būt? Cik būs tādu sadalījumu, kuros būs kreica dāma? Cik būs sadalījumu, kuros nebūs kreica dāmas?

9. Atrisināt vienādojumus:

a) $C_n^2 = 45$; b) $C_n^8 = C_n^{12}$; c) $C_5^3 = \dfrac{1}{5}C_{n+2}^4$;

d) $3C_{2n}^{n-1} = 5C_{2n-1}^n$; e) $\dfrac{C_{2n}^{n+1}}{C_{2n+1}^{n-1}} = \dfrac{7}{13}$; f) $\dfrac{C_{2n-1}^n}{C_{2n}} = \dfrac{9}{17}$.

10. Atrisināt vienādojumus:

a) $12C_n^1 + C_{n+4}^2 = 126$; b) $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$;

c) $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 15(n+2)$; d) $12C_{n+3}^{n-1} = 55\,A_{n+1}^2$.

11. Atrisināt nevienādības:

a) $C_{10}^{x-1} \rangle\ 2C_{10}^x$; b) $C_n^5 \langle\ C_n^4$; c) $C_n^5 \rangle\ C_n^4$;

d) $C_{2n}^7 \rangle\ C_{2n}^5$; e) $C_x^{x-2} \langle\ 45$; f) $C_{119}^{k-1} \langle\ C_{19}^k$

12. Futbola turnīrā izspēlētas 153 spēles. Katras divas komandas savā starpā spēlēja vienu reizi. Cik komandu piedalījās turnīrā?

13. Džentlmeņu klubā katrs dalībnieks sasveicinās ar katru. Cik džentlmeņu ir klubā, ja kopā pa visiem tika veikti 190 rokas spiedieni?

14. Cik punktu plaknē, no kuriem nekādi trīs, neatrodas uz vienas taisnes, ja šiem punktiem var izveidot 56 dažādus trijstūrus? Cik četrstūru var izveidot no šiem punktiem?

15. Hokeja komandā ir 2 vārtsargi, 7 aizsargi, 10 uzbrucēji. Cik dažādos veidos treneris var noteikt starta sešinieku, kurā jābūt vienam vārtsargam, diviem aizsargiem, trijiem uzbrucējiem?

16. 20 pasažieri vēlas braukt divstāvu autobusā. Otrajā stāvā ir 8 sēdvietas, pirmajā stāvā – 12 sēdvietas. Četri pasažieri nevēlas braukt pirmajā stāvā, bet pieci vēlas braukt 1. stāvā.
Cik veidos iespējams izvietot pasažierus autobusā, vēlmes neņemot vērā?
Cik veidos var izvietot pasažierus autobusā, ievērojot viņu vēlmes?

17. 20 cilvēki jāsadala divās grupās – pirmajā 16, otrajā 4. Cik veidos to var izdarīt?

18. Azarta spēle: Kurš atminēs 6 skaitļus no 45?
Spēlētājs atzīmē 6 skaitļus no 45, pēc tam notiek izloze; lielāko laimestu saņem tas, kurš atminējis visus sešus skaitļus.
Cik dažādu sešu skaitļu ”komplektu” var atzīmēt?
Cik būs tādu dažāda sešu skaitļu ”komplektu”, kuros 5 pareizi uzminēti skaitļi?
Cik būs tādu dažādu sešu skaitļu ”komplektu”, kuros 4 pareizi uzminēti skaitļi?
Cik būs tādu dažādu sešu skaitļu ”komplektu”, kuros 3 pareizi uzminēti skaitļi?

19. Cik dažādu skaņu var uzspēlēt uz klavieru taustiņiem, ja izmanto 10 taustiņus un vienu skaņu veido ne mazāk kā trīs taustiņi vienlaicīgi?

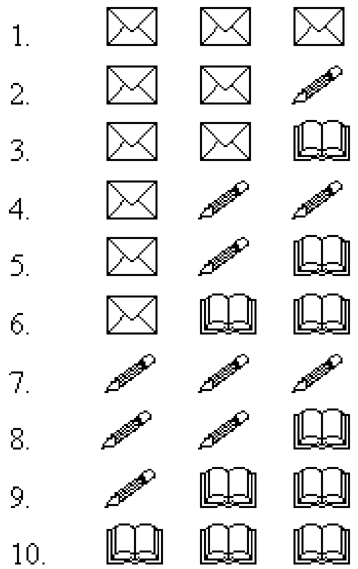
20. Klasē ir 10 zēnu un 10 meiteņu. Cik veidos no klases var izraudzīties četrus skolēnus, ja četriniekā jābūt vismaz vienai meitenei un vienam zēnam?

21. No 2 matemātiķiem un 10 ekonomistiem jāsastāda komisija ar vismaz vienu matemātiķi, kas sastāv no 8 cilvēkiem,. Cik veidos to var izdarīt?

4.2. Kombinācijas ar atkārtojumiem

5.piemērs.
Maira grāmatnīcā nolēmusi iegādāties trīs lietas. Pārdevējs viņai piedāvā iegādāties aploksnes, grāmatu vai pildspalvu. Cik dažādus pirkumus meitene var iegādāties?

<u>Atrisinājums.</u>



Pirkumi var atšķirties tikai ar lietām, ko meitene iegādājas. Kārtība, kādā Maira iegādājas lietas, nav svarīga. Uzskaitīsim visus iespējamos pirkumus.
1. pirkums var būt trīs aploksnes;
2. - divas aploksnes un viena pildspalva;
3. - divas aploksnes un viena grāmata;
4. - viena aploksne un divas grāmatas;
5. - viena aploksne, viena pildspalva un viena grāmata; u.t.t. .

Visi iespējamie pirkumu veidi attēloti zīmējumā un to skaits ir 10.

Atbilde.
Maira pirkumu var veikt desmit veidos.

6.Piemērs.
Saldumu veikalā ir 4 veidu šokolādes – ”Lukss”, ”Salūts”, ”Zodiaks” un ”Rigonda”. Cik veidos iespējams nopirkt 8 šokolādes?

<u>Atrisinājums.</u>
Ir četru veidu šokolādes, bet, izvēloties 8 šokolādes, izvēlē atkārtojas vairākas viena veida šokolādes. Izvēles secība pirkumu neietekmē, tādēļ dažādie pirkumi ir izvēles, kas līdzīgas kombinācijām, bet ar atkārtojošamies elementiem.
Lai atrisinātu šo uzdevumu, veidosim modeli - skaitļu virkni.
Vispirms aplūkosim, cik šokolādes ”Lukss” ir izvēlētas, un tik vieninieku rakstīsim virknes sākumā. Kad visām izvēlētām šokolādēm ‘’Lukss’’ virknē ir ierakstīti atbilstoši vieninieki, virkni turpinām ar vienu nulli. Tālāk aplūkojam visas šokolādes ”Salūts” un virkni turpinām ar tik vieniniekiem, cik šokolādes ‘’Salūts’’ ir izvēlētas. Kad visām izvēlētām šokolādēm ‘’Salūts’’ atbilstošie vieninieki virknē ir ierakstīti, tad virkni turpinām ar vienu nulli. Tālāk aplūkojam visas šokolādes ‘’Zodiaks’’ un virkni turpinām ar tik vieniniekiem, cik šokolādes ‘’Zodiaks’’ ir izvēlētas. Kad visām izvēlētām šokolādēm ‘’Zodiaks’’ atbilstošie vieninieki virknē ir ierakstīti, tad virkni turpinām ar vienu nulli. Tālāk aplūkojam visas šokolādes ‘’Rigonda’’ un virkni turpinām ar tik vieniniekiem, cik šokolādes ‘’Rigonda’’ ir izvēlētas. Kad visām izvēlētām šokolādēm ‘’Rigonda’’ atbilstošie vieninieki virknē ir ierakstīti, tad virkne ir pabeigta.

Katrā šādā virknē ir tieši astoņi vieninieki, jo jāizvēlas astoņas šokolādes un trīs (4 - 1) nulles, kas atdala dažādo šokolāžu atbilstošos vieniniekus. Tātad visas virknes sastāv no 8 + (4 - 1) elementiem.
. Tabulā aplūkosim dažas virknes un tām atbilstošo šokolāžu skaitu pa šķirnēm:

Pirmā virkne norāda, ka izvēlētas   2 šokolādes ‘’Lukss’’ , 2 šokolādes ”Salūts”, 2 šokolādes ”Zodiaks” un 2 šokolādes ”Rigonda”.
Otrā virkne norāda, ka izvēlētas   3 šokolādes ‘’Lukss’’ , neviena šokolāde ”Salūts”, 3 šokolādes ”Zodiaks” un 2 šokolādes ”Rigonda”.
Trešā virkne norāda, ka izvēlētas   neviena šokolāde ‘’Lukss’’, jo virkne sākas ar nulli , 2 šokolādes ”Salūts”, neviena šokolāde ”Zodiaks” un 6 šokolādes ”Rigonda”.

Šādi uzbūvētam modelim – virknei piemīt īpašība:
katrai pirkuma izvēlei eksistē   tikai viena virkne, dažādām – dažādas; un katrai virknei atbilst viena pirkuma izvēle.

Vieninieku un nullīšu virknēs kopā ir (8 + 4 - 1) elementi. Virknes atšķiras tikai ar elementu kārtību. Dažādās virknes ir permutācijas ar atkārtojumiem, to skaitu nosaka:

$$P_{8+4-1\,(8;3)} = \frac{(8+4-1)!}{8!(4-1)!} = \frac{11!}{8!\cdot 3!} = 165$$

Ievērosim, ka $C_{8+4-1}^{8} = P_{8+4-1(8;3)}$.

Definīcija.

***n* dažādu elementu apakškopas, kas satur *k* elementus, kuri apakškopā var atkārtoties, sauc par kombinācijām ar atkārtojumiem.**

Iepriekšējā piemērā pirkumi, kas sastāv no astoņām četru veidu šokolādēm, ir kombinācijas no četriem elementiem pa astoņi ar atkārtojumiem.

Teorēma.
Kombināciju skaitu ar atkārtojumiem no *n* elementiem pa *k* elementiem apzīmē ar $\overline{C}\,_n^k$ **un to skaitu aprēķina** $\overline{C}\,_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Pierādījums līdzīgs iepriekšējam uzdevumam, tikai šokolāžu veidu ir *n*, bet pircējs vēlas nopirkt *k* šokolādes.

7.Piemērs.

Cik dažādu komplektu pa 8 zīmuļiem katrā komplektā var izveidot no 6 krāsu (zaļš, zils, melns, dzeltens, sarkans, brūns) zīmuļiem?

Atrisinājums.

Tā kā nav svarīgi, kādā secībā zīmuļi ieiet komplektā, tad katrs komplekts ir 6 elementu (krāsu) kombinācija pa 8.

$$\overline{C}\,_6^8 = C_{6+8-1}^8 = \frac{13!}{8!\,5!} = 165$$

Atbilde: var izveidot 165 dažādus komplektus.

Uzdevumi.

1. Pastā ir 10 veidu markas. Cik veidos pastā var nopirkt a) 8; b) 12 markas?

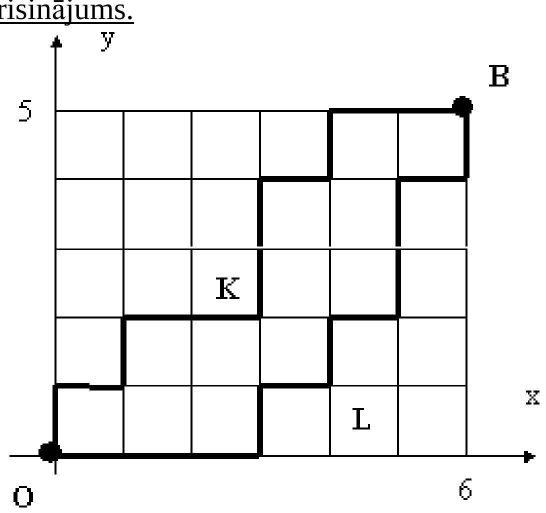
2. Cik domino kauliņu būtu spēlei, ja varētu izmantot ciparus
a) no 0 līdz 7;
b) no 0 līdz 9?

5. DAŽAS KOMBINĀCIJU SKAITA ĪPAŠĪBAS

1.Piemērs.

Koordinātu sistēmas I. kvadrantā veselo rūtiņu režģī atzīmēts punkts B (6;5). Cik veidos, pa īsāko ceļu virzoties pa rūtiņu režģa līnijām, iespējams no koordinātu sistēmas sākuma punktā nokļūt punktā B?

Atrisinājums.



Noskaidrosim cik šādu īsāko ceļu ir? Zīmējumā attēloti divi dažādi ceļi 0KB un OLB), kuru garumus veido 5 nogriežņi vertikāli un 6 nogriežņi horizontāli. Abu ceļu garums ir 11 vienības nogriežņi. Pārliecināsimies, ka tie ir īsākie.
Lai no punkta O nokļūtu punktā B, lai kāds arī nebūtu maršruts, ceļā nepieciešams pakāpties 5 nogriežņus vertikāli uz augšu un 6 nogriežņus horizontāli pa labi. Īsāku ceļu par 11 vienībām nav. Dažādo ceļu ir vairāki.

Dažādo ceļu skaitu nosaka, cik veidos starp 11 posmiem 5 reizes var pakāpties vertikāli uz augšu, tātad C_{11}^{5} veidi vai dažādo ceļu skaits. Spriežot līdzīgi, dažādo ceļu skaitu var noteikt arī, aprēķinot, cik veidos starp 11 posmiem var pavirzīties 6 vienības nogriežņus pa labi, tātad C_{11}^{6}.

Esam konstatējuši; dažādo ceļu skaits ir:

$$C_{11}^{6} = C_{11}^{5} = \frac{11!}{6!5!} = 462.$$

Atbilde. Dažādo ceļu skaits ir 462.

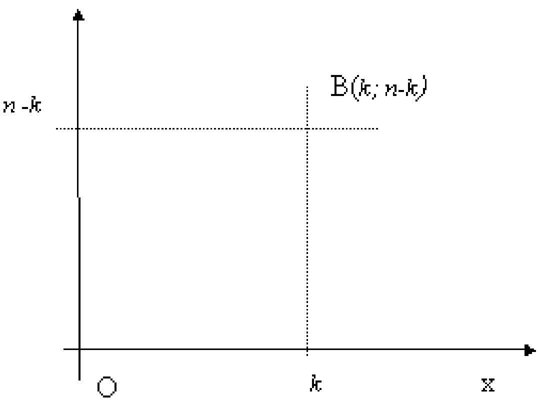
Viens no paņēmieniem kombināciju skaita īpašību pierādīšanai ir modeļu veidošana uzdevumu formā. Dažām īpašībām mēģināsim dot vairākus pierādījumu modeļus.

Teorēma.

$C_n^k = C_n^{n-k}$

1. pierādījums.

Aplūkosim koordinātu sistēmas I. kvadrantā vienību režģī punktu B (*n-k;k*) un noteiksim, cik dažādos veidos no punkta 0 (0:0) pa īsāko ceļu var nokļūt punktā B.



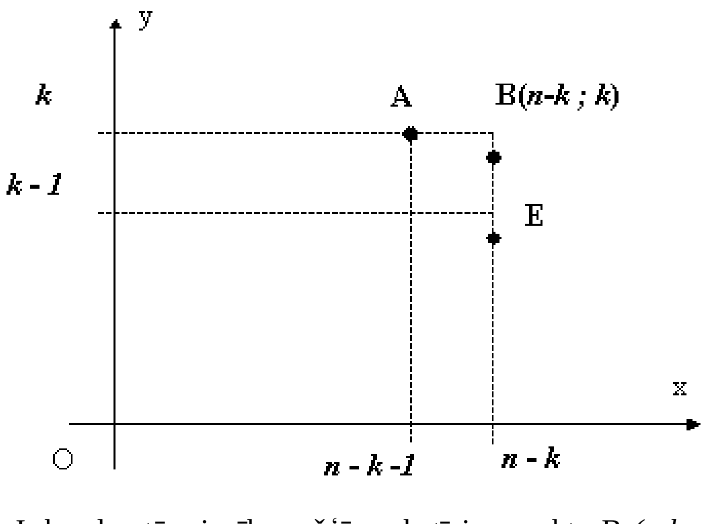
Lai nokļūtu punktā B no punkta 0, nepieciešams k vietās pakāpties vienības nogriezni vertikāli uz augšu, n-k vietās horizontāli pa labi, lai veidotos nepārtraukts ceļš n vienību garumā.
Dažādie ceļi viens no otra atšķiras ar vertikālo un horizontālo nogriežņu secību. Tāpēc , no vienas puses, kopējo dažādo ceļu skaits ir tāds pats, kā dažādo iespēju skaits izvēlēties k vertikālos nogriežņus no n nogriežņiem, t.i., C_n^k. No otras puses, tas ir dažādo iespēju skaits izvēlēties n - k horizontālos nogriežņus starp n nogriežņiem, t.i., C_n^{n-k}. Ģeometriski esam konstatējuši: $C_n^k = C_n^{n-k}$

2. pierādījums.
Izdomāsim uzdevumu - modeli:
Cik veidos starp n cilvēkiem var izdalīt k $(k \le n)$ konfektes (katram vienu)?
<u>Atrisinājums.</u>

Ja k cilvēki saņems konfekti, tad n - k cilvēki nesaņems konfekti. Starp n cilvēkiem k konfektes var sadalīt C_n^k veidos. Šādi dalot, C_n^{n-k} veidos n-k cilvēki nesaņem konfekti. To veidu skaits , cik veidos k cilvēki var saņemt konfekti, ir vienāds ar to veidu skaitu, cik veidos n -k cilvēki nesaņem konfekti: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Teorēma. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

1.pierādījums.



Koordinātu sistēmas I. kvadrantā, vienību režģī apskatīsim punktu B *(n-k; k)*. Cik īsāko ceļu pa vienību režģi no punkta O (0;0) ved uz punktu B (n-k; k)?
Aplūkosim punktus A un E , kas ir pēdējie režģa krustpunkti pirms B (vienu vienību no B). Punktā B var nokļūt vai nu no punkta A, vai punkta E. Visi iespējamie maršruti dalās divās grupās: vieni iet caur punktu A (*n-k-1; k*), otri – caur punktu E (*n-k; k-1*). Izmantojot iepriekšējā

teorēmā pierādīto, īsāko ceļu skaits no 0 līdz A ir izsakāms, kā $C_{n-k-1+k}^{k} = C_{n-1}^{k}$, īsāko ceļu skaits no 0 līdz E ir izsakāms kā $C_{n-k+k-1}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$. Īsāko ceļu skaits no 0 līdz B izsakāms kā C_n^k no vienas puses, un kā $C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1}$ no otras puses! Tātad :

$$C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k .$$

2.pierādījums.

Aplūkosim šādu uzdevumu:

Uz galda ir *n* vienādas konfektes. Jānītis var paņemt *k* vai *k-1* konfekti ($k < n$). Cik veidos viņš to var izdarīt?

k	konfektes Jānītis var paņemt	C_{n-1}^{k}	veidos,
$k-1$	konfekti Jānītis var paņemt	C_{n-1}^{k-1}	veidos
k vai $k-1$	konfekti Jānītis var paņemt	$C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1}$	veidā.

Uzliksim uz galda vienu konfekšu papīriņu konfektes formā! Mānīsim Jānīti ar tukšu konfekti. Tagad uz galda atrodas *n* konfektes. Jānītis ņem *k* konfektes , to var izdarīt C_n^k veidos. Ja starp konfektēm nav tukšās konfektes, tad viņš būs ieguvis *k* konfektes, bet ja starp paņemtajām būs tukšā konfekte, tad viņš patiesībā būs paņēmis *k-1* konfekti. Tādējādi, risinot vēlreiz uzdevumu ar tukšo konfekti, mēs varam noskaidrot, cik veidos *n-1* īstajām konfektēm Jānītis var paņemt *k* vai *k-1* konfekti. Abu uzdevumu rezultātā iegūstam

$$C_n^k = C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1} .$$

Teorēma. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ **.**

Pierādījums.

Aplūkosim uzdevumu.

Istabā ir lustra ar *n* lampiņām. Katra no tām var degt vai nedegt. Cik dažādos veidos iespējams apgaismot telpu?

Atrisinājums.

Ja nedeg neviena no lustras lampām, tad tas iespējams			C_n^0	veidos,
Ja deg	1	no lustras lampām, tad tas iespējams	C_n^1	veidos,
Ja deg	2	no lustras lampām, tad tas iespējams	C_n^2	veidos,
...				
Ja deg	$n-1$	no lustras lampām, tad tas iespējams	C_n^{n-1}	veidos,
Ja deg	n	no lustras lampām, tad tas iespējams	C_n^n	veidos,
Telpu apgaismot iespējams			$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$	veidos.

Aplūkosim citu šā uzdevuma risinājumu, izmantojot kombinatorikas reizināšanas likumu:

spuldzīte var degt vai nedegt, tātad iespējami 2 veidi,
spuldzīte var degt vai nedegt, tātad iespējami 2 veidi,
....
spuldzīte var degt vai nedegt, tātad iespējami 2 veidi,

Pēc kombinatorikas reizināšanas likuma spuldzītes lustrā var degt $2 \cdot 2 \cdot .... \cdot = 2^n$ veidos.

Uzdevumam ir viena atbilde, tādēļ esam pierādījuši

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n .$$

2. piemērs.
Pierādīt identitāti:

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2 .$$

Pierādījums.
Sastādīsim uzdevumu:
Skolā mācās *n* zēni un *n* meitenes. *n* skolēnu pēc skolas turpina studēt augstskolā. Cik dažādas *n* skolēnu grupas var studēt augstskolā?

Atrisinājums.
Kopā ir *2n* skolēnu un tie var turpināt mācības augstskolā C_{2n}^n dažādās grupās.
Noskaidrosim kādas ir augstskolā studējošo meiteņu un zēnu iespējamās kombinācijas grupā :

Var gadīties, ka *k* zēni izvēlas studēt augstskolā un tas iespējams C_n^k veidos, tad *n-k* meitenes izvēlas studēt augstskolā(grupā kopā ir *n* skolēnu), t.i., C_n^{n-k} veidos. Pēc reizināšanas likuma dažādo grupu skaits ir $C_n^k \cdot C_n^{n-k}$.
Aplūkosim tabulu (izmantojot teorēmu $C_n^k = C_n^{n-k}$):

Zēnu skaits, kas studē	Cik dažādos veidos zēni var studēt	Meiteņu skaits, kas studē	Cik dažādos veidos meitenes var studēt	Cik dažādos veidos var aiziet studēt skolnieki
0	C_n^0	*n*	C_n^n	$C_n^0 \cdot C_n^n = (C_n^0)^2$
1	C_n^1	*n-1*	C_n^{n-1}	$C_n^1 \cdot C_n^{n-1} = (C_n^1)^2$
2	C_n^2	*n-2*	C_n^{n-2}	$C_n^2 \cdot C_n^{n-2} = (C_n^2)^2$
...	...	...	...	...
n-1	C_n^{n-1}	*1*	C_n^1	$C_n^{n-1} \cdot C_n^1 = (C_n^{n-1})^2$
n	C_n^n	*0*	C_n^0	$C_n^n \cdot C_n^0 = (C_n^n)^2$

Kopējais *n* dažādo skolēnu grupu, kas studē, skaits ir $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^{n-1})^2 + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Uzdevumi.

1. Pierādīt $C_n^k = C_n^{n-k}$, izmantojot faktoriāla pierakstu.

2. Pierādīt $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, izmantojot faktoriāla pierakstu.

3. Ar ”modeļa” palīdzību pierādīt:
a) $C_n^m + 2C_n^{m+1} + C_n^{m+2} = C_{n+2}^{m+2}$;
b) $C_n^m + 3C_n^{m+1} + C_n^{m+2} + C_n^{m+3} = C_{n+3}^{m+3}$;
c) $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-k}$.

4. Ar ”modeļa” palīdzību noteikt summas vērtību:
a) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$;
b) $C_n^1 + C_n^{23} + C_n^{54} + \ldots$.

5. Atrisināt 3. uzdevumu, lietojot faktoriāla pierakstu.

Pierādīt vienādības:
6. $C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+k-1}^k = C_{n+k}^k$.

7. $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$.

9. $C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \ldots + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}$.

10. $C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = n^3$.

11. $1 + 14C_n^1 + 36C_n^2 + 24C_n^3 = (n+1)^4 - n^4$.

12. $C_n^1 + 14C_n^2 + 36C_n^3 + 24C_n^4 = n^4$

DAŽĀDI UZDEVUMI

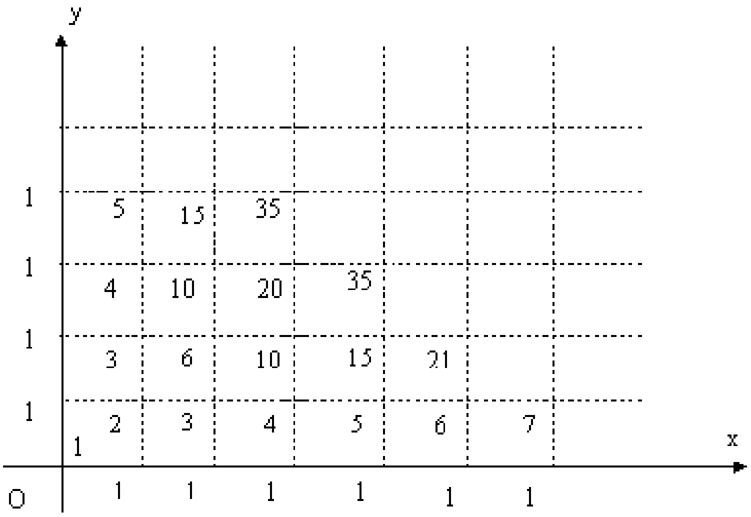
1. 5 valstu pārstāvji ieradušies uz konferenci. Cik dažādos veidos tos var nosēdināt pie apaļā galda?

2. Cik dažādos veidos no 8 dažādām pērlītēm var izveidot apaļas krellītes?

3. Doti cipari 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Cik trīsciparu skaitļu no šiem cipariem var izveidot, ja:
a) visi trīs cipari dažādi,
b) cipari var atkārtoties,
c) skaitlis lielāks par 600,
d) skaitlī cipari var atkārtoties un tas ir pāra skaitlis?

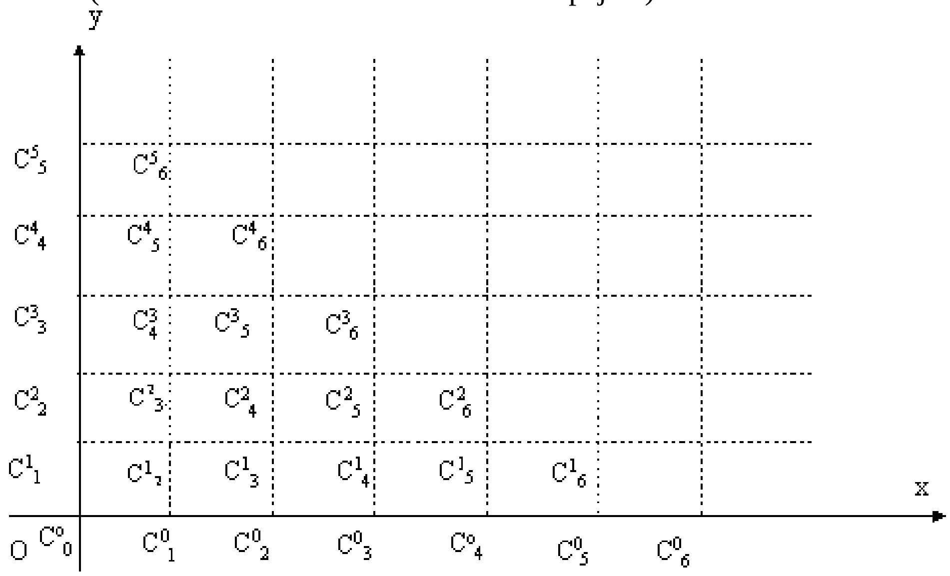
4. Cik veidos 12 skolnieku grupu, kurā ir dvīņi, var sadalīt pa 6 skolniekiem katrā, ja abi dvīņu bērni
a) ir pretējā grupā,
b) ir vienā grupā?

6. ŅUTONA BINOMS

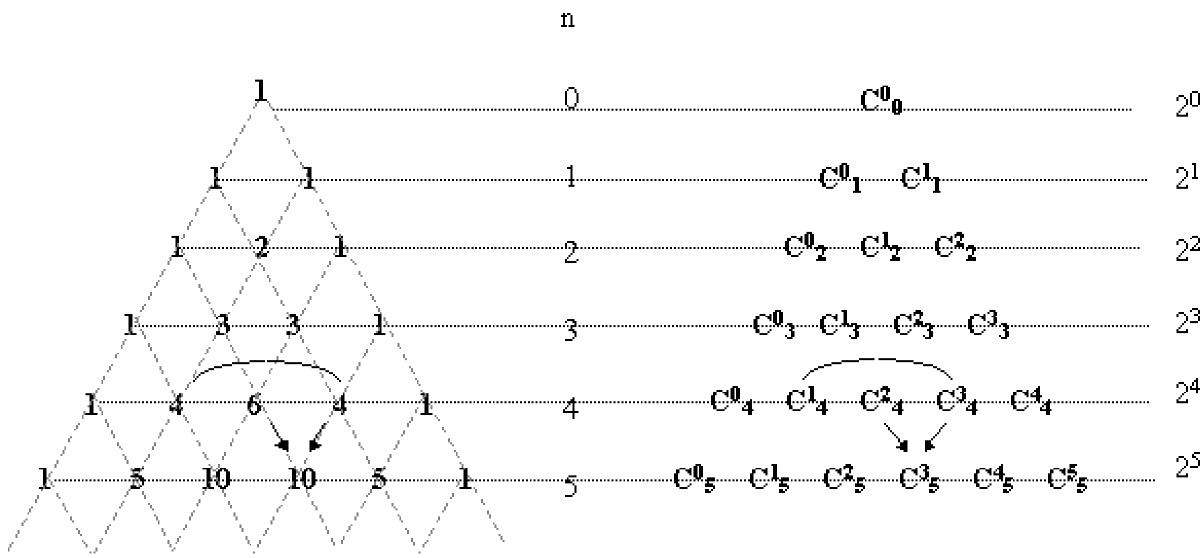


Aplūkojam koordinātu sistēmas I. kvadranta vienību režģi un, izmantojot iepriekšējā paragrāfa 1. piemēra secinājumus, iegūstam, ka īsāko ceļu skaitu, kurus var izvēlēties, lai nokļūtu no koordinātu sistēmas sākuma punkta O(0;0) līdz katram vienību režģa krustpunktam, izsaka attiecīgo kombināciju skaits.

Īpaši varētu jautāt, cik veidos no punkta O var nokļūt punktā O? Atbilde – vienā – nekustēties no vietas (neko nedarīt arī ir viena no rīcības iespējām).



Pārrakstot abas tabulas citā izkārtojumā, iegūst trijstūra veida tabulu.



Šādu koeficienta trijstūri sauc par aritmētisko trijstūri vai par Paskāla trijstūri. Tā katrā *n-tajā* rindiņā ir dažādas kombinācijas no *n* pa *k*, sākot ar C_n^0 līdz C_n^n, pavisam *n+1* ieraksts.

Ja aplūkojam *n*-tās rindiņas visu koeficientu summu, ievērojam, ka tā atbilst rindiņas kārtas numura divnieka *n-ajai* pakāpei (2^n). Šo kombināciju skaita īpašību jau pierādījām kā teorēmu iepriekšējā paragrāfā: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Aplūkojot *n-to* rindiņu, ievērojam, ka šajā rindiņā no galapunktiem vienādi attālināti koeficienti ir vienādi($C_4^1 = C_4^3$ utt.). Šo kombināciju skaita īpašību jau pierādījām kā teorēmu iepriekšējā paragrāfā: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Ja vēlamies papildināt aritmētisko trijstūri ar jaunu rindu, varam rēķināt atbilstošu kombināciju skaitu. Taču, izmantojot iepriekš pierādītu kombināciju skaita īpašības - $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, $\quad 1 = C_n^n = C_n^0$; jaunajā rindiņā pirmo un pēdējo koeficientu ieraksta 1 un pārējos iegūst, attiecīgi summējot iepriekšējās rindiņas koeficientus.

Aplūkosim binoma $(x+a)^n$ naturālās pakāpes, kur $n \in N$:

ja $n = 2$ $\qquad (x + a)^2 = a^2 + 2ax + x^2$,

ja $n = 3$ $\qquad (x + a)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$.

Noteiksim formulu, ar kuras palīdzību būtu ērti noteikt $(x + a)^n$ izvirzījumu. Viens no paņēmieniem ir reizināt:
ja $n = 4$

$$(x + a)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4.$$

Ja pakāpe ir pietiekoši liela, šis ir tehniski garš process.

Uzmanīgi aplūkojot izteiksmes $(x + a)^2$; $(x + a)^3$; $(x + a)^4$, un, izdarot induktīvu minējumu, varam izteikt apgalvojumu, ka $(x + a)^5$ pakāpē būs 5 + 1 - seši saskaitāmie, tie ir:

$$a^5;\quad a^4x;\quad a^3x^2;\quad a^2x^3;\quad ax^4;\quad x^5.$$

Katrs no šiem saskaitāmajiem ir 5 pakāpes izteiksme attiecībā pret reizinājumu $a \cdot x$.
Līdzīgi, binoma $(x + a)^n$ izvirzījums satur $n + 1$ saskaitāmos, kas attiecībā pret reizinājumu $a \cdot x$ visi ir *n-tās* pakāpes izteiksmes:

a^n; $a^{n-1}x$; $a^{n-2}x^2$; ... ; $a^{n-k}x^k$; ... ; x^n.

Atliek noskaidrot saskaitāmo koeficientus. Uzmanīgi aplūkojot $(x + a)^n$ izvirzījumu, ja *n = 2; n = 3; n = 4* un Paskāla trijstūra koeficientus atbilstošajās rindās, secinām, ka, piemēram, izteiksmes $(x + a)^4$ izvirzījumā saskaitāmajam, kas satur reizinājumu x^3a, koeficients ir 4; saskaitāmajam, kas satur reizinājumu x^2a^2, koeficients ir 6; saskaitāmajam, kas satur reizinājumu $x a^3$, koeficients ir 4; utt.!

Paskāla trijstūra 4. rindiņas koeficienti :	1 4 6 4 1
Izvirzījums:	$(x + a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$

Iepriekš aplūkotie piemēri, ļauj izvirzīt hipotēzi par izvirzījuma $(x + a)^n$ koeficientu un Paskāla trijstūra koeficientu savstarpējo saistību.

Aplūkosim $(x + a)^3 = (x + a)(x + a)(x + a)$. Lai ērtāk būtu spriest, saskaitāmos iekavās sanumurēsim sekojoši:

$$(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3).$$

iekavas sareizinot iegūstam:

$$a_1a_2a_3 + a_1a_2x_3 + a_1x_2a_3 + a_3a_2x_1 + a_1x_2x_3 + x_1a_2x_3 + x_1x_2a_3 + x_1x_2x_3 =$$
$$= a_1a_2a_3x^0 + \underline{a_1a_2x + a_1a_3x + a_2a_3x} + \underline{a_1x^2 + a_2x^2 + a_3x^2} + x^3.$$

Aplūkojot reizinājumu, secinām:

1) katrs saskaitāmais ir trešās pakāpes monoms;
2) katrs saskaitāmais kā reizinātāju satur x pakāpes no 0 līdz 3;
3) vienādo x pakāpju ir tik, cik dažādo kombināciju no a_1,a_2,a_3 ņemot tos skaitā, kas vienāds ar binoma pakāpe mīnus x pakāpe (piemēram, saskaitāmo ar x^1 ir tik, cik kombināciju no a_1,a_2,a_3 var izveidot pa 3 -1 = 2, $-\ C_3^2 = 3$, saskaitāmo x^0 ir $C_3^0 = 1$ utt.).

Teorēma. $(x+a)^n = C_n^n a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + \ldots + C_n^{n-1}ax^{n-1} + C_n^0 x^n$.

Pierādījums.

Sareizināsim:

$(x+a)^n = (x+a)\cdot(x+a)\cdot\ldots\cdot(x+a) =$ izvirzījuma reizinātājus sanumurējam sekojoši:

$$= (x+a_1)\cdot(x+a_2)\cdot\ldots\cdot(x+a_n) =$$
$$= x\cdot(x+a_2)\cdot(x+a_3)\cdot\ldots\cdot(x+a_n) + a_1(x+a_2)\cdot(x+a_3)\cdot(x+a_n) =$$
$$= x^2\cdot(x+a_3)\cdot\ldots\cdot(x+a_n) + x\cdot a_2(x+a_3)\cdot\ldots\cdot(x+a_n) + a_1(x+a_3)\cdot\ldots\cdot(x+a_n) + a_1a_2\,(x+a_3) +$$
$$+ \ldots + (x+a_n) =$$

sakārtojam saskaitāmos augošu x pakāpu secībā:

$$= \ldots = a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n + a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}x + a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-2}\cdot a_nx + \ldots + a_nx^{n-1} + x^n =$$
$$= a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_nx^0 + a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}x + a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-2}\cdot a_nx + \ldots + a_nx^{n-1} + x^n$$

Aplūkojam x^1 pakāpes. Visas x^1 pakāpes satur dažādu a_i reizinājumus. Ievērojot a_i apzīmējumus, x^1 pakāpes saskaitāmo ir tik, cik dažādu kombināciju no a_1,, ... , a_n var izveidot pa *n-1* reizinātājiem, t.i., C_n^{n-1}, tā, kā visi a_i ir vienādi, tad savelkot līdzīgos saskaitāmos C iegūstam $C_n^{n-1} \cdot a^{n-1}x$.

Aplūkosim x^2 pakāpes. Visas x^2 pakāpes satur *n-2* dažādo a_i reizinājumus. Ievērojot a_i apzīmējumus, x^2 pakāpes saskaitāmo ir tik, cik dažādu kombināciju no a_1,, ... , a_n var izveidot pa *n-2* reizinātājiem, t.i., C_n^{n-2}, tā, kā visi a_i ir vienādi, tad savelkot līdzīgos saskaitāmos iegūstam $C_n^{n-2} \cdot a^{n-2}x^2$.

Veicot līdzīgus spriedumus, iegūstam koeficientus saskaitāmajiem, kas satur x^3, ... , x^{n-1}, t.i., $C_n^{n-3} \cdot a^{n-3}x^3, \ldots, C_n^{n-1} \cdot ax^{n-1}$.

Saskaitāmais, kurā *x* neiet*(x^0)*, satur visu a_i $1 \le i \le n$ reizinājumu, tā koeficientu C_n^n, saskaitāmā x^n koeficientā neieiet neviens a_i reizinājums, tādēļ, to var izteikt $C_n^0 = C_n^n$.

$$(x+a)^n = C_n^n a^0 x^n + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 x^{n-1} + C_n^0 a^n x^0 .$$

Secinājums.
1) $(a + x)^n$ izvirzījumā ieiet *n + 1* saskaitāmais;
2) katrā saskaitāmā *x* un *a* pakāpju kāpinātāju summa ir *n*;
3) izvirzījuma saskaitāmos sanumurē atbilstoši *a* pakāpēm no *0* līdz *n* un apzīmē:

$$T_m = C_n^m x^{n-m} a^m$$

koeficientus C_n^m sauc par binomiāliem koeficientiem, bet visu izteiksmi T_m – izvirzījuma m - tais loceklis.

1. piemērs.

Aprēķināt saīsinātā ceļā binoma reizinājumu:

$$(m - 1)\,(m - 2)\,(m + 3)\,(m + 4)$$

Atrisinājums.

Ērtības labad pārveidosim iekavas, kuras satur negatīvu saskaitāmo:

$$(m + (-1))\,(m + (-2))\,(m + 3)\,(m + 4)=$$

Izmantosim teorēmas izveduma ideju:

augstākā pakāpe būs m^4 un koeficients pie x^5 ir 1. Saskaitāmo, kas satur m^3 būs tik, cik kombināciju no -1; -2; 3; 4 var izveidot pa vienam, t.i., $C_4^1 = 4$. Saskaitāmo, kas satur x^2 būs tik, cik dažādo reizinājumu var izveidot no -1; -2; 3; 4; pa divi,, t.i., $C_4^2 = 6$. Saskaitāmo, kas satur x^1 būs tik, cik dažādo reizinājumu var izveidot no -1; -2; 3; 4 pa trīs, t.i., $C_4^3 = 4$. Saskaitāmo, kas satur *x* vai x^0 būs tik, cik dažādo reizinājumu var izveidot no -1; -2; 3; 4; pa četri. Atliek izrakstīt atbilstošos reizinājumus pie attiecīgajām pakāpēm un vienkāršot izteiksmi.

$$= m^4 + (-1)m^3 + (-2)m^3 + 3m^3 + 4m^3 + (-1)(-2)m^2 + (-1)3m^2 + (-1)4m^2 +$$
$$+ (-2)3m^2 + (-2)4m^2 + 3\cdot 4m^2 + (-1)(-2)3m + (-1)(-2)\,4m + (-1)\,3\cdot 4m + (-1)(-2)\,3\cdot 4 =$$
$$= m^4 + 4m^3 - 7m^2 - 10m + 24$$

2. piemērs.

Aprēķināt binoma izvirzījumu: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^8$.

<u>Atrisinājums.</u>
Viens no risinājuma paņēmieniem:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^8 = C_8^0(\sqrt{a})^8 + C_8^1(\sqrt{a})^7(-\sqrt{b}) + C_8^2(\sqrt{a})^6(-\sqrt{b})^2 + C_8^3(\sqrt{a})^5(-\sqrt{b})^3 + C_8^4(\sqrt{a})^4(-\sqrt{b})^4 +$$
$$+ C_8^5(\sqrt{a})^3(-\sqrt{b})^5 + C_8^6(\sqrt{a})^2(-\sqrt{b})^6 + C_8^7(\sqrt{a})^1(-\sqrt{b})^7 + C_8^8) - \sqrt{b})^8 =$$

Otrs atrisinājums:

Izveidosim tabulu:

Binomnālie koeficienti	1	8	28	56	70	56	28	8	1
1. saskaitāmās pakāpes	$(\sqrt{a})^8$	$(\sqrt{a})^7$	$(\sqrt{a})^6$	$(\sqrt{a})^5$	$(\sqrt{a})^4$	$(\sqrt{a})^3$	$(\sqrt{a})^2$	$\sqrt{a}$	1
2. saskaitāmās pakāpes	1	$-\sqrt{b}$	$(-\sqrt{b})^2$	$(-\sqrt{b})^3$	$(-\sqrt{b})^4$	$(-\sqrt{b})^5$	$(-\sqrt{b})^6$	$(-\sqrt{b})^7$	$(-\sqrt{b})^8$
Izvirzījuma loceklis	a^4	$-8a^3\sqrt{a}\sqrt{b}$	$28a^3b$	$-56a^2b\sqrt{a}\sqrt{b}$	$70a^2b^2$	$-56ab^2\sqrt{a}\sqrt{b}$	$28ab^3$	$-28b^3\sqrt{a}\sqrt{b}$	b^4

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^8 = a^4 - 8a^3\sqrt{ab} + 28a^3b - 56a^2b\sqrt{ab} + 70a^2b^2 - 56ab^2\sqrt{ab} + 28ab^3 - 8b^3\sqrt{ab} + b^4$$

3. piemērs.

Aprēķināt binoma $(\frac{\sqrt{x}}{b}+\frac{b}{\sqrt[3]{x}})^{18}$ izvirzījuma locekli, kas satur x^4!

<u>Atrisinājums.</u>

Uzrakstīsim binoma izvirzījuma m - tā locekļa formulu šajā piemērā

$$T_m = C_{18}^m(\frac{\sqrt{x}}{b})^{18-m}\cdot(\frac{b}{\sqrt[3]{x}})^m$$

vienkāršosim reizinājumu

$$(\frac{\sqrt{x}}{b})^{18-m}\cdot(\frac{b}{\sqrt[3]{x}})^m = \frac{x^{\frac{18-m}{2}}}{b^{18-m}}\cdot\frac{b^m}{x^{\frac{m}{3}}} =$$
$$= x^{\frac{18-m}{2}-\frac{m}{3}}\cdot b^{m-(18-m)} = x^{\frac{3\cdot 18-3m-2m}{6}}\cdot b^{-18}$$

Ja mūs interesē saskaitāmais, kas satur x^4, tad aplūko tikai x pakāpes:

$$x^{3\cdot 18-5m} = x^4$$
$$3\cdot 18 - 5m = 4$$
$$5m = 50$$
$$m = 10$$

Atbilde. $T_{10} = C_{18}^{10}\cdot x^4\cdot b^{-18} = 3366\cdot x^4\cdot b^{-18}$.

Interesanti aplūkot binomu $(x+1)^n$ un $(x-1)^n$.

4. piemērs.

Aprēķināt $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$!

Atrisinājums.

Aplūkojam $(x+1)^n$, ja $x=1$ un iegūstam jau zināmu apgalvojumu:

$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^{42} + \ldots + C_n^n \quad = 2^n$ un

$(x-1)^n$ ja $x= -1$

$$0^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots \quad (-1)C_n^n = 0$$

$$C_n^0 + C_n^2 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots$$

Ievietojot pēdējo izteiksmi pirmajā , iegūsim:

$$C_n^0 + C_n^0 + C_n^2 + C_n^{24} + \ldots = 2^n$$
$$2(C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots) = 2^n.$$
$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots \quad = 2^n - 2 = 2^{n-1}$$

Atbilde. $C_n^0 + C_n^2 + \ldots \quad = 2^{n-1}$

5. piemērs.

Aprēķināt summu:

$$C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2 C_5^2 + 2^3 C_5^3 + 2^4 C_5^4 + 2^5 C_5^5.$$

Atrisinājums.

Aplūkosim Ņūtona binoma izvirzījumu:

$$(\mathrm{x}+2)^5 = \mathrm{C}_5^0\mathrm{x}^5 + \mathrm{C}_5^1\mathrm{x}^4\cdot 2^1 + \mathrm{C}_n^2\mathrm{x}^3\cdot 2^2 + \mathrm{C}_5^3\mathrm{x}^2\cdot 2^3 + \mathrm{C}_5^4\mathrm{x}\cdot 2^4 + \mathrm{C}_5^5\cdot 2^5$$

Ja aplūko $x=1$

$$3^5 = \mathrm{C}_5^0 + 2\mathrm{C}_5^1 + 2^2\mathrm{C}_5^2 + 2^3\mathrm{C}_5^3 + 2^4\mathrm{C}_5^4 + 2^5\mathrm{C}_5^5$$

Atbilde: summa ir 3^5 vai *243*.

6. piemērs.

Noteikt izvirzījuma $(3x - 4)^{17}$ izvirzījuma koeficientu summu!

Atrisinājums.

Izvirzījuma labā puse ir polinoms, kura augstākā pakāpe ir 17. Polinoma koeficientu summa ir vienāda ar polinoma vērtību , ja argumenta vērtība ir 1.

Tādēļ , $(3x -4)^{17}$, ja $x=1$: $(3 -4)^{17}= (-1)^{17}= -1$ ir koeficientu summa.

Atbilde: koeficientu summa ir -1.

7. piemērs.

Pierādīt nevienādību:

$$(x - 1)^n + (x + 1)^n \geq 2 \text{, ja } x \geq 0.$$

Pierādījums.

Aplūko:

$$(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - C_n^3 x^{n-3} + \dots (-1)^n C_n^n$$

$$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + C_n^3 x^{n-3} + \dots + C_n^n$$

$$(x-1)^n + (x+1)^n = 2C_n^0 x^n + 2C_n^2 x^{n-2} + \dots = 2(C_n^0 x^n + C_n^2 x^{n-2} + \dots) \geq 2,$$

$$C_n^0 x^n + C_n^2 x^{n-2} + \dots > 0.$$

Vienādības izpilda tikai tad, ja *x=0.*

Uzdevumi.

1. Aprēķināt saīsinātā ceļā binoma reizinājumus:

a) *(a +1) (a +2) (a +3) (a +4*);
b) *(m -1)(m -2)(m -3)(m -4*);
c) *(x +1) (x -2) (x +3) (x -4);*
d) *(k+1) (k +2) (k +3) (a +4((k +5);*
e) *(n -1) (n -2) (n - 3) (n - 4)(n - 5);*
f) *(x -1) (x -2) (x +3) (x + 4)(x - 5).*

Aprēķināt binoma izvirzījumu:

2.

a) $(x + a)^6$; b) $(x + 2)^5$; c) $(x + c)^9$; d) $(1 + a)^{12}$

3.

a) $(x - a)^7$; b) $(a^2 + 1)^8$; c) $(x^2 - a)^6$; d) $(a + \sqrt{b})^{11}$.

4.

a) $(\sqrt{m} - n)^5$; b) $(x - 2y)^5$; c) $(3x + 2y)^4$; d) $(2a^2 - 3a)^5$;

5.

a) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^6$; b) $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^{10}$; c) $(\sqrt{2x} - \sqrt{3y})^7$; d) $(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})^8$

6.

a) $(1 - \sqrt{2})6$; b) $(\sqrt{3} - 2)^4$; c) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^6$; d) $(2\sqrt[3]{x} - 4\sqrt{x})^4$.

7.

a) $(\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1})^4$; b) $(\sqrt{a^2-1} + a)^6 + (a - \sqrt{a^2-1})^6$;
b) $(1 + \sqrt{a})^7 - (1 - \sqrt{a})^7$; d) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^5 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^5$.

8. Aprēķināt

a) binoma $(a + 3)^7$ izvirzījuma ceturto locekli;
b) binoma $(a + \sqrt{b})^{12}$ izvirzījuma devīto locekli;
c) binoma $(a^2 + b^3)^{13}$ izvirzījuma sesto locekli;
d) binoma $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8$ izvirzījuma ceturto locekli;
e) binoma $(x\sqrt{x} - 1)^{14}$ izvirzījuma vidējo locekli;
f) binoma $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b})^{13}$ izvirzījuma divus vidējos locekļus;
g) binoma $(\sqrt[3]{a} - 2x\sqrt{x})^{19}$ izvirzījuma divus vidējos locekļus;
h) binoma $\left(\sqrt[4]{2\sqrt{\frac{2}{11}}} - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{12}$ izvirzījuma piekto locekli.

9. Aprēķināt:

a) binoma $(x+y)^9$ izvirzījuma locekli, kas satur x^7;

b) binoma $(\sqrt{a}+b)^9$ izvirzījuma locekli; kas satur a^3;

c) binoma $(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a})^{20}$ izvirzījuma locekli; kas satur a^7;

d) binoma $(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[5]{x^8})^{12}$ izvirzījuma locekli; kas satur $x^{\frac{22}{3}}$;

e) binoma $\left(\frac{\sqrt{x}}{b}+\frac{b}{\sqrt[3]{x}}\right)^{18}$ izvirzījuma locekli; kas satur x^4;

f) binoma $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{b}+\frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$ izvirzījuma locekli; kas satur x^{-1}.

10. Aprēķināt:

a) binoma $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$ izvirzījuma locekli; kas nesatur a;

b) binoma $\left(\sqrt[3]{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{15}$ izvirzījuma locekli; kas nesatur a;

c) binoma $\left(\sqrt[9]{\frac{1}{z^8}}+\sqrt[3]{z^2}\right)^7$ izvirzījuma locekli; kas nesatur z ;

d) Binoma $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ izvirzījuma piektā locekļa koeficients attiecas pret trešā locekļa koeficientu kā 7 : 2. Aprēķināt to izvirzījuma locekli, kas satur x pirmajā pakāpē.

e) Binoma $\left(\frac{1}{z}+\sqrt{z}\right)^n$ izvirzījuma piektā locekļa koeficients attiecas pret trešā locekļa koeficientu kā 5 : 8. Aprēķināt to izvirzījuma locekli, kas nav atkarīgs no z.

f) Binoma $(\sqrt[7]{z^{-1}}+\sqrt[3]{z^2})^n$ izvirzījuma trešā locekļa koeficients no beigām ir 45. Aprēķināt šā izvirzījuma locekli, kas satur burtu z pirmajā pakāpē.

11. Aprēķināt binoma $\left(a\sqrt[-2]{a}-\sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^n$ izvirzījuma vidējo locekli, ja zināms, ka piektā locekļa koeficients attiecas pret trešā locekļa koeficientu kā 14 : 3.

12. Aprēķināt to binoma $\left(z\sqrt{z}+\frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)^m$ izvirzījuma locekli, kas pēc vienkāršošanas satur z^5, ja šā izvirzījuma binomiālo koeficientu summa ir 128.

13. Dots polinoms

$$x(1-x)^{10}+x^2(1-2x)^{20}+x^3(1-3x)^{30}.$$

Aprēķināt koeficientu loceklim, kas satur x^4, ja izpilda visas norādītās darbības.

14. Dots polinoms

$$x(2-3x)^5 + x^3(1+2x)^7 - x^4(3-2x^3)^9.$$
Aprēķināt koeficientu loceklim, kas satur x^5, ja izpilda visas norādītās darbības.

15. Aprēķināt koeficientu loceklim, kas satur x^3, divu binomu reizinājuma
$$(1+x)^7 \cdot (1-x)^4 \text{ izvirzījumā.}$$

16. Aprēķināt x, y un z, ja zināms, ka binoma $(x+y)^z$ izvirzījuma otrais, trešais un ceturtais loceklis attiecīgi ir *240*, *720* un *1080*.

17. Aprēķināt:

a) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$;

b) $C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2 C_n^2 + \ldots 3^n C_n^n$;

c) $C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \ldots C_{2n}^{2n}$;

d) $1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n$;

e) $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots C_{2n}^{2n-1}$;

f) $C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \ldots C_{2n}^{2n}$.

18. Aprēķināt , izmantojot Ņūtona binoma $(x \pm 1)^n$ izvirzījumu, summu:

a) $33C_5^1 + 17C_5^1 + 9C_5^2 + 5C_5^3 + 3C_5^4 + 2$;

b) $31C_5^1 + 15C_5^1 + 7C_5^2 + 3C_5^3 + C_5^4$;

c) $34C_5^1 + 18C_5^1 + 10C_5^2 + 6C_5^3 + 4C_5^4 + 3$.

Literatūra.

1. А.Д.Кутасов, Т.С.Пиголкина и др.; Пособие по математике для поступающих в вузы
Наука Москва 1988
2. И.Х.Сивашинский; Пособие по математике для техникумов
Высшая школа Москва 1970
3. С.М.Гуль, С.М.Соакян; Алгебра и начала анализа; Высшая школа Москва 1975
4. Составитель З.А.Скопец; Дополнительные главы по курсу математики;
Просвещение Москва 1969
5. Н.Я.Виленкин; Комбинаторика; Наука Москва 1969
6. Л.Я.Савельев; Олимпиады, алгебра, комбинаторика; Наука Москва 1979
7. В.А.Кречмар; Задачник по алгебре; Наука Москва 1972
8. В.Г.Болтянский, Ю.В.Сидоров, М.М.Шабунин;
Лекции и задачи по элементарной математике; Наука Москва 1974
9. L.Bostocks, S.Chandler; Pure Mathematics; Stanley Thornes Ltd 1985
10. E.Šuvalova, B.Agafonovs, G.Bogatirjovs; Matemātika augstskolu reflektantiem
Rīga, “Zvaigzne”, 1971
11. A.Andžāns, P.Zariņš; Matemātiskās indukcijas metode un varbūtību teorijas elementi
Rīga, “Zvaigzne”, 1983
12. D.Kriķis, P.Zariņš, V.Ziobrovskis; Diferencētie uzdevumi matemātikā
Rīga, “Zvaigzne ABC”, 1994