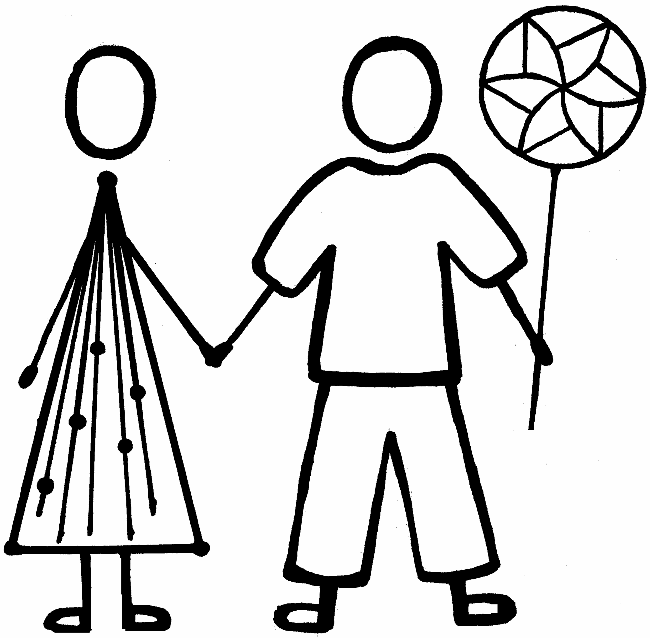
AGNIS ANDŽĀNS, LAURA FREIJA,
SANDRA ZABAROVSKA, BENEDIKTS JOHANNESSONS

Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 2006./2007. mācību gadā



A. Andžāns, L.Freija, S.Zabarovska, B. Johannessons. *Matemātikas sacensības 9.-12.klasēm 2006./2007. mācību gadā.*
Rīga: Mācību grāmata, 2008. - 88 lpp.

Grāmatā apkopoti 2006./2007. mācību gadā notikušo matemātikas olimpiāžu 9. - 12. klašu uzdevumi, ieteikumi, kas palīdz patstāvīgi nonākt pie atrisinājuma, un pilni atrisinājumi. Dota uzdevumu tematiska klasifikācija. Darbs izstrādāts LZP projekta „Matemātikas padziļinātas mācīšanas zinātniskais un metodiskais nodrošinājums" ietvaros un publicēts ar Rīgas Tehniskās universitātes atbalstu.

Vāka zīmējuma autore – L.Freija.

Darbs iekļauts Latvijas – Islandes kopprojekta LAIMA ietvaros izdotajā grāmatu sērijā.

ISBN xxxx-xx-xxx-x

Reģ. apl. No. 50003107501

Iespiests SIA „Mācību grāmata", Raiņa bulv. 19, Rīgā, LV-1586, tel. 67325322

Saturs

Ievads

Matemātikas olimpiādes vienmēr ir bijušas lielisks palīglīdzeklis matemātikas pilnīgākai apgūšanai un izpratnei. To uzdevumi ir atšķirīgi no skolā apgūtajiem, līdz ar to matemātikas olimpiādes arī paplašina skolēnu redzesloku un vedina skolēnus domāt par matemātikas zinātnes tēmām. Tās sniedz skolēniem ne tikai jaunas zināšanas, bet arī dod iespēju satikties skolēniem ar līdzīgām interesēm. Tādējādi skolēni tiek motivēti turpināt padziļinātu matemātikas apgūšanu, taču ar pašām olimpiādēm vien nepietiek - skolēniem ir nepieciešams tām arī gatavoties.

Šī grāmata ir paredzēta kā palīgs gatavošanās procesā. Grāmatā ir apkopoti 2006./2007.m.g. matemātikas olimpiāžu 9.-12. klašu uzdevumi un atrisinājumi. Bez uzdevumiem un atrisinājumiem grāmatā iekļauta arī 3. sadaļa – ieteikumi, kur var pasmelties idejas, ja neizdodas atsisināt uzdevumus patstāvīgi. Iesakām lasītājam vispirms censties atrisināt uzdevumu paša spēkiem vai risināt to kopā ar draugiem un tikai tad meklēt palīdzību ieteikumos vai atrisinājumos. Veltiet laiku gan uzdevumu risināšanai, sīki pierakstot atrisinājumus, gan atrisinājumu saprašanai.

Grāmatā apskatītas tādas matemātikas olimpiādes kā sagatavošanās, rajona, valsts, atklātā, starptautiskā un „Baltijas Ceļš".

Sagatavošanās olimpiāde notiek kopš 1987./ 88. mācību gada; to rīkošanas ideja pieder Rīgas 25. vidusskolas matemātikas skolotājai Annai Gustavai.

Rajona olimpiādes 9. – 12. (agrāk 8. – 11.) klasēm notiek kopš 20. gs. piecdesmitajiem gadiem. Kopš 1977./ 88. mācību gada tās, tāpat kā valsts olimpiādes 3. kārta, tiek rīkotas, sadarbojoties LR IZM/ LR IZM ISEC un LU A.Liepas NMS.

Atklātās matemātikas olimpiādes notiek kopš 1974. gada. Tās rīko LU A.Liepas NMS.

Starptautiskā matemātikas olimpiāde notiek kopš 1959. gada, kad tā notika Rumānijā. Sākumā tajā piedalījās tikai Austrumu bloka valstis. 2006./2007. mācību gadā šajā olimpiādē piedalījās dalībnieki no 93 valstīm.

„Baltijas Ceļš" pirmo reizi notika 1990. gadā Rīgā. Tas ieguvis savu nosaukumi no masu demonstrācijas, kas notika 1989.gada maijā. Atšķirībā no lielākās daļas matemātikas sacensību „Baltijas Ceļš" ir komandu sacensības. Tajā sākotnēji piedalījās tikai Baltijas valstis, bet nu tajā piedalās visas valstis ap Baltijas jūru un Islande.

Šo sacensību uzdevumu atrisināšanai bieži nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt pilnīgu atrisinājumu. Daudzus nestandarta uzdevumus var atrisināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus, taču uzdevuma atrisinājumiem ir jābūt pilnīgiem un skaidri pierakstītiem.

Daudzus uzdevumus noteikti var atrisināt arī citādi, nekā te norādīts, tāpēc ir vērts atrisināt uzdevumu paša spēkiem un tikai tad iepazīties arī ar grāmatā sniegtajiem atrisinājumiem, jo tie var saturēt jaunas, jums agrāk nezināmas idejas, un, tos lasot, var atklāties nepilnības jūsu patstāvīgi veiktajos spriedumos. Ja atrisinājumos tiek izmantoti kādi risinātājam nezināmi paņēmieni, noteikti jāmeklē un jāapgūst šie paņēmieni, lai varētu turpmāk tos izmanot.

Novēlam apgūt daudz derīgu ideju un ceram, ka grāmata Jums palīdzēs sasniegt savus mērķus.

Autori

Uzdevumi

S. Sagatavošanas olimpiāde

S.9. Devītā klase

S.9.1. Kvadrātvienādojuma $x^2 + px + q = 0$ saknes atšķiras viena no otras vismaz par 6. Pierādīt, ka kvadrātvienādojuma $x^2 + 2px + 3q = 0$ saknes atšķiras viena no otras vismaz par 10.

S.9.2. Andrim un Maijai bija vienāds daudzums konfekšu. Andris apēda 8 reizes mazāk konfekšu nekā Maija, un viņam palika 9 reizes vairāk konfekšu nekā Maijai. Pierādīt, ka Andra sākotnējais konfekšu skaits dalījās ar 71.

S.9.3. Uz taisnleņķa trijstūra ABC hipotenūzas AC atlikts tāds punkts D, ka $CD = CB$. Uz katetes BC atlikts tāds punkts E, ka $DE = CE$. Pierādīt, ka $AD + BE = DE$.

S.9.4. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Katra rūtiņa jānokrāso kādā krāsā. Nepieciešams, lai katrām divām dažādām krāsām varētu atrast divas rūtiņas ar kopēju malu, kuras nokrāsotas šajās krāsās. Kāds ir lielākais iespējamais krāsu skaits?

S.9.5. Tabula aizpildīta ar skaitļiem, kā parādīts 1. zīm. Ar vienu gājienu var izvēlēties patvaļīgu pozitīvu skaitli k un pareizināt vai nu visus vienas rindas, vai visus vienas kolonnas skaitļus ar k. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var iegūt 2. zīm. attēloto situāciju?

3	4	5
6	7	8
9	10	11

1.zīm.

3	6	9
4	7	10
5	8	11

2.zīm.

S.10. Desmitā klase

S.10.1. Dots, ka a, b un c apmierina sakarību $(a+b+c)(9a-3b+c)<0$, pie tam $a \neq 0$. Pierādīt, ka vienādojumam $ax^2 + bx + c = 0$ ir divas dažādas saknes.

S.10.2. Vienu un to pašu naturālo skaitli dalīja ar atlikumu ar 3, ar 24 un ar 50 (varbūt kāds atlikums bija 0). Iegūto triju atlikumu summa bija 17. Pierādīt, ka, dalot ar 3, ieguva atlikumu 1.

S.10.3. Trijstūra augstumu garumi ir 24, 30 un 40. Aprēķināt tā laukumu.

S.10.4. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkts augstums BD. No punkta D novilkti perpendikuli pret malām AB un CB; to pamati ir attiecīgi M un N. Pierādīt, ka punkti A, M, N, C atrodas uz vienas riņķa līnijas.

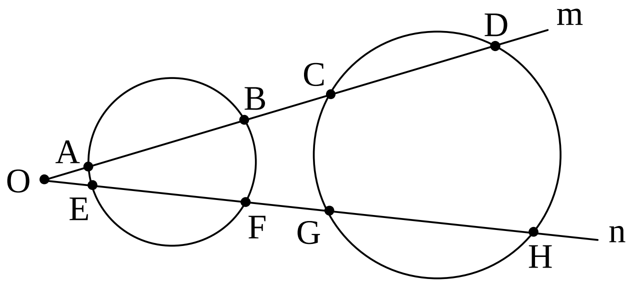
S.10.5. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n un polinomi $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$, ka visiem x pastāv sakarība $x = (P_1(x))^3 + (P_2(x))^3 + \ldots + (P_n(x))^3$? Vai šis apgalvojums paliek spēkā, ja vienādības kreisajā pusē x aizstāj ar x^{2006}?

S.11. Vienpadsmitā klase

S.11.1. Dots, ka a un b - pozitīvi skaitļi. Funkciju $f(x)=ax^2+6x+b$ un $g(x)=bx^2+6x+a$ minimālo vērtību summa ir 0. Pierādīt, ka katra no šīm minimālajām vērtībām atsevišķi ir 0.

S.11.2. Naturāls skaitlis n ir 20 dažādu naturālu skaitļu reizinājums. Kāds ir mazākais iespējamais n naturālo dalītāju skaits?

S.11.3. Stari Om un On krusto divas riņķa līnijas, kā parādīts 3. zīm.



3. zīm.

Dots, ka B, C, G, F atrodas uz vienas riņķa līnijas. Pierādīt, ka arī A, D, H, E atrodas uz vienas riņķa līnijas.

S.11.4. Vai eksistē funkcija $f(x)$, kas definēta visiem reāliem x, pieņem reālas vērtības un visiem reāliem x apmierina sakarību $f\left(-x^2+3x+1\right)=\left(f(x)\right)^2+2$?

S.11.5. Apskatām tabulu ar izmēriem $2\times n$ rūtiņas (skat. 4. zīm.). Visās rūtiņās kopā kaut kā izvietotas 2^n monētas. Ar vienu gājienu var izvēlēties rūtiņu, kurā ir vismaz 2 monētas, vienu no šīm monētām aizvākt no tabulas, bet otru pārbīdīt vai nu vienu vietu uz augšu (ja to iespējams izdarīt), vai vienu vietu pa labi. Pierādiet: var panākt, lai labējās kolonnas augšējā rūtiņā atrastos kāda monēta.

			...	
			...	

4. zīm.

S.12. Divpadsmitā klase

S.12.1. Kādu lielāko daudzumu komisiju var izveidot no 6 cilvēkiem, ja katrā komisijā ir vismaz viens cilvēks, neviens cilvēks nav visās komisijās, katrām divām komisijām ir vismaz viens kopējs loceklis un nekādas divas komisijas pēc sastāva nesakrīt?

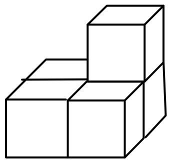
S.12.2. Trijstūris ABC ir regulārs. Tam apvilkta riņķa līnija. Uz loka BC, kas nesatur virsotni A, ņemts punkts M. Pierādīt, ka $MA = MB + MC$.

S.12.3. Vai pastāv tādi naturāli skaitļi n un k, ka $(1+2+3+\ldots+n)+2=k^2$?

S.12.4. Dots, ka a, b, c - pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka

$$a^3+b^3+c^3+15abc\le 2(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

S.12.5. Par ķieģeli sauksim figūru, kas sastāv no 5 vienādiem kubiņiem; četri no tiem izvietoti kvadrāta formā, bet piektais saskaras ar vienu no šiem četriem pa veselu skaldni, pie tam neatrodas tai pašā „slānī”, kur pārējie četri (skat. 5. zīm.).



5. zīm.

a) pierādīt, ka no vairākiem vienādiem ķieģeļiem var salikt kubu,

b) kāds ir mazākais iespējamais ķieģeļu skaits šādā kubā?

R. 57. Rajona olimpiāde

R.9. Devītā klase

R.9.1. Kāda var būt summa tādiem četriem divciparu pirmskaitļiem, kas sastādīti no cipariem 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9, izmantojot katru no tiem tieši vienu reizi?

R.9.2. Dots, ka $3 \le x \le 6$ un $3 \le y \le 6$. Pierādīt, ka $2x^2 + 2y^2 \le 5xy$.

R.9.3. Taisnleņķa trijstūrī ABC ($\angle ACB = 90°$) novilkta mediāna CM. Riņķa līnija, kas ievilkta ΔACM, pieskaras AC un AM attiecīgi punktos X un Y; dots, ka $XY \| CM$. Aprēķināt ΔABC leņķu lielumus.

R.9.4. Ceļu policijas vienībā ir 7 policisti. Katru vakaru dežurēt dodas 3 no tiem. Pēc kāda laika izrādījās, ka katri divi policisti kopā dežurējuši tieši n reizes.

a) atrodiet kaut vienu iespējamu n vērtību,

b) vai var būt, ka $n = 3$?

R.9.5. Kvadrāts sastāv no 10×10 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis, kas nepārsniedz 10. Ja divām rūtiņām ir kopēja mala vai kopējs stūris, tad tajās ierakstīto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

a) pierādīt, ka kāds skaitlis ierakstīts vismaz 15 rūtiņās,

b) pierādīt, ka kāds skaitlis ierakstīts vismaz 17 rūtiņās.

R.10. Desmitā klase

R.10.1. Ir 2006 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Dažas (vismaz viena) ir īstas un dažas (vismaz viena) ir viltotas. Visām īstajām monētām ir vienādas masas; arī visām viltotajām monētām ir vienādas masas. Viltotās monētas ir vieglākas par īstajām. Kā, izmantojot sviras svarus bez atsvariem, ar ne vairāk kā 1004 svēršanām noskaidrot, cik ir viltoto monētu?

R.10.2. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ rūtiņām, $n \ge 3$. Pierādīt, ka katru rūtiņu var nokrāsot baltu, melnu vai sarkanu tā, lai izpildītos īpašība: katrai rūtiņai x eksistē tādas divas kaimiņu rūtiņas y un z, ka x, y un z visas nokrāsotas dažādās krāsās. (Divas rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopēja mala.)

R.10.3. Sauksim naturālu skaitli $n > 1$ par labu, ja visus tā pozitīvos dalītājus var sadalīt divās daļās, kuru summas ir vienādas.

a) atrodiet kaut vienu labu skaitli, kas lielāks par 10,

b) vai eksistē labi skaitļi, kas lielāki par 20 072 007?

R.10.4. Taisnleņķa trapecē $ABCD$ ($\angle A = \angle B = 90°$) diagonāles krustojas punktā S. Punkts M atrodas uz nogriežņa AB un $SM \perp AB$. Pierādīt, ka $\angle CMS = \angle DMS$.

R.10.5. Dots, ka $f(x) = x^2 + 8x + 12$. Atrisināt vienādojumu $f(f(f(x))) = 0$.

R.11. Vienpadsmitā klase

R.11.1. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^2 + 3x = 2^y$.

R.11.2. Kādā klasē ir n zēni un n meitenes. Katrai meitenei patīk x zēni. Katram zēnam patīk y meitenes. Pierādīt, ka:

a) ja $x + y > n$, tad noteikti var atrast tādu zēnu un tādu meiteni, kas patīk viens otram,

b) ja $x + y \leq n$, tad var gadīties, ka šādu zēnu un meiteni atrast neizdodas.

R.11.3. Vai eksistē 3 kvadrāttrinomi ar īpašību: lai kā arī apzīmētu vienu no tiem ar $f_1(x)$, otru – ar $f_2(x)$ un trešo – ar $f_3(x)$, atradīsies tāds skaitlis a, ka $f_1(a) < f_2(a) < f_3(a)$?

R.11.4. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkti augstumi AX un CY; malas AC viduspunkts ir M. Uz augstuma AX atzīmēts tāds punkts Z, ka $YZ = ZX$. Pierādīt, ka punkti $A; Y; Z; M$ atrodas uz vienas riņķa līnijas.

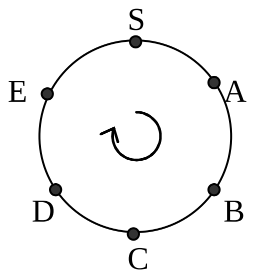
R.11.5. Rindā izrakstīti 6 pozitīvi skaitļi; pirmais no tiem ir 1, sestais ir 6. Par šo rindu ir zināms: ja skaitļi x, y, z atrodas tajā viens aiz otra tieši šādā secībā, tad $y = \dfrac{2xz}{x+z}$. Kādi skaitļi izrakstīti rindā?

R.12. Divpadsmitā klase

R.12.1. Skaitļi a_1; a_2; a_3; a_4 šādā secībā veido ģeometrisku progresiju, kuras visi locekļi ir dažādi; $f(x)$ ir kvadrāttrinoms. Vai var vienlaicīgi pastāvēt vienādības $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3$, $f(a_3) = a_4$?

Vai var vienlaicīgi pastāvēt tikai divas no šīm vienādībām?

R.12.2. Pa apli izvietotas n spuldzes; sākotnēji tās visas ir izslēgtas. Viena spuldze apzīmēta ar S. Atrodam visus skaitļa n pozitīvos dalītājus, ieskaitot 1 un n. **Katram** šādam dalītājam d veicam sekojošu operāciju: mainām katras d-tās spuldzes stāvokli (sākot ar spuldzi S), pavisam izdarot n maiņas. (Piemēram, ja 6. zīm attēlotajā situācijā pie $n = 6$ ņemts dalītājs $d = 3$, tad pakāpeniski mainīsim spuldžu S; C; S; C; S; C stāvokļus.)



6. zīm.

Kurām n vērtībām, beidzot šīs darbības, visas spuldzes būs ieslēgtas?

R.12.3. Kādiem naturāliem skaitļiem n vienlaicīgi piemīt sekojošas īpašības:

a) n - 1 un n + 1 ir pirmskaitļi,

b) skaitļa n visu naturālo dalītāju summa (ieskaitot 1 un n) ir $2n$?

R.12.4. Trijstūra ABC leņķa A bisektrise krusto malas AB vidusperpendikulu punktā X, malas AC vidusperpendikulu – punktā Y, bet ΔABC apvilkto riņķa līniju – punktā Z. Punkti A, X, Y, Z atrodas uz bisektrises šajā secībā. Pierādiet, ka $AX = YZ$.

R.12.5. Kvadrāts sastāv no 12×12 rūtiņām, kas izkrāsotas melnas un baltas šaha galdiņa kārtībā. Ar vienu gājienu var izvēlēties divas rūtiņas, kam ir kopīga mala, un pārkrāsot tās: melnu – par sarkanu, sarkanu – par baltu, baltu – par melnu. Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai vienlaicīgi visas sākotnēji melnās rūtiņas būtu baltas, bet visas sākotnēji baltās rūtiņas – melnas?

V. 57. Republikas olimpiāde

V.9. Devītā klase

V.9.1. Dots, ka $x \neq y$ un $x^2 - 2007x = y^2 - 2007y$. Aprēķiniet $x + y$ vērtību.

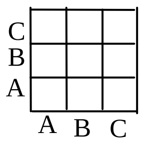
V.9.2. a) Vai var gadīties, ka katram no kvadrātvienādojumiem $x^2 + px + q = 0$, $x^2 + (p+1)x + (q+1) = 0$ un $x^2 + (p+2)x + (q+2) = 0$ abas saknes ir veseli skaitļi?

b) Vai var gadīties, ka bez tam arī vēl katram no kvadrātvienādojumiem $x^2 + (p-1)x + (q-1) = 0$ un $x^2 + (p-2)x + (q-2) = 0$ abas saknes ir veseli skaitļi? (Saknes var būt arī vienādas.)

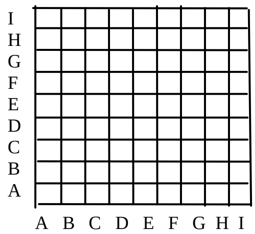
V.9.3. Šaurleņķu trijstūrī ABC nogrieznis AM ir mediāna, bet nogrieznis BN – augstums. Dots, ka $\angle MCA = 2 \cdot \angle MAC$. Pierādīt, ka $BC = 2 \cdot AN$.

V.9.4. Kvadrāts sastāv no 7×7 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Dažas no tām nokrāsotas melnas tā, ka katrā kolonnā un katrā rindā ir pāra skaits melnu rūtiņu (varbūt neviena). Kāds var būt kopējais melno rūtiņu skaits?

V.9.5. a) Vai var 7. zīm. parādītās tabulas rūtiņās ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai izpildītos īpašība: ja rinda un kolonna apzīmētas ar vienādiem burtiem, tad tajās ierakstīto skaitļu reizinājumi ir vienādi?



7. zīm.



8. zīm.

b) Vai var 8. zīm. parādītās tabulas rūtiņās ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 81 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai izpildītos tāda pati īpašība?

V.10. Desmitā klase

V.10.1. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi x un y, ka izteiksmes $x^2 - y^2 - x + y$ vērtība ir **a)** 10, **b)** 2007?

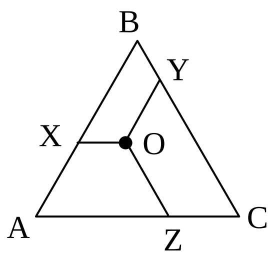
V.10.2. Pa apli izvietoti n trauciņi, $n \geq 3$; dažos no tiem atrodas monētas (varbūt tikai viena vai neviena monēta). Monētu pavisam ir tieši n. Ja ir vismaz viens trauciņš, kurā atrodas ne mazāk par 2 monētām, tad ar vienu gājienu atļauts izvēlēties vienu no šādiem trauciņiem, izņemt no tā 2 monētas un ielikt tās pa vienai abos blakus esošajos trauciņos. Ar iegūto situāciju drīkst izpildīt tādu pašu gājienu, utt.

Sākotnēji visas monētas atrodas vienā trauciņā. Vai var panākt, lai katrā trauciņā būtu tieši viena monēta, ja **a)** $n = 7$, **b)** $n = 10$?

V.10.3. Ja n - naturāls skaitlis, kas lielāks par 1, tad ar $x(n)$ apzīmējam lielāko pirmskaitli, kas nepārsniedz n, bet ar $y(n)$ - mazāko pirmskaitli, kas pārsniedz n. Piemēram, $x(6) = 5$; $x(5) = 5$; $y(5) = 7$. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{x(2) \cdot y(2)} + \frac{1}{x(3) \cdot y(3)} + \frac{1}{x(4) \cdot y(4)} + \ldots + \frac{1}{x(600) \cdot y(600)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{601}.$$

V.10.4. Regulāra trijstūra ABC iekšpusē izvēlas patvaļīgu punktu O. Uz trijstūra malām AB, BC, CA attiecīgi atrod tādus punktus X, Y, Z, ka $OX||CA$, $OY||AB$, $OZ||BC$ (skat. 9. zīm.).



9. zīm.

Pierādīt, ka nogriežņu OX, OY, OZ vidusperpendikulu veidotā trijstūra laukums nav atkarīgs no O izvēles.

V.10.5. Uz papīra lapas uzrakstīti n dažādi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 14. Ir zināms: katru no naturāliem skaitļiem 1;2;3;...;27 var izsacīt vai nu kā x, vai kā $2x$, vai kā $x+y$, kur x un y - kaut kādi uzrakstītie skaitļi.

Pierādīt, ka **a)** $n \geq 6$, **b)** $n \geq 7$.

V.11. Vienpadsmitā klase

V.11.1. Dots, ka n – naturāls skaitlis.

a) Vai skaitļiem n un n + 2007 var būt vienādas ciparu summas?

b) Vai skaitļiem n un n + 199 ciparu summas var būt vienādas?

V.11.2. Vai eksistē tādi trīs kvadrāttrinomi, ka katram no tiem ir vismaz viena sakne, bet nekādu divu kvadrāttrinomu summai sakņu nav?

V.11.3. Katra papīra lapas puse sadalīta 3 daudzstūros. Vienā pusē viens daudzstūris nokrāsots balts, otrs - sarkans, trešais - zaļš.
Pierādīt: daudzstūrus lapas otrā pusē arī var nokrāsot vienu baltu, vienu sarkanu un vienu zaļu tā, lai vismaz trešā daļa no lapas laukuma būtu nokrāsota vienādi no abām pusēm.

V.11.4. Uz trijstūra ABC mediānas AM ņemts tāds punkts K, ka $\angle BAC + \angle BKC = 180°$. Pierādīt, ka $AB \cdot KC = AC \cdot KB$.

V.11.5. Reālu skaitļu virknē $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dots, ka $a_{11} = 4, a_{22} = 2$ un $a_{33} = 1$. Bez tam visiem naturāliem n pastāv vienādība $\dfrac{a_{n+3} - a_{n+2}}{a_n - a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+3} + a_{n+2}}{a_n + a_{n+1}}$.

Pierādīt, ka

a) neviens virknes loceklis nav 0,

b) virkne ir periodiska,

c) $a_1^k + a_2^k + \ldots + a_{100}^k$ ir naturāla skaitļa kvadrāts, ja k - patvaļīgs naturāls skaitlis.

V.12. Divpadsmitā klase

V.12.1. Kādi var būt nenegatīvi reāli skaitļi a un b, ja vienādojumiem $x^2 + a^2x + b^3 = 0$ un $x^2 + b^2x + a^3 = 0$ ir kopīga reāla sakne?

V.12.2. Katrā n-stūra prizmas virsotnē ierakstīts vai nu „+1", vai „-1". Zināms, ka katras skaldnes virsotnēs ierakstīto skaitļu reizinājums ir „-1".
Vai var būt, ka **a)** n=4, **b)** n=10?

V.12.3. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = y^2 \\ \sin^2 y + \cos^2 x = x^2 \end{cases}.$$

V.12.4. Divas riņķa līnijas w_1 un w_2 krustojas divos punktos A un B. Taisne t_1 iet caur B un krusto w_1 vēl punktā C, bet w_2 - vēl punktā E. Taisne t_2 iet caur B un krusto w_1 vēl punktā D, bet w_2 - vēl punktā F.

Punkts B atrodas gan starp C un E, gan starp D un F. Nogriežņu CE un DF viduspunktus apzīmējam attiecīgi ar M un N.

Pierādīt, ka trijstūri ACD, AEF un AMN ir līdzīgi viens otram.

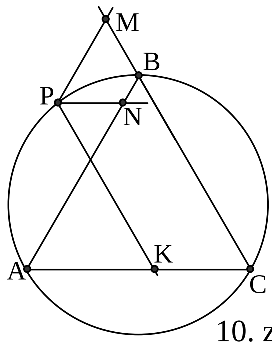
V.12.5. Naturālo skaitļu kopa sadalīta daļās tā, ka katrs naturāls skaitlis nonācis tieši vienā daļā un katrā daļā ir bezgalīgi daudz skaitļu. Vai noteikti starp daļām atradīsies tāda, kas satur jebkura naturāla skaitļa daudzkārtni? Atbildiet uz šo jautājumu, ja **a)** daļu ir galīgs daudzums, **b)** daļu ir bezgalīgi daudz.

A. Latvijas 34. atklātā matemātikas olimpiāde

A.9. Devītā klase

A.9.1. Kvadrātveida tabula sastāv no $10 \mathrm{x} 10$ rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts nenulles cipars. No katras rindiņas un katras kolonnas cipariem, ņemot tos patvaļīgā secībā, izveidots viens desmitciparu naturāls skaitlis. Vai var gadīties, ka tieši 19 no šiem skaitļiem (ne vairāk un ne mazāk) dalās ar 3?

A.9.2. Dots, ka ΔABC ir regulārs. Punkts P atrodas uz ABC apvilktās riņķa līnijas (skat. 10. zīm.) Taisnes, kas caur P vilktas paralēli AB, BC un CA, krusto atbilstoši taisnes BC, AC un AB attiecīgi punktos M, K un N. Pierādīt, ka $\angle BMN = \angle BMK$.



10. zīm.

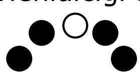
A.9.3. a) katrs no naturāliem skaitļiem a un b ir izsakāms kā divu veselu skaitļu kvadrātu summa. Pierādiet, ka arī reizinājums $a \cdot b$ ir izsakāms šādā veidā.

b) atrodiet divus tādus polinomus ar veseliem koeficientiem $f(x)$ un $g(x)$, ka visiem x pastāv vienādība

$$(f(x))^2 + (g(x))^2 = (x^2+1)(x^2+4)(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).$$

A.9.4. Regulārā n-stūrī jāuzzīmē vairākas slēgtas lauztas līnijas tā, lai katra no tām sastāvētu tieši no n dažādiem posmiem, lai katras līnijas katrs posms būtu vai nu n-stūra mala, vai diagonāle un lai gan katra n-stūra mala, gan katra tā diagonāle būtu posms tieši vienā no šīm līnijām. Vai to var izdarīt, ja **a)** $n = 8$; **b)** $n = 9$?

A.9.5. Pa apli novietotas 10 viena lata monētas, visas ar „lasi" uz augšu. Ar vienu gājienu atļauts apgriezt otrādi vai nu četras pēc kārtas novietotas monētas, vai arī divas pirmās un divas pēdējās monētas piecu pēc kārtas esošu monētu virknē (skat. 11. zīm.) Šādus gājienus drīkst atkārtot vairākkārt. Kāds lielākais monētu daudzums var vienlaicīgi atrasties ar ģerboni uz augšu?


11. zīm.

A.10. Desmitā klase

A.10.1. Desmitciparu naturāls skaitlis dalās ar 999 999. Vai tas var dalīties arī ar 1 000 001?

A.10.2. Dots, ka x, y, z un t ir pozitīvi skaitļi.

a) Pieņemsim, ka zināms: $x+y+z+t \le 4$. Vai noteikti $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t} \ge 4$?

b) Pieņemsim, ka zināms: $x+y+z+t \ge 4$. Vai noteikti $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t} \le 4$?

A.10.3. Doti 7 dažādi siera gabali. Pierādīt: vienu no tiem iespējams sagriezt divos gabalos tā, ka iegūtos 8 gabalus var sadalīt divās daļās (pa 4 gabaliem katrā) ar vienādām kopējām masām.

A.10.4. Plakne sadalīta vienādos kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Uzzīmēts izliekts daudzstūris, kura visas virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs, bet neviena mala neiet pa rūtiņu līnijām. Pierādīt: daudzstūra iekšpusē esošo vertikālo rūtiņu līniju garumu summa vienāda ar daudzstūra iekšpusē esošo horizontālo rūtiņu līniju garumu summu.

A.10.5. Plaknē doti n punkti, $n \ge 3$. Nekādi 3 no tiem neatrodas uz vienas taisnes. Apskatām visas iespējamās taisnes, kas katra iet caur diviem no šiem punktiem. Pierādiet, ka

a) starp tām **noteikti** var atrast n - 1 taisnes, no kurām nekādas divas nav paralēlas savā starpā,

b) starp tām **noteikti** var atrast n taisnes, no kurām nekādas divas nav paralēlas savā starpā,

c) iespējams, ka starp tām nevar atrast n + 1 taisnes, no kurām nekādas divas nav paralēlas savā starpā.

A.11. Vienpadsmitā klase

A.11.1. Punkts P atrodas regulāra trijstūra ABC iekšpusē. Pierādīt, ka:

a) $PA+PB+PC < 3 \cdot AB$,

b) $PA+PB+PC < 2 \cdot AB$.

A.11.2. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{1^4+1^2+1}+\frac{2}{2^4+2^2+1}+\frac{3}{3^4+3^2+1}+\ldots+\frac{2007}{2007^4+2007^2+1}<\frac{1}{2}.$$

A.11.3. Dots, ka $ABCD$ – trapece. Uzzīmētas divas riņķa līnijas, kuru diametri ir trapeces sānu malas AB un CD. Diagonāļu krustpunkts S atrodas ārpus šīm riņķa līnijām. Pierādīt: pieskares, kas no S novilktas abām riņķa līnijām, vienādas savā starpā.

A.11.4. Kādā firmā daži darbinieki vienmēr melo, bet pārējie vienmēr runā patiesību (ir gan tādi, gan tādi). Nekādi divi darbinieki nestrādā firmā vienādi ilgi; nekādiem diviem darbiniekiem nav vienādas algas. Kādu rītu katrs darbinieks sniedza divus paziņojumus:

a) nav pat ne 10 darbinieku, kas strādātu firmā ilgāk par mani;

b) vismaz 90 darbinieki saņem lielāku algu nekā es.

Cik darbinieku strādā firmā?

A.11.5. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Divas rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala. Sākumā visas rūtiņas ir baltas. Ar vienu gājienu atļauts nokrāsot melnā krāsā

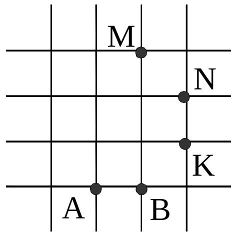
a) vienu baltu rūtiņu, ja visas tās blakus rūtiņas ir baltas,

b) no divām baltām rūtiņām sastāvošu taisnstūri, ja tieši divas no tam blakus esošām rūtiņām jau ir melnas,

c) no četrām baltām rūtiņām sastāvošu kvadrātu, ja visas 8 tam blakus esošās rūtiņas jau ir melnas.
Vai var nokrāsot melnu visu kvadrātu, ja **a)** n = 8; **b)** n = 13?

A.12. Divpadsmitā klase

A.12.1. Pierādīt, ka $\angle AMB = \angle ANB = \angle AKB$, kur A, B, M, N, K – punkti, kas atrodas kvadrātiska režģa virsotnēs (skat. 12. zīm.)



12. zīm.

A.12.2. Apskatām vienādojumu $x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = 0$.

a) pierādiet, ka tam ir tieši 3 dažādas pozitīvas saknes,

b) taisnstūra paralēlskaldņa augstums, garums un platums ir vienādi ar šīm saknēm (katrs izmērs – ar citu sakni). Atrast paralēlskaldņa tilpumu un virsmas laukumu.

A.12.3. Uz taisnes t atrodas divas figūriņas: pa kreisi – balta, pa labi – sarkana. Ar vienu gājienu atļauts vai nu novietot uz taisnes vienu otrai blakus vēl divas vienas krāsas figūriņas, vai arī noņemt no taisnes divas vienas krāsas figūriņas, ja tās atrodas viena otrai blakus. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai uz taisnes atrastos tieši divas figūriņas: pa kreisi – sarkana, pa labi – balta?

A.12.4. Riņķis ar centru O jāsagriež n vienādos gabalos ar līnijām, kas sastāv no galīga skaita taišņu nogriežņu un riņķa līniju loku. Pie tam O nedrīkst vienlaicīgi piederēt visu gabalu robežām. Vai tas ir iespējams, ja

a) n = 2;

b) n > 2? (Pozitīvas atbildes gadījumā pietiek to parādīt vienai n vērtībai.)

A.12.5. Plauktā vienā rindā kaut kādā secībā atrodas profesora Cipariņa kopoto rakstu n sējumi. Zināms, ka sākumā neviens sējums neatrodas savā vietā. Ar vienu gājienu atļauts mainīt vietām divus blakus esošus sējumus, ja neviens no tiem nav savā vietā. Pierādiet, ka var panākt, lai vienlaicīgi visi sējumi būtu savās vietās.

VP. Papildsacensības par vietu Latvijas izlasē dalībai 48.Starptautiskajā matemātikas olimpiādē

VP.1. Latvijas 57.matemātikas olimpiādes 4.kārta

VP.1.1. Dots, ka $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ un $(a+b)(b+c)(c+a) = 1$. Pierādīt, ka $ab + bc + ca \le \frac{3}{4}$.

VP.1.2. Dots, ka BC ir riņķa diametrs, XY – horda, kas perpendikulāra šim diametram. Punkts P atrodas uz hordas XY, un $BP||CY$. Punkts M atrodas uz hordas CY, un $MP||CX$. Taisnes CX un PB krustojas punktā K. Pierādīt, ka $PB \perp MK$.

VP.1.3. Dots, ka p – pirmskaitlis, $p > 2$, un $x^p + y^p$ dalās ar p (x, y – naturāli skaitļi). Pierādīt, ka $x^p + y^p$ dalās ar p^2.

VP.1.4. Plaknē doti 5 punkti. Katri trīs no tiem ir tāda trijstūra virsotnes, kura laukums nepārsniedz 1. Pierādīt, ka visus šos 5 punktus var pārklāt ar trapeci, kuras laukums nepārsniedz 3.

VP.1.5. Pasaku karaļvalstī ir n pilsētas, $n \geq 2$. Katras divas pilsētas savieno tieši viens ceļš. Uz katra ceļa ieviesta vienvirziena satiksme. Ceļu krustojumu ārpus pilsētām nav (izmantoti viadukti). Bez tam katrs ceļš nokrāsots vai nu baltā, vai sarkanā krāsā.

Pierādīt: var atrast tādu pilsētu A, ka uz katru citu pilsētu iespējams aizbraukt no A, braucot tikai pa vienas krāsas ceļiem (šī krāsa var atšķirties, braucot no A uz dažādām pilsētām).

VP.2. Latvijas izlases atlases sacensības 2007. gada 30. aprīlī

VP.2.1. Dots, ka $n > 1$ – naturāls skaitlis. Pierādīt: eksistē tāds pirmskaitlis p un tādi naturāli skaitļi $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, ka visi skaitļi $p + n \cdot x_1$, $p + n \cdot x_2$, $p + n \cdot x_3$, ... ir pirmskaitļi.

VP.2.2. Dots, ka a, b, c – šaurleņķa trijstūra malu garumi. Pierādīt, ka $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) > 4\left(a^6+b^6+c^6\right)$.

VP.2.3. Dots, ka $ABCD$ – izliekts četrstūris; M un N ir attiecīgi malu AD un BC viduspunkti. Punkti A, B, M, N atrodas uz vienas riņķa līnijas. Taisne AB pieskaras riņķa līnijai, kas apvilkta ap trijstūri BMC. Pierādīt: taisne AB pieskaras arī riņķa līnijai, kas apvilkta ap trijstūri AND.

VP.3. Latvijas izlases atlases sacensības 2007. gada 1. maijā

VP.3.1. Izliekts daudzstūris sagriezts 14 paralelogramos. Pierādīt: šo pašu daudzstūri varēja sagriezt 10 paralelogramos.

VP.3.2. Kādiem naturāliem skaitļiem n skaitlis $\dfrac{n^{2000}-1}{n-1}$ ir vesela skaitļa kvadrāts?

VP.3.3. Kvadrāts sastāv no 2007×2007 rūtiņām. Katrā rūtiņā dzīvo pa rūķītim. Vienas dienas laikā rūķīši var paveikt *vienu* no sekojošiem darbiem:

a) katras rindas iekšpusē pārkārtoties patvaļīgā secībā tā, ka katrā rūtiņā joprojām dzīvo pa vienam rūķītim,

b) katras kolonnas iekšpusē pārkārtoties patvaļīgā secībā tā, ka katrā rūtiņā joprojām dzīvo pa vienam rūķītim.

Kāds ir mazākais dienu skaits, ar kuru pietiek, lai rūķīši varētu realizēt jebkuru pārkārtošanos, kādu vien viņi būtu iedomājušies (pēc pārkārtošanās katrā rūtiņā joprojām jādzīvo pa vienam rūķītim)?

IMO. 48. Starptautiskā matemātikas olimpiāde (48th International Mathematical Olympiad)

IMO. Uzdevumi 2007. gada 25. jūlijā.

IMO.1. Doti reāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Katram $i\ (1 \leq i \leq n)$ definējam $d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$ un $d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$.

a) Pierādīt, ka brīvi izvēlētiem skaitļiem $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ ir spēkā nevienādība $\max\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} \ge \frac{d}{2}$.

b) Pierādīt, ka eksistē tādi reāli skaitļi $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$, kam $\max\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} = \frac{d}{2}$.

IMO.2. Doti tādi pieci punkti A, B, C, D, E, ka četrstūris $ABCD$ ir paralelograms un ap četrstūri $BCED$ var apvilkt riņķa līniju. Taisne l iet caur punktu A un krusto nogriezni DC tā iekšējā punktā F, kā arī krusto taisni BC punktā G. Ir zināms, ka $EF = EG = EC$. Pierādīt, ka l ir leņķa DAB bisektrise.

IMO.3. Starp matemātikas sacensību dalībniekiem daži savā starpā ir draugi; draudzības ir abpusējas – ja A draudzējas ar B, tad arī B draudzējas ar A. Dalībnieku grupu sauc par kliķi, ja katri divi dalībnieki no šīs grupas savā starpā ir draugi (līdz ar to par kliķi tiek uzskatīta arī jebkura grupa, kas sastāv no mazāk nekā diviem dalībniekiem). Dalībnieku skaitu kliķē sauc par kliķes izmēru.

Ir zināms, ka grupā, kas sastāv no visiem sacensību dalībniekiem, lielākais kliķes izmērs ir pāra skaitlis. Pierādīt, ka visus sacensību dalībniekus var izvietot divās istabās tā, ka lielākais kliķes izmērs vienā istabā ir vienāds ar lielāko kliķes izmēru otrā istabā.

IMO. Uzdevumi 2007. gada 26. jūlijā.

IMO.4. Trijstūrī ABC leņķa BCA bisektrise otrreiz krusto šim trijstūrim apvilkto riņķa līniju punktā R ($R \neq C$), kā arī krusto nogriežņa BC vidusperpendikulu punktā P un nogriežņa AC vidusperpendikulu punktā Q. Punkts K ir nogriežņa BC viduspunkts un punkts L ir nogriežņa AC viduspunkts. Pierādīt, ka trijstūru RPK un RQL laukumi ir vienādi.

IMO.5. Dots, ka a un b ir veseli pozitīvi skaitļi. Pierādīt: ja $(4a^2 - 1)^2$ dalās ar $4ab - 1$, tad $a = b$.

IMO.6. Dots, ka n ir vesels pozitīvs skaitlis, $n > 1$. Aplūkojam kopu $S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\}$, kas sastāv no $(n+1)^3 - 1$ punktiem trīsdimensiju telpā. Noskaidrot, kāds ir mazākais iespējamais plakņu skaits , kuru apvienojums satur visus kopas S punktus, bet nesatur punktu $(0,0,0)$.

AB. Atlases sacensības olimpiādei „Baltijas Ceļš 2006”

AB.A. Algebra

AB.A.1. Pierādīt vienādību $\frac{2n-1}{2} - \frac{2n-2}{3} + \frac{2n-3}{4} - \ldots - \frac{2}{2n-1} + \frac{1}{2n} =$

$= \frac{1}{n+1} + \frac{3}{n+2} + \frac{5}{n+3} + \ldots + \frac{2n-1}{2n}$, ja $n \in N$.

AB.A.2. Apskatām nevienādību $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \ge 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1)$.

Kuriem $n \ge 3$ šī nevienādība ir patiesa visām reālām $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vērtībām?

AB.A.3. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} (x+y)^3 = z \\ (y+z)^3 = x \\ (z+x)^3 = y \end{cases}$$

reālos skaitļos.

AB.A.4. Dots, ka a, b, c – pozitīvi skaitļi un $abc = 1$.

Pierādīt, ka $2\left(a^2+b^2+c^2\right)+a+b+c \geq 6+ab+bc+ca$.

AB.A.5. Funkcija $f(t)$ definēta visām veselām t vērtībām, un tās vērtības ir veseli skaitļi. Visiem $m, n \in Z$ pastāv sakarība

$$f(m-n+f(n)) = f(m)+f(n).$$

Atrast visas šādas funkcijas f un pierādīt, ka citu bez Jūsu atrastajām nav.

AB.K. Kombinatorika

AB.K.1. Jānim ir 1 lats 98 santīmi – pavisam 100 monētas. Pierādīt, ka viņš var savu naudu sadalīt 2 vienādās daļās.

AB.K.2. Rūtiņu taisnstūrveida tabulā ir 37 rindas un 5 kolonnas. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 10. Katrā rindiņā skaitļi no kreisās uz labo pusi izvietoti nedilstošā kārtībā. Katrā „diagonāllīnijā", kas iet „pa labi un uz leju", visi ierakstītie skaitļi ir vienādi. Pierādiet, ka tabulā ir tāda rinda, kurā visi skaitļi ir vienādi.

AB.K.3. Andris un Maija spēlē sekojošu spēli. Uz taisnes atrodas figūriņa. Andris nosauc skaitli x, kas ir starp 0 un 1, bet Maija pārbīda figūriņu pa taisni par attālumu x. Pēc tam viņi dara to pašu vēlreiz, utt. Nedrīkst 10 reizes pēc kārtas bīdīt figūriņu vienā virzienā. Vai Andris var panākt, lai kādreiz figūriņa atrastos tieši attālumā 2006 no sākotnējās vietas?

AB.K.4. Kvadrātisks režģis sastāv no 2006×2006 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Ar vienu gājienu var izvēlēties jebkuru vēl nenokrāsotu rūtiņas malu a un nokrāsot gan a, gan visas tās malas, kam ar a ir kopējs punkts (tātad ar vienu gājienu var nokrāsot augstākais 7 malas). **Malas drīkst krāsot atkārtoti.** Vai var nokrāsot visas rūtiņu malas, izdarot ne vairāk kā $1\,300\,000$ gājienu?

AB.K.5. Apskatām tabulu ar izmēriem $2 \times n$ rūtiņas (skat. 13. zīm.). Visās rūtiņās kopā kaut kā izvietotas 2^n monētas. Ar vienu gājienu var izvēlēties rūtiņu, kurā ir vismaz 2 monētas, vienu no šīm monētām aizvākt no tabulas, bet otru pārbīdīt vai nu vienu vietu uz augšu (ja to iespējams izdarīt), vai vienu vietu pa labi. Pierādiet: var panākt, lai labējās kolonnas augšējā rūtiņā atrastos kāda monēta.

			...	
			...	

13. zīm.

AB.Ģ. Ģeometrija

AB.Ģ.1. Dots, ka $ABCD$ – izliekts četrstūris. Tā diagonāļu AC un BD vidusperpendikuli krusto malu AD attiecīgi punktos Y un X, pie tam X atrodas starp A un Y. Taisnes BX un CY ir paralēlas. Pierādīt, ka $AC \perp BD$.

AB.Ģ.2. Četrstūrī $ABCD$ ievilkta riņķa līnija. Caur tās centru I vilkta taisne, kas krusto malu AB punktā X, bet malu CD – punktā Y. Zināms, ka $\angle AXY = \angle DYX$. Pierādīt, ka $AX : BX = YC : YD$.

AB.Ģ.3. Telpā doti 10^6 dažādi punkti. Apskatām visus nogriežņus, kas savieno vienu punktu ar otru. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties 79 dažāda garuma nogriežņus.

AB.Ģ.4. Šaurleņķu trijstūrī ABC leņķis A ir 60^o liels. Pieņemsim, ka D – malas BC iekšējs punkts. Ap trijstūriem ABD un ACD apvilkto riņķu centrus apzīmēsim attiecīgi ar O_1 un O_2. Taisnes BO_1 un CO_2 krustojas punktā M; ΔDO_1O_2 apvilktā riņķa centrs ir N. Pierādīt, ka visas taisnes MN, kuras šādi iegūstamas dažādiem punkta D stāvokļiem, iet caur vienu punktu.

AB.Ģ.5. Pierādīt: ja $ABCD$ – riņķī ievilkts četrstūris, tad $|AC-BD| \le |AB-CD|$.

AB.S. Skaitļu teorija

AB.S.1. Naturālam skaitlim n ir tādi divi dažādi naturāli dalītāji a un b, ka

$$(a+3)(b-1)=n-3.$$

Pierādīt, ka $3n$ ir naturāla skaitļa kvadrāts.

AB.S.2. Skaitlis $\overline{a0a0\ldots a0b0c0c0\ldots c0c}$ dalās ar 37 (cipari a un c katrs uzrakstīti tieši 1001 reizi). Pierādīt, ka $b = a + c$.

AB.S.3. Dots, ka n, x, y – naturāli skaitļi un $n^2 < x < y < n^2 + n$. Pierādīt, ka nav tāda naturāla skaitļa d, kas vienlaicīgi apmierina prasības:

1) $d \ne x$ un $d \ne y$,
2) xy dalās ar d,
3) $n^2 < d < n^2 + n$.

AB.S.4. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $14^n = 13 \cdot m^n + 1$.

AB.S.5. Dots, ka p – pirmskaitlis, n – naturāls skaitlis, kas lielāks par 1, $p-1$ dalās ar n un n^3-1 dalās ar p. Pierādīt, ka $4p-3$ ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts.

BW. 17. matemātikas komandu olimpiāde „Baltijas Ceļš 2006"

BW.A. Algebra

BW.A.1. Zināms, ka reālu skaitļu virknei a_1, a_2, a_3,... izpildās sakarība

$$a_n = a_{n-1} + a_{n+2},\ n=2, 3, 4, \ldots$$

Kāds ir lielākais iespējamais skaits pēc kārtas ņemtu šādas virknes elementu, kas visi ir pozitīvi?

BW.A.2. Pieņemsim, ka reāli skaitļi $a_i \in [-2;17]$, i=1, 2,..., 59, apmierina sakarību $a_1 + a_2 + \ldots + a_{59} = 0$. Pierādiet, ka $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{59}^2 \le 2006$.

BW.A.3. Pierādiet, ka katram polinomam $P(x)$ ar reāliem koeficientiem var atrast tādu veselu pozitīvu skaitli m un polinomus $P_1(x)$, $P_2(x)$,..., $P_m(x)$ ar reāliem koeficientiem, ka $P(x) = (P_1(x))^3 + (P_2(x))^3 + \ldots + (P_m(x))^3$.

BW.A.4. Pieņemsim, ka a, b, c, d, e, f ir nenegatīvi reāli skaitļi, kas apmierina sakarību $a+b+c+d+e+f=6$. Atrodiet lielāko iespējamo izteiksmes $abc + bcd + cde + def + efa + fab$ vērtību un noskaidrojiet, ar kuriem skaitļu komplektiem (a, b, c, d, e, f) šī vērtība tiek sasniegta.

BW.A.5. Izklaidīgs profesors savu pēdējo grāmatu ir veltījis kādas divargumentu funkcijas * izpētei. Ja šo operāciju pielieto jebkuriem diviem veseliem skaitļiem, rezultāts arī ir vesels skaitlis. Ir zināms, ka funkcijai izpildās sekojošas aksiomas:

a) $x * (x * y) = y$ visiem $x, y \in \mathbb{Z}$;

b) $(x * y) * y = x$ visiem $x, y \in \mathbb{Z}$.

Profesors savā grāmatā apgalvo, ka

1. funkcija * ir komutatīva: $x * y = y * x$ visiem $x, y \in \mathbb{Z}$.
2. funkcija * ir asociatīva: $(x * y) * z = x * (y * z)$ visiem $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Kuri no šiem apgalvojumiem izriet no minētajām aksiomām?

BW.K. Kombinatorika

BW.K.1. Noskaidrojiet, kāds ir lielākais iespējamais naturālu skaitļu daudzums, kam izpildās šādas īpašības:

1. Skaitļu pierakstā izmantoti tikai cipari no kopas $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Neviens cipars nevienā skaitlī nav sastopams vairāk kā vienu reizi.
3. Cipari katrā skaitlī ir augošā secībā.
4. Katriem diviem skaitļiem ir vismaz viens kopīgs cipars (var būt dažādās vietās).
5. Neviens cipars nav sastopams visos skaitļos.

BW.K.2. Sarīkojumā, kurā piedalījās 10 cilvēki, fotogrāfs uzņēma dažas fotogrāfijas. Katrs no 45 iespējamajiem cilvēku pāriem redzams kopā tieši vienā fotogrāfijā. Katrā fotogrāfijā pavisam ir redzami divi vai trīs cilvēki. Kāds ir mazākais iespējamais uzņemto fotogrāfiju skaits?

BW.K.3. Direktors ir noskaidrojis, ka viņa iestādē pastāv sešas sazvērestības un katrā sazvērestībā piedalās tieši trīs darbinieki. Pierādiet, ka direktors var sadalīt iestādi divās laboratorijās tā, lai nevienā laboratorijā nebūtu 3 cilvēku, kuri piedalās vienā un tajā pašā sazvērestībā.

BW.K.4. Regulāra piecstūra katrā virsotnē ierakstīts reāls skaitlis. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties divas blakus esošas piecstūra virsotnes un aizstāt katru no skaitļiem, kas tajās ierakstīti, ar to vidējo aritmētisko. Šādus gājienus var izdarīt atkārtoti. Vai no jebkuras sākuma situācijas, kurā visu piecu skaitļu summa ir 0, ir iespējams iegūt situāciju , kurā visi pieci skaitļi ir 0?

BW.K.5. Tabulā, kas sastāv no 30×30 rūtiņām, ierakstīti 162 plusi un 144 mīnusi. Nevienā rindā un nevienā kolonnā nav vairāk kā 17 zīmes (katrā rūtiņā ir ne vairāk par vienu zīmi). Katram plusam izskaitām, cik mīnusu ir vienā rindiņā ar šo plusu. Katram mīnusam izskaitām, cik plusu ir vienā kolonnā ar šo mīnusu. Atrodiet visu šīs skaitīšanas rezultātā iegūto skaitļu summas maksimālo vērtību.

BW.Ģ. Ģeometrija

BW.Ģ.1. Trijstūra augstumu garumi ir 12, 15 un 20. Kāds ir šī trijstūra laukums?

BW.Ģ.2. Trijstūrī ABC B_1 un C_1 ir attiecīgi malu AB un AC viduspunkti. Ap trijstūriem ABC_1 un AB_1C apvilktās riņķa līnijas krustojas bez punkta A vēl arī punktā P. Taisne AP krusto ap trijstūri AB_1C_1 apvilkto riņķa līniju bez punkta A vēl arī punktā P_1. Pierādiet, ka $2AP = 3AP_1$.

BW.Ģ.3. Trijstūrī ABC punkti D un E atrodas attiecīgi uz malām AB un AC. Taisnes BE un CD krustojas punktā F. Pierādiet: ja $BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA$, tad punkti A, D, F, E pieder vienai riņķa līnijai.

BW.Ģ.4. Uz sfēras virsmas atzīmēti 2006 punkti. Pierādiet, ka sfēras virsmu var sagriezt 2006 vienādos gabalos tā, ka katra gabala iekšpusē atrodas tieši viens no atzīmētajiem punktiem.

BW.Ģ.5. Trijstūra ABC mediānas krustojas punktā M. Taisne t iet caur punktu M un krusto ap ABC apvilkto riņķa līniju punktos X un Y tā, ka A un C atrodas vienā pusē no t. Pierādiet, ka $BX \cdot BY = AX \cdot AY + CX \cdot CY$.

BW.S. Skaitļu teorija

BW.S.1. Vai eksistē 4 dažādi naturāli skaitļi ar īpašību: katru divu šo skaitļu reizinājumam pieskaitot 2006, iegūst vesela skaitļa kvadrātu?

BW.S.2. Noskaidrojiet, kuriem naturāliem skaitļiem n skaitlis 3^n+1 dalās ar n^2.

BW.S.3. Katram naturālam skaitlim n ar a_n apzīmēsim $n^{\left(n^n\right)}$ pēdējo ciparu. Pierādiet, ka virkne (a_n) ir periodiska, un noskaidrojiet tās minimālā perioda garumu.

BW.S.4. Vai eksistē naturālu skaitļu virkne $a_1, a_2, a_3,...$ ar īpašību: katram naturālam n katru n pēc kārtas ņemtu virknes elementu summa dalās ar n^2?

BW.S.5. 12-ciparu naturāls skaitlis, kura pierakstā izmantoti tikai cipari 1, 5 un 9, dalās ar 37. Pierādiet, ka šī skaitļa ciparu summa nav 76.

Ieteikumi

S. Sagatavošanas olimpiāde

S.9. Devītā klase

S.9.1. Izsakiet doto sakņu starpības nevienādību ar koeficientiem p un q.

S.9.2. Sastādiet vienādojumu, kurā Andra sākotnējo konfekšu skaits būtu apzīmēts ar a, savukārt Andra apēsto konfekšu skaits - ar x.

S.9.3. Atlieciet hipotenūzas viduspunktu un atcerieties, ka taisnleņķa trīsstūrī attālumi no šī punkta līdz visām trīsstūra virsotnēm ir vienādi (kā ap trīsstūri apvilktās riņķa līnijas rādiusi). Izmantojiet to, ka vienādsānu trīsstūri leņķi pie pamata vienādi.

S.9.4. Lai pierādītu, ka nevar būt vairāk kā 5 krāsas, novērtējiet, cik ir rūtiņu malas, pa kurām krāsas var saskarties.

S.9.5. Atrodiet lielumu, kas atļauto pārveidojumu gaitā nemainās, bet kam būtu jāmainās, lai tabulas varētu pārvērst vienu par otru.

S.10. Desmitā klase

S.10.1. Ievērojiet līdzību starp dotās nevienādības reizinātājiem un vienādojumu. Atcerieties: ja nepārrauktai funkcijai pie dažādām argumenta vērtībām ir dažādas zīmes, tad funkcijas grafiks starp šīm vērtībām krusto x asi.

S.10.2. Novērtējiet atlikumu paritāti atkarībā no dalītāju paritātes.

S.10.3. Atcerieties: ja trīsstūra laukums ir L cm^2 un pret malu novilktais augstums ir a cm, tad šīs malas garums ir $\frac{2L}{a}$ cm. Izmanto to, lai atrastu šim trīsstūrim līdzīgu taisnleņķa trīsstūri.

S.10.4. Atcerieties, ka ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja pretējo leņķu summas pa pāriem vienādas.

S.10.5. Atrodiet piemēru, kad $n = 3$, kas apmierina doto sakarību un apgalvojums ir spēkā arī tad, ja vienādojuma kreisajā pusē x aizstāj ar x^{2006}.

S.11. Vienpadsmitā klase

S.11.1. Apskatiet abu funkciju diskriminantus un seciniet, cik un kādas saknes ir iespējamas.

S.11.2. Apskatiet, kādi ir skaitļu dalītāji, ja skaitļi ir $1, a_1, a_2, ..., a_{19}$, un atrodiet piemēru, kad reizinājumam ir tikai šie dalītāji un nekādi citi.

S.11.3. Izmantojot zināmos riņķa līnijās ievilktos četrstūrus, atrodiet, kāpēc leņķu $\angle BAE$ un $\angle DHG$ summa ir 180^0.

S.11.4. ievietojiet konkrētas vērtības (veiksmīgi 1 un 3) x vietā un no iegūtajām vienādībām iegūstiet pretrunu.

S.11.5. Ar matemātiskās indukcijas metodi pierādiet un izmantojiet lemmu: ja tabulai viena rindiņa ar n rūtiņām un tajā ievietotas $\geq 2^{n-1}$ monētas, tad var panākt, lai pēdējā rūtiņā atrastos kāda monēta.

S.12. Divpadsmitā klase

S.12.1. Apskatiet 6 elementu apakškopas un pierādiet, ka nevar būt vairāk par 32 komisijām. Izveidojiet 32 komisijas, izmantojot kombinācijas.

S.12.2. Atlieciet uz AM nogriezni MS ar garumu BM un pierādiet, ka $AS = CM$.

S.12.3. Lietojiet aritmētisko progresiju. Pārveidojiet izteiksmi, lai viegli izmantot atlikumus, dalot ar 9, un pierādīt, ka vienādība nav iespējama.
S.12.4. Atveriet iekavas un atcerieties nevienādību starp skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.
S.12.5. Ievērojiet, ka ķieģelis sastāv no 5 kubiņiem, līdz ar to saliekamā kuba tilpumam jādalās ar 5.

R. 57. Rajona olimpiāde

R.9. Devītā klase

R.9.1. Saskaitiet atsevišķi pirmskaitļu desmitus un vienus.
R.9.2. Pārveidojiet pierādāmo nevienādību par $(x-2y)(2x-y) \le 0$.
R.9.3. Var pierādīt, ka ΔAYX ir regulārs.
R.9.4. **a)** Pamēģiniet saskaitīt, cik reizes kopā būs dežurējuši katri divi policisti, ja visi iespējamie trijnieki ir nodežurējuši pa vienai reizei.
b) Attēlojiet policistus kā regulāra septiņstūra virsotnes un dežurējušos trijniekus – ar trijstūriem.
R.9.5. Apskatiet **a)** pāra skaitļu skaitu, **b)** skaitļa „3" daudzkārtņu skaitu 2x2 rūtiņu kvadrātos.

R.10. Desmitā klase

R.10.1. Salīdziniet divas monētas savā starpā un tad šo monētu pāri – ar citu monētu pāri.
R.10.2. Nokrāsojiet katru otro kolonnu vienā krāsā.
R.10.3. **b)** Papētiet skaitli 30, mēģiniet vispārināt.
R.10.4. $\Delta BSC \sim \Delta DSA\,(ll)$. Līdzīgos trijstūros augstumu attiecība vienāda ar atbilstošo malu attiecību.
R.10.5. Pārveidojiet $f(x)$, izmantojot pilnā kvadrāta formulu.

R.11. Vienpadsmitā klase

R.11.1. Ja viens no reizinātājiem ir nepāra skaitlis (izņemot vieninieku), tad reizinājums nevar būt divnieka pakāpe.
R.11.2. **a)** Saskaitiet, cik ir simpātiju un cik ir cilvēku klasē. **b)** Attēlojiet skolēnus un viņu simpātijas ģeometriski.
R.11.3. Izdomājiet, kā būtu jākrustojas šādu trinomu grafikiem.
R.11.4. Lietojiet riņķa līnijas un leņķus, kas balstās uz vienu loku.
R.11.5. Pārveidojiet doto vienādību, lai katrs mainīgais tajā būtu uzrakstīts tikai vienu reizi.

R.12. Divpadsmitā klase

R.12.1. Izveidojiet kvadrātvienādojumu, izmantojot ģeometriskās progresijas kvocientu un doto kvadrāttrinomu.
R.12.2. Domājiet par to, cik reizes tiks skarta katra spuldze.
R.12.3. Izpētiet, kādus atlikumus var dot n, dalot ar 6.
R.12.4. Ievērojiet, ka $AX = BX$, tad prasīto iespējams pierādīt ar trijstūru ΔCZY un ΔZBX vienādību.
R.12.5. Uzdevumu var atrisināt divās daļās: atrast nepieciešamo skaitu gājienu (spriežot pēc melno rūtiņu skaita un izvietojuma) un pierādīt, ka ar šādu gājienu skaitu pietiek (sadalot laukumu mazākās daļās un aprakstot to pārveidojumus).

V. 57. Republikas olimpiāde

V.9. Devītā klase

V.9.1. Pārveidojiet doto vienādību, lai varētu iznest līdzīgos saskaitāmos pirms iekavām.

V.9.2. Mēģiniet uzminēt, atceroties Vjeta teorēmas apgūšanai risinātos piemērus. Pastāv sakarība kvadrātvienādojuma koeficientiem, kurai izpildoties, kvadrātvienādojumam noteikti būs veselas saknes.

V.9.3. Novelciet mediānu taisnleņķa trijstūrī BNC un pētiet leņķu lielumus trijstūros ANM un NMC.

V.9.4. Atcerieties: atbildot uz šo jautājumu, ir jāparāda visas iespējamās vērtības, kuras var būt melno rūtiņu skaits, kā arī jāpierāda, ka citas vērtības nevar būt. (Lai parādītu visas melno rūtiņu skaita vērtības, pietiek parādīt kvadrāta krāsošanas shēmu katram rūtiņu skaitam.)

V.9.5. a) Ir iespējams; domājiet par pirmskaitļiem, kas sastādīs rindiņas un kolonnas reizinājumu.
b) Nav iespējams; domājiet par skaitļiem, kas jāraksta uz diagonāles.

V.10. Desmitā klase

V.10.1. a) Ir iespējams. **b)** Pārveidojiet izteiksmi, lai tā būtu divu reizinājumu starpība.

V.10.2. a) To ir iespējams izdarīt 15 gājienos. **b)** Nav iespējams; atrodiet kādu lielumu, kam piemīt viena un tā pati īpašība pēc katra gājiena, taču šī īpašība nepiemīt vēlamajam rezultātam.

V.10.3. Izpētiet, kādi ir atbilstošie saskaitāmie skaitļiem starp diviem blakusesošiem pirmskaitļiem, kāda ir visu šādu saskaitāmo summa. Sadaliet doto summu grupās.

V.10.4. Var pierādīt, ka visi šādi veidoti trijstūri ir vienādmalu un ka to augstumi ir vienādi. Otro var iegūt, pierādot divus faktus: 1. Punkta O attālumu summa līdz izveidotā trijstūra malām ir tā augstums; 2. Nogriežņu OX, OY, OZ garumu summa sakrīt ar sākotnējā trijstūra malas garumu.

V.10.5. a) Saskaitiet, cik dažādu vērtību var būt katrai no piedāvātajām izteiksmēm, ja būs uzrakstīti n skaitļi.
b) Atrodiet, kuri izteiksmju rezultāti tomēr dublējas, ja $n = 6$.

V.11. Vienpadsmitā klase

V.11.1. a) Ir iespējams.
b) Nav iespējams. Pētiet skaitļu atlikumus, dalot tos ar 9.

V.11.2. Tādi kvadrāttrinomi ir. Variet domāt par grafiku saskaitīšanu – kādi grafiki krustotu vai pieskartos x asij paši, bet, kopā saskaitīti, atrastos virs vai zem tās.

V.11.3. Aprēķiniet lapas laukumu, saskaitot daudzstūru daļas, kuras veidojas, daudzstūriem „pārklājoties".

V.11.4. Papildiniet BKC līdz paralelogramam $BKCS$, izmantojiet laukumu vienādības.

V.11.5. a) Izmantojiet doto proporciju, lai secinātu, ka ja viens loceklis ir 0, tad visi kļūst tādi. **b)** Pārveidojiet, vienkāršojiet doto vienādību un a_n vietā ievietojiet a_{n+1}. Pareiziniet sākotnējo vienādojumu ar to, kurā ievietots a_{n+1}. **c)** Izmantojot punktā **b)** iegūtās zināšanas izsakiet vajadzīgo lielumu.

V.12. Divpadsmitā klase

V.12.1. Pielīdziniet vienādojumu kreisās puses vienu otrai. Apskatiet divus gadījumus: a un b atšķirīgi, a un b sakrīt.

V.12.2. a) Ir iespējams.

b) Izdomājiet, kāds būtu virsotnēs ierakstīto skaitļu reizinājums visai figūrai, ja rēķinot izmanto pamatus un ja rēķinot izmanto sānu skaldnes.

V.12.3. Izdomājiet, kuru no atrisinājumiem meklēsiet vispirms, saskaitiet vienādojumus, atņemiet vienādojumus un novērtējiet atrisinājumu pēc lieluma.

V.12.4. Izmantojiet ievilktu leņķu un krustleņķu īpašības, kā arī ievilktu četrstūru īpašības, lai iegūtu $\Delta ACE \sim \Delta ADF$ un izmantotu šo trijstūru mediānas.

V.12.5. a) Jā. Atrodiet pretrunu situācijā, kad katra daļa nesatur kāda (tieši šai daļai atbilstoša) skaitļa daudzkārtni. **b)** Nē, ir iespējams sadalīt skaitļus bezgalīgi daudz grupās tā, ka katrā trūkst kāda skaitļa daudzkārtņu.

A. Latvijas 34. atklātā olimpiāde

A.9. Devītā klase

A.9.1. Atcerieties, ka skaitlis dalās ar 3 tad un tikai tad, ja tā visu ciparu summa dalās ar 3.

A.9.2. Apskatiet trapeces $PNBM$ un $PMCK$.

A.9.3. a) Izsakiet a un b kā divu mainīgo kvadrātu summas un pārveidojiet abu izteiksmju reizinājumu.

b) Izmantojiet **a)** punktā iegūto identitāti, apskatot reizinājumus: $(x^2+1)(x^2+4)$ un $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

A.9.4. Ievērojiet, ka katrā virsotnē viens lauztās līnijas posms ieiet un otrs no tās iziet.

A.9.5. Uzdevuma atrisinājumam ir 2 daļas: 1) jāparāda, kādus gājienus var veikt, lai uz augšu tiktu novietot 8 ģerboņi; 2) jāpierāda, ka vairāk kā 8 ģerboņus uz augšu novietot nevar.

A.10. Desmitā klase

A.10.1. Ievērojiet, ka $\text{LKD}(999\,999,\ 1\,000\,001) = 1$.

A.10.2. a) Apskatiet reizinājumu $(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)$ un atcerieties, ka pozitīvu skaitļu vidējais aritmētiskais vienmēr ir lielāks vai vienāds ar to vidējo ģeometrisko.

b) Atrodiet piemēru, kas pierāda pretējo.

A.10.3. Ievērojiet: ja sieru masas ir $m_1 \le m_2 \le m_3 \le m_4 \le m_5 \le m_6 \le m_7$, tad

$m_1+m_3+m_5+m_7 > m_2+m_4+m_6$ un $m_1+m_3+m_5 < m_2+m_4+m_6+m_7$.

A.10.4. Ievērojiet, ka daudzstūra iekšpusē esošās vertikālās, tāpat arī horizontālās, līnijas ir divu trijstūru un vairāku trapeču/paralelogramu pamati. Izsakiet daudzstūra laukumu kā šo trijstūru un trapeču/paralelogramu laukumu summu.

A.10.5. Apskatiet taisnes, kas iet caur vienu daudzstūra virsotni. Aplūkojiet arī regulārus n-stūrus.

A.11. Vienpadsmitā klase

A.11.1. a) Sākumā novērtējiet nogriezni AP attiecībā pret trijstūra malu AB, pagarinot to līdz krustpunktam ar malu CA; līdzīgi novērtējiet nogriežņus BP un CP.

b) Izveidojiet trijstūri MAN, kur $MN \parallel BC$ un $P \in MN$. Novērtējiet $BP+CP$, izmantojot trijstūra nevienādību, un AP, izmantojot a) punkta novērtējumu.

A.11.2. Pārveidojiet $\frac{n}{n^4+n^2+1}$ tā, lai, ievietojot $n = 1; 2; 3; ...; 2007$, uzdevumā dotā summa pēc pārveidojumiem sastāvētu no diviem viegli novērtējamiem saskaitāmajiem.

A.11.3. Izmantojiet teorēmu par pieskares garuma kvadrātu.

A.11.4. Lai uzzinātu, cik daudz meļu ir uzņēmumā, apskatiet darbinieku, kam ir vislielākā alga no patiesajiem darbiniekiem, un darbinieku, kuram ir vismazākā alga no darbiniekiem, kas melo. Lai uzzinātu, cik daudz patiesu darbinieku ir uzņēmumā, apskatiet to meli, kas strādā visilgāk, un to patieso darbinieku, kas strādā vismazāko laiku.

A.11.5. a) Apskatiet to kvadrātā iekšā esošo rūtiņu malu skaitu, kam abās pusēs ir melnas rūtiņas.

b) Jā, var.

A.12. Divpadsmitā klase

A.12.1. Ievērojiet, ka visi atzīmētie punkti atrodas uz vienas riņķa līnijas.

A.12.2. a) Apskatiet funkciju $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x - 1$ un atrodiet četras x vērtības, starp kurām funkcija maina zīmi.

b) Ievērojiet: ja x_1; x_2; x_3 – taisnstūra paralēlskaldņa augstums, garums un platums, tad izpildās identitāte $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3-6x^2 + 7x-1$.

A.12.3. Apskatiet, kā jāmainās vēlamo pāru skaitam, lai sasniegtu uzdevumā prasīto, un kā var mainīties vēlamo pāru skaits, izpildot uzdevumā minētās operācijas, ja par vēlamu pāri sauc sarkanas un baltas figūriņas pāri ,kur sarkanā figūriņa stāv pa kreisi no baltās (ne noteikti blakus).

A.12.4. a) Pieņemiet, ka tas ir iespējams, un apskatiet punktus A un B, kas ir vienīgās dalījuma līnijas kopīgie punkti ar dotā riņķa robežu.

b) Atrodiet piemēru, kur $n = 12$.

A.12.5. Ievērojiet, ka pie $n = 1$ un $n = 2$ prasītais ir izpildāms, un lietojiet matemātisko indukciju.

VP. Papildsacensības par vietu Latvijas izlasē dalībai 48.Starptautiskajā matemātikas olimpiādē

VP.1. Latvijas 57. matemātikas olimpiādes 4. kārta

VP1.1. Identisku pārveidojumu ceļā iegūstiet, ka $ab + ac + bc = \frac{1+abc}{a+b+c}$. Lietojiet VA-VĢ nevienādību.

VP1.2. Pierādiet, ka $\angle PKM = \angle KXB$ kā attiecīgie leņķi vienādos trijstūros.

VP1.3. No Fermā Mazās teorēmas seko, ka $x^p - x$ un $y^p - y$ dalās ar p.

VP1.4. Apskatiet trijstūri ar vislielāko laukumu starp trijstūriem, kurus veido dotie pieci punkti. Novelciet taisnes caur tā virsotnēm paralēli pretējām malām un apskatiet, kur varētu atrasties pārējie divi punkti.

VP1.5. Izmantojiet matemātisko indukciju, pieņemot, ka starp m pilsētām var atrast pilsētu L, no kuras var aizbraukt uz pārējām m-1 pilsētām. Apskatiet ceļus uz $(m+1)$-o pilsētu P un atcerieties, ka svarīgs ir gan ceļu virziens, gan krāsa.

VP.2. Latvijas izlases atlases sacensības 2007. gada 30. aprīlī

VP.2.1. Šo uzdevumu iespējams atrisināt, izdarot spriedumus par pirmskaitļiem, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar n, un izsakot pārējos pirmskaitļus ar vienu mazāko no tiem.

VP.2.2. Uzdevumā prasīto iespējams pierādīt divos soļos: $(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)\geq(a^2+b^2+c^2)^2$ un $(a^2+b^2+c^2)^3>4(a^6+b^6+c^6)$, no kurām pirmā seko no Koši-Švarca-Bunjakovska nevienādības un otrā – no ekvivalentiem algebriskiem pārveidojumiem.

VP.2.3. Izmantojiet pieskares un hordas veidotā leņķa īpašību, ka tas ir puse no loka, ko savelk horda. Lietojot vienādus leņķus un malu proporcijas, pierādiet $\Delta DMN \sim \Delta ABN$, lai atkal izmantotu iepriekšminēto īpašību.

VP.3. Latvijas izlases atlases sacensības 2007. gada 1. maijā

VP.3.1. Pierādiet, ka: 1) daudzstūris ir centrāli simetrisks; 2) $2n$-stūri iespējams sadalīt $\frac{n(n-1)}{2}$ paralelogramos; 3) $\frac{n(n-1)}{2}$ ir mazākais iespējamais paralelogramu skaits (to var izdarīt, izmantojot 1. pierādījumu). Izmantojot šos trīs faktus (lemmas), var saprast, ka $n\leq 5$ un tātad skaidrs, ka ir iespējams sagriezt 10 paralelogramos.

VP.3.2. Atbilde: tādi n neeksistē. Sadaliet doto skaitli trīs reizinātājos, kas visi ir naturāli skaitļi. Izmantojiet to, ka skaitļu a un b LKD var būt 1 vai 2, ja $a-2$ dalās ar b.
To izmantojot, var spriest par reizinātājiem un secināt, ka divi no tiem ir divkāršoti kvadrāti.

VP.3.3. Atbilde: 3. Uzdevumam ir divas daļas: 1) pierādīt, ka ar mazāk nevar; 2) parādīt, ka ar 3 pietiek.

IMO. 48. Starptautiskā matemātikas olimpiāde (48th International Mathematical Olympiad)

IMO. Uzdevumi 2007. gada 25. jūlijā.

IMO.1. a) Atrodiet tos a_p un a_r, kam $a_p-a_r=d$, un apskatiet a_p; a_r; x_p; x_r.

b) Var pierādīt, ka prasītais izpildās virknei, kas definēta sekojoši: $x_1=a_1-\frac{d}{2}$, $x_k=\max\left\{x_{k-1},a_k-\frac{d}{2}\right\}$ pie $2\leq k\leq n$.

IMO.2. Ja $CF=CG$, tad var viegli pierādīt, ka $\angle GAB=\angle FAD$. Iespējams atrast pretrunas pieņēmumos $CF<CG$ un $CF>CG$.

IMO.3. Iespējams sastādīt algoritmu, kas pakāpeniski pārceļ dalībniekus pa vienam no vienas istabas uz otru un tādējādi sakārto viņus tā, kā prasīts.

IMO. Uzdevumi 2007. gada 26. jūlijā.

IMO.4. Apvelc ap doto trijstūri riņķa līniju un paskaties, kādas līnijas iet caur tās centru.

IMO.5. Pieņem, ka $a \neq b$, un atrodi divas īpašības, ar kurām var bezgalīgi ilgi konstruēt arvien mazākus skaitļus a un b, kuriem izpildās prasītais. Tā būs pretruna ar veselu pozitīvu skaitļu dabu un tātad pieņēmums $a \neq b$ būs aplams.

IMO.6. Atbilde: $3n$. Ja visus plakņu vienādojumus sareizina, iegūst polinomu P, kura pakāpe ir plakņu skaits un kam izpildās $P(x_0, y_0, z_0) = 0$, $(x_0, y_0, z_0) \in S$, un $P(0,0,0) \neq 0$. Var pierādīt, ka šādam polinomam pakāpe $\deg P \geq 3n$.

AB. Atlases sacensības olimpiādei „Baltijas Ceļš 2006”

AB.A. Algebra

AB.A.1. Pārveidojiet vienādības kreiso pusi, pieskaitot 1 pirmajam, trešajam, piektajam, ... saskaitāmajam, bet no pārējiem atņemot 1. Līdzīgi pārveidojiet vienādības labo pusi, atņemot 2 no katra saskaitāmā. Tādējādi iegūstiet, ka jāpierāda vienādība: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

AB.A.2. Izvēlieties $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vērtības, lai pierādītu, ka nevienādība nav pareiza visām $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vērtībām, ja $n = 3$ vai $n \geq 5$. Pierādiet, ka nevienādība ir pareiza visām x_1, x_2, x_3 un x_4 vērtībām.

AB.A.3. Pieņemiet, ka $x \geq y$, un iegūstiet citu nevienādību no vienādojumu sistēmā dotajām vienādībām.

AB.A.4. Pārveidojiet pierādāmo nevienādību. Pārveidojumu gaitā trīs reizes lietojiet sakarību $x^2 + y^2 \geq 2xy$ un izmantojiet sakarību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

AB.A.5. Izmatojiet doto sakarību, lai iegūtu citas sakarības, piemēram, $f(f(m) + f(n)) = f(n+m) + f(m) + f(n)$. Atcerieties, ka variet formulās m vietā ievietot n un iegūt citas sakarības.

AB.K. Kombinatorika

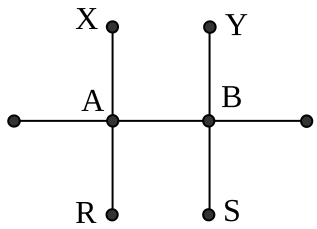
AB.K.1. Sadaliet riņķa līniju 198 vienādos lociņos un apskatiet tos 100 dalījuma punktus, kur attālumi starp diviem blakus esošiem dalījuma punktiem, izteikti lociņu skaitā, atbilst santīmu skaitiem Jāņa monētās.

AB.K.2. Apskatiet virkni $e_1, d_1, c_1, b_1, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{36}, a_{37}$ un atcerieties, ka apskatāmās virknes skaitļiem ir tikai 10 dažādas iespējamas vērtības.

a_1	b_1	c_1	d_1	e_1
a_2	b_2	c_2	d_2	e_2
a_3	b_3	c_3	d_3	e_3
...	...	...	...	...
a_{37}	b_{37}	c_{37}	d_{37}	e_{37}

AB.K.3. Parādiet, kā Andris var panākt, lai figūriņa pārbīdītos **pa labi** par attālumu $\frac{1}{512}$ no sākotnējās vietas, bet ievērojiet, ka Maija var figūriņu bīdīt ne tikai pa labi, bet arī pa kreisi.

AB.K.4. Ievērojam, ka mēs iekrāsojam figūras, kas vienādas ar zīmējumā redzamo.



14. zīm.

Ievērojiet: ja šāda figūriņa nokrāsota, tad, nokrāsojot nogriezni XY, nāksies nokrāsot otrreiz XA vai/un YB; līdzīgi, nokrāsojot RS, nāksies nokrāsot otrreiz RA vai/un SB. Apskatiet, kāds tādā gadījumā būtu maksimālais iespējamais nokrāsoto nogriežņu skaits pēc $1\ 300\ 000$ gājieniem.

AB.K.5. Skatīt ieteikumu S.11.5.

AB.Ģ. Ģeometrija

AB.Ģ.1. Apskatiet vidusperpendikulu veidotos leņķus pie malas AD un seciniet, kāds būs vidusperpendikulu veidotais leņķis. Atcerieties: ja trijstūrī augstums ir arī mediāna, tad tas ir arī bisektrise.

AB.Ģ.2. Ievērojiet, ka $\angle YDI = \angle AYI$ un $\angle YDI = \angle AYI$, un izmantojiet līdzīgu trijstūru malu attiecības.

AB.Ģ.3. Apskatiet gadījumu, kad visi punkti atrodas uz vienas taisnes, un gadījumu, kad trīs punkti A, B un C neatrodas uz vienas taisnes. Otrajā gadījumā ērti apskatīt, cik novietojumu var būt punktiem, no kuriem attālumi līdz dotajiem trīs punktiem A, B un C ir attiecīgi x, y un z.

AB.Ģ.4. Atcerieties, ka var salīdzināt pēc lieluma ($1:1$ vai $1:2$) leņķus, kas balstās uz vienu un to pašu riņķa līnijas loku.

AB.Ģ.5. Apzīmējiet četrstūra diagonālu viduspunktus un, izmantojot Ptolomeja teorēmu, pārveidojiet Eilera formulu.

AB.S. Skaitļu teorija

AB.S.1. No dotā vienādojuma izsakiet n un ievērojiet: ja vienādības viena puse dalās ar kādu skaitli, tad arī vienādības otrai pusei jādalās ar šo pašu skaitli.

AB.S.2. ievērojiet, ka doto skaitli var izteikt formā:

$$\underbrace{a0a0\ldots a0a}_{\text{2003 cipari}}\underbrace{00\ldots0}_{\text{2002 nulles}}+\underbrace{c0c0\ldots c0c}_{\text{2003 cipari}}+(b-a-c)\cdot 10^{2002}.$$

Šajā uzdevumā ērti izmantot faktu, ka 10101 dalās ar 37 bez atlikuma.

AB.S.3. Pierādiet prasīto, pieņemot pretējo – ka eksistē skaitlis d, kas vienlaicīgi apmierina visas trīs prasības.

AB.S.4. Pierādiet, ka $m = n = 1$, šķirojot gadījumus, kad $n = 1$ un $n > 1$.

AB.S.5. Ievērojiet, ka $n^3 - 1$ var sadalīt reizinātājos (n - 1) un ($n^2 + n + 1$), kur viens no šiem reizinātājiem dalīsies ar p, tātad to varēs izteikt formā $t \cdot p,\ t \in N$. Izmantojiet apzīmējumu $p = nk + 1,\ k \in N$.

BW. 17. matemātikas komandu olimpiāde „Baltijas Ceļš 2006”

BW.A. Algebra

BW.A.1. Ievērojiet, ka virkne ātri kļūst alternējoša (viens elements pozitīvs, viens negatīvs), tātad vērts apskatīt tikai pirmos elementus. Izsakiet nākamos elementus izmantojot pirmos trīs, un atrodiet, kuri elementi nevar vienlaicīgi būt pozitīvi.

BW.A.2. Rezultātu iespējams iegūt izmantojot nevienādību starp vidējās vērtības kvadrātu un i-tā elementa un vidējās vērtības starpības kvadrātu. Veidojiet summas pa i elementiem ar šīs nevienādības abām pusēm.

BW.A.3. Izmantojot indukciju, iespējams pierādīt, ka jebkuras pakāpes polinomu var izteikt kā kubu summu. Induktīvās pārejas pierādījumā apskatiet trīs gadījumus atkarībā no tā, kādu atlikumu polinoma pakāpe dod, dalot ar 3.

BW.A.4. Pareizā atbilde ir 8. Uzdevumu var atrisināt, izmantojot aritmētiskā vidējā un ģeometriskā vidējā nevienādību.

BW.A.5. Pirmais apgalvojums seko no aksiomas, otrais apgalvojums neseko. Lai pierādītu 1. apgalvojumu, der apzīmēt $x * y = z$ un pārrakstīt aksiomas citādāk. 2. apgalvojumam iespējams atrast pretpiemēru – funkciju, kam izpildās aksiomas, bet neizpildās 2. apgalvojums (šī funkcija ir diezgan vienkārša).

BW.K. Kombinatorika

BW.K.1. Uzdevuma risinājumam ir divas daļas: pierādīt, ka var būt ne vairāk kā 32 šādi skaitļi, un parādīt, ka tiešām ir šādi 32 skaitļi. Pirmo daļu pierādot, var izmantot $\{1, 2, ..., 6\}$ visas apakškopas un apskatīt, kā tās savstarpēji pārklājas.

BW.K.2. Uzdevuma atrisinājumam ir divas daļas: atrast, ka nepieciešamas vismaz 19 fotogrāfijas un pārliecināties, ka ar 19 fotogrāfijām pietiek. Pirmajai daļai var izmantot fotogrāfiju pa divi un fotogrāfiju pa trīs skaitu, lai saskaitītu pārus un to, ar cik cilvēkiem parādās katrs cilvēks, lai novērtētu pāru fotogrāfiju skaitu. Otrajā daļā vajag uzkonstruēt kādu piemēru, kurā 19 fotogrāfijās atrodami visi 45 pāri.

BW.K.3. Izmantojot Dirihlē principu, iegūstam, ka var atrast tādus trīs cilvēkus, kas nav vienā sazvērestībā jau mazam darbinieku skaitam. Lielākiem darbinieku skaitiem izmanto indukciju.

BW.K.4. Atbilde: nē. Risinājums sastāv no trim soļiem: 1) izvēlēties sākuma pozīciju, no kuras nav iespējams iegūt prasīto, 2) pārveidot uzdevumu formā, kurā to ir vieglāk pierādīt, 3) ievērot, ka šajā formā sākuma pozīcijai piemīt un saglabājas īpašība, kas nepiemīt tam, kas jāiegūst.
Pārveidotais uzdevums: pieskaitot katrai virsotnei vienu piektdaļu, iegūst četras nulles un vieninieku. Īpašība: skaitļi ir uzrakstāmi formā $\frac{k}{2^m}$.

BW.K.5. Atbilde: $2592 = 72 \cdot 18 \cdot 2$. Uzdevumam ir divas daļas: atrast maksimālo vērtību un parādīt, ka to var sasniegt. Pirmo daļu var pierādīt, atrodot funkciju pa visām zīmēm, kas atrod meklēto summu, un noteikt tās maksimālo vērtību. Otrā daļā pietiek parādīt kādu izkārtojuma piemēru.

BW.Ģ. Ģeometrija

BW.Ģ.1. Atbilde ir 150. Lai to atrastu, izsaka visas malas ar vienu no tām un tad izmanto divas atšķirīgas laukuma aprēķināšanas formulas.

BW.Ģ.2. Šo attiecību iespējams atrast no diviem līdzīgiem ar riņķa līnijām apvilktiem četrstūriem.

BW.Ģ.3. Atzīmējiet punktu G uz BC tā, ka $BG \cdot BC = BD \cdot BA$. Tas palīdz atrast vairākus četrstūrus, kam virsotnes atrodas uz riņķa līnijām.

BW.Ģ.4. To iespējams izdarīt, iedomājoties lodei ziemeļu un dienvidu polus, novelkot paralēles caur dotajiem punktiem tā, lai uz katras paralēles būtu viens punkts, un velkot „vertikāles" no ziemeļiem uz dienvidiem, krustojot ar tām paralēles „pareizajās" vietās.

BW.Ģ.5. Uzdevumu iespējams pierādīt, izmantojot lemmu: ja riņķa līnijā ievilkta četrstūra ($ABCD$) diagonāles krustojas punktā O, tad $\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{BO}{OD}$.

BW.S. Skaitļu teorija

BW.S.1. Pētiet, kādu atlikumu dod šie skaitļi, dalot ar 4, kādu – to reizinājumi, kādu – skaitļu kvadrāti.

BW.S.2. Iespējams tikai $n = 1$. Var pierādīt, ka n nevar būt pāra skaitlis; te izmanto dalīšanos ar 4. Var pieņemt, ka ir kāds $n > 1$, kam izpildās prasītais. Izmantojiet n mazāko pirmreizinātāju un to, ka ar to ir jādalās gan $3^n + 1$, gan tā reizinājumam ar $3^n - 1$. Pētiet mazāko pakāpi, kādā var kāpināt 3, lai, atņemot 1, rezultāts dalītos ar minēto pirmskaitli. Izmantojiet šo pakāpi, lai atrastu, kāds ir n un $p - 1$ lielākais kopīgais dalītājs.

BW.S.3. Cikla garums ir 20. Pētiet n un n^n atkarībā no to pēdējiem cipariem, to atlikumus, dalot ar 4 un, kad nepieciešams, ar 20, un kādus a_n tie dod katrā gadījumā.

BW.S.4. Jā, šāda virkne eksistē. Iespējams pierādīt, ka var atrast nākamo elementu virknē, ja doti sākotnējie. Ar to arī pietiek, jo var sākt konstruēt virkni no viena skaitļa.

BW.S.5. Atrodiet dalāmības pazīmi ar skaitli 37, kas līdzīga dalāmības pazīmēm ar 3 un ar 9. Apskatiet dotā skaitļa un $111\ 111\ 111\ 111$ starpību.

Atrisinājumi

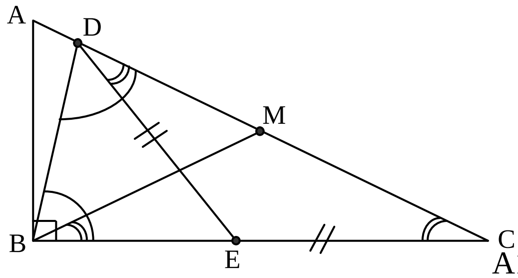
S. Sagatavošanas olimpiāde

S.9. Devītā klase

S.9.1. No dotā vienādojuma $|x_1 - x_2| \geq 6$. Lai, izmantojot Vjeta teorēmu, izteiktu starpību ar p un q, kāpinām abas puses kvadrātā. Izsakot iegūstam $\sqrt{p^2 - 4q} \geq 6 \Leftrightarrow p^2 - 4q \geq 36$. Starpība starp otrā kvadrātvienādojuma saknēm ir $\sqrt{4p^2 - 12q} = \sqrt{p^2 + 3(p^2 - 4q)} \geq \sqrt{3 \cdot 36} = \sqrt{108} > 10$.

S.9.2. Pieņemsim, ka Andrim bija a konfekšu, tad arī Maijai bija a konfekšu. Ja Andris apēda x konfektes, tad Maija apēda $8x$ konfektes. No tā secinām, ka Andrim palika a-x, bet Maijai a-$8x$ konfekšu. Tā kā Andrim palika 9 reizes vairāk konfekšu nekā Maijai, varam izveidot vienādojumu: $a - x = 9(a - 8x) \Rightarrow 72x - x = 9a - a \Rightarrow 8a = 71x$. Tātad 8a dalās ar 71. Tā kā LKD(8, 71)= 1, tad a dalās ar 71, kas bija jāpierāda.

S.9.3. Skat. A1. zīm.



A1. zīm.

Apzīmējam hipotenūzas AC viduspunktu ar M; tad $MA = MB = MC$. Tāpēc $\angle MBC = \angle MCB = \angle DCE = \angle EDC$ (vienādsānu trijstūru leņķi pie pamata). No vienādsānu trijstūra BCD seko $\angle BDC = \angle DBC$. Tāpēc $\angle BDE = \angle BDC - \angle EDC = \angle DBC - \angle MBC = \angle DBM$. Tāpēc $\Delta EBD = \Delta MDB$ ($\ell m \ell$), tātad $EB = MD$ un $ED = MB$.

Tāpēc $AD + BE = AD + DM = AM = BM = DE$, kas arī bija jāpierāda.

S.9.4. Atbilde: 5 krāsas.

Risinājums sastāv no 2 daļām. Pirmkārt: parādīt, ka ar 5 krāsām rūtiņas var izkrāsot tā, lai krāsojums atbilstu uzdevuma nosacījumiem (piemēru skat. A2. zīm); otrkārt: pierādīt, ka ar vairāk krāsām tas nav iespējams.

1.variants. Pieņemsim, ka krāsu būtu vismaz 6, tad dažādu krāsu pāru būtu vismaz 15, bet ir tikai 12 rūtiņu malas, pa kurām rūtiņas var saskarties. No tā secinām, ka nav iespējams rūtiņas izkrāsot 6 vai vairāk krāsās.

2.variants. Pieņemsim, ka rūtiņas ir izkrāsotas 6 vai vairāk krāsās. Apskatām vidējo rūtiņu, tā ir nokrāsota krāsā a. Uz visām 4 pusēm tai rūtiņas var būt izkrāsotas maksimums četrās citās krāsas (skat. A3. zīm). Nokrāsojot kaut vai visas atlikušās četras rūtiņas krāsā f, tām blakus var atrasties maksimums četras citā krāsā nokrāsotas rūtiņas, bet, ja tika izmantotas 6 vai vairāk krāsas, tad ar to nepietiek, jo rūtiņām, kas nokrāsotas krāsā f, jārobežojas ar rūtiņām, kas nokrāsotas piecās citās krāsās. Esam ieguvuši pretrunu.

a	b	d
c	e	a
b	d	c

A2. zīm.

	b	
e	a	c
	d	

A3. zīm.

	a	z
x		b
c	y	

A4. zīm.

S.9.5. Izdarāmo gājienu rezultātā lielums $\frac{abc}{xyz}$ (skat. A4. zīm.) nemainās, jo a, b, c, x, y, z ir izvietoti tā, lai, izvēloties jebkuru rindu vai kolonnu, tiktu izmainīts viens lielums saucējā un otrs – skaitītājā. Tā kā sākotnējā un iegūstamajā tabulā dalījumam ir dažādas vērtības: $\frac{4\cdot 8\cdot 9}{6\cdot 10\cdot 5}\neq\frac{6\cdot 10\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 9}$, prasītā pārveidošana nav iespējama.

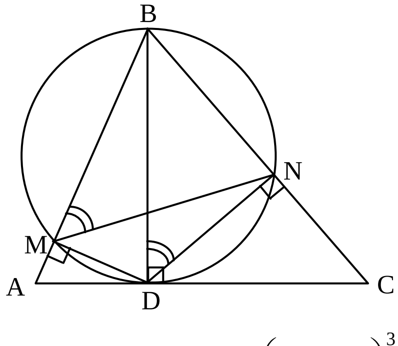
S.10. Desmitā klase

S.10.1. Apzīmējam $f(x)=ax^2+bx+c$. No dotā seko, ka $f(1)\cdot f(-3)<0$, tāpēc $f(x)$ maina zīmi intervālā $(-3;1)$, t.i., funkcijas grafiks **krusto** Ox asi starp punktiem (-3) un 1, tāpēc šai parabolai ir vēl otrs krustpunkts ar Ox asi.

S.10.2. Skaitļi 24 un 50 abi ir pāra skaitļi. Dalot pāra skaitli ar pāra skaitli, atlikums vienmēr ir pāra skaitlis (varbūt 0), bet, dalot nepāra skaitli ar pāra skaitli, atlikums vienmēr ir nepāra skaitlis. Tātad, dalot kādu skaitli ar 24 un 50, atlikumu summa vienmēr būs pāra skaitlis: saskaitot divus pāra skaitļus, summa ir pāra skaitlis un, saskaitot divus nepāra skaitļus, summa ir pāra skaitlis. Tā kā 17 ir nepāra skaitlis, tad atlikums, dalot ar 3, ir nepāra skaitlis. Dalot ar 3 var iegūt atlikumus 0, 1, 2; no tā seko, ka, dalot ar 3, ieguva atlikumu 1.

S.10.3. Ja trijstūra laukums ir L, tad tā malu garumi ir $\frac{2L}{24}$, $\frac{2L}{30}$ un $\frac{2L}{40}$. Trijstūris, kura malu garumi ir $\frac{60}{L}$ reizes lielāki nekā pētāmajam, ir tam līdzīgs; bet tā malu garumi ir 5, 4 un 3 ,tātad tas ir taisnleņķa. Tātad arī dotais trijstūris ir taisnleņķa; tāpēc tā divi garākie augstumi ir tā katetes, un tā laukums ir $\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 40=600$.

S.10.4. Tā kā $\angle BMD+\angle BND=90^o+90^o=180^o$, tad ap $BNDM$ var apvilkt riņķa līniju. Tāpēc $\angle BMN=\angle BDN$ (ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku). Bet $\angle NCD=90^o-\angle NDC=\angle BDN$, tātad $\angle NCD=\angle BMN$. Tāpēc $\angle AMN+\angle ACN=\angle AMN+\angle BMN=180^o$, no kā seko prasītais.



A5. zīm.

S.10.5. Viegli pārbaudīt, ka $x=\left(-\sqrt[3]{2}x\right)^3+\left(x-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3+\left(x+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3$.

Ceļot šo vienādību 2006. pakāpē (un labajā pusē atstājot visus kubu reizinājumus), iegūstam vajadzīgo izteiksmi pakāpei x^{2006} (labajā pusē ir 3^{2006} kubi).

S.11. Vienpadsmitā klase

S.11.1. Abām funkcijām diskriminanti ir vienādi. Tas nozīmē, ka abiem vienādojumiem $f(x)=0$ un $g(x)=0$ vai nu abiem ir pa divām saknēm, vai abiem – pa vienai saknei, vai abiem sakņu nav. Tāpēc vai nu abas minimālās vērtības ir pozitīvas, vai abas – negatīvas, vai abas – nulle. No šejienes seko vajadzīgais.

S.11.2. Atbilde: 191.

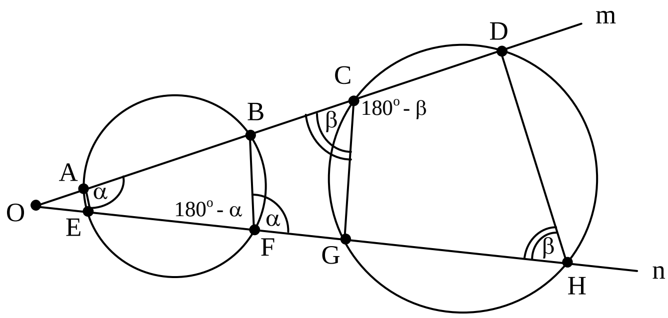
Risinājums sastāv no 2 daļām. Pirmkārt: pierādīt, ka nevar būt mazāk kā 191 naturālie dalītāji; otrkārt: parādīt, ka eksistē skaitlis, kuram ir tieši 191 naturāls dalītājs. Pirmkārt: vismaz 19 no minētajiem skaitļiem nav 1. Pieņemsim, ka tie ir $d_1 < d_2 < ... < d_{18} < d_{19}$. Tad dalītāji

$$\begin{gathered}1 < \\ < d_1 < d_2 < ... < d_{19} < \\ < d_1 d_{19} < d_2 d_{19} < ... < d_{18} d_{19} < \\ < d_1 d_{18} d_{19} < d_2 d_{18} d_{19} < ... < d_{17} d_{18} d_{19} < \\ ... \\ < d_1 d_3 d_4 ... d_{18} d_{19} < d_2 d_3 d_4 ... d_{18} d_{19} < \\ < d_1 d_2 d_3 d_4 ... d_{18} d_{19}\end{gathered}$$

visi ir dažādi, jo katrs nākošais lielāks par iepriekšējo, un to skaits ir $1+(19+18+17+...+2+1)=191$.

Otrkārt: ja $n = 1 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot ... \cdot 2^{19} = 2^{190}$, tad skaitlim n ir tieši 191 dažāds naturāls dalītājs: $1, 2^1, 2^2, 2^3 ..., 2^{189}, 2^{190}$

S.11.3. Apzīmējam $\angle EAB = \alpha$. Tā kā E, A, B un F atrodas uz vienas riņķa līnijas, tad $\angle EAB$ pretējais leņķis $\angle BFE = 180^0 - \alpha$. Līdzīgi apzīmējam $\angle DHG = \beta$. Tā kā C, D, H un G atrodas uz vienas riņķa līnijas, tad $\angle DHG$ pretējais leņķis $\angle GCD = 180^0 - \beta$. Tā kā arī B, C, G un F atrodas uz vienas riņķa līnijas, tad $\alpha + \beta = 180^0$. No tā seko, ka arī A, D, H un E atrodas uz vienas riņķa līnijas, jo pretējo leņķu summa $\angle EAB + \angle DHG = \alpha + \beta = 180^0$ (skat. A6. zīm.).



A6. zīm.

S.11.4. Pie $x=1$ iegūstam $f(3)=(f(1))^2+2$; pie $x=3$ iegūstam $f(1)=(f(3))^2+2$. Ievietojot (un apzīmējot $f(1)=a$), iegūstam

$$a=(a^2+2)^2+2.$$

Tas nav iespējams. Tiešām, ja tā būtu ,tad $a>2$; bet tad $a^2+2>a>2$ un

$a=\left(a^2+2\right)^2+2>\left(a^2+2\right)^2>a^2+2>a$ – pretruna.

S.11.5. Lemma. Ja tabulā ir 1 rindiņa ar n rūtiņām un tajā izvietotas $\geq 2^{n-1}$ monētas, tad var panākt, lai pēdējā rūtiņā atrastos kāda monēta.

Lemmu pierāda ar matemātisko indukciju. Bāze $n=1$ ir triviāla. Apskatām pāreju. Ja sākumā pēdējā rūtiņā jau ir kāda monēta, viss kārtībā. Pretējā gadījumā apskatām $1\times(n-1)$ tabulu, kurā ir **divi komplekti** monētu, katrā pa $\geq 2^{n-2}$ monētām; saskaņā ar induktīvo hipotēzi katrs no šiem komplektiem var „nogādāt" (n-1)-ā rūtiņā vismaz vienu monētu. Tās abas izmantojot, iegūst vajadzīgo tabulai $1\times n$. Lemma pierādīta.

Piešķiram rūtiņām koordinātas, kā parādīts A7. zīmējumā.

1					
2					
	1	2	3	…	n

A7. zīm.

Risinām ar indukciju sākotnējo uzdevumu. Pie $n=1$ apgalvojums ir acīmredzams. Tiešām, ir tikai 3 sākuma konfigurācijas:

- Abas monētas ir augšējā rūtiņā.
- Viena monēta ir augšējā, bet otra ir apakšējā rūtiņā.
- Abas monētas ir apakšējā rūtiņā, bet tādā gadījumā vienu no monētām var pārvietot uz augšējo rūtiņu.

Pieņemsim, ka tas patiess tabulām $2\times(n-1)$. Apskatām tabulu $2\times n$. Šķirojam iespējas:

a) n-jā kolonnā ir ≥ 2 monētas; ir 3 konfigurācijas, izkārtotas tāpat kā gadījumā, kad $n=1$.

b) n-jā kolonnā ir 1 monēta. Ja tā ir rūtiņā (1, n), viss jau ir kārtībā. Ja tā ir rūtiņā (2, n), tad **tabulā $\mathbf{2\times(n-1)}$** ir 2^n-1 monētas. Ir divi apakšgadījumi:

b_1) 1. rindiņā ir $\geq 2^{n-1}$ monētas; lietojam lemmu tabulas $2\times \mathrm{n}$ augšējai rindiņai.

b_2) 1. rindiņā ir $<2^{n-1}$ monētas; tad 2. rindiņā ir $\geq 2^{n-1}$ monētas. Lietojot lemmu, nogādājam vienu no tām rūtiņā (2, n). Tā kā tur jau atradās viena monēta, tad tagad tur ir 2 monētas, un ar nākošo gājienu sasniedzam vajadzīgo.

c) n-jā kolonnā monētu nav. Tad tabulā $2\times(n-1)$ ir divi komplekti, katrā pa 2^{n-1} monētām. Saskaņā ar induktīvo hipotēzi nogādājam rūtiņā (2, n-1) 2 monētas un ar nākošo gājienu sasniedzam mērķi.

S.12. Divpadsmitā klase

S.12.1. Atbilde: 32 komisijas.

Risinājums sastāv no divām daļām. Pirmkārt: pierādīt, ka vairāk kā 32 komisijas izveidot nevar; otrkārt: parādīt, ka var izveidot 32 komisijas. Pirmkārt: sešu elementu kopai ir $2^6=64$ apakškopas. Sadalām tās pāros tā, ka katra kopa ir pārī ar savu papildinājumu (piem., {1,2} ir pārī ar {3,4,5,6}); pavisam ir 32 pāri. Abas apakškopas no viena pāra nevar veidot komisijas, jo tām nav kopīga elementa; tātad komisiju nevar būt vairāk par 32. Otrkārt, lai izveidotu 32 komisijas, var rīkoties šādi:

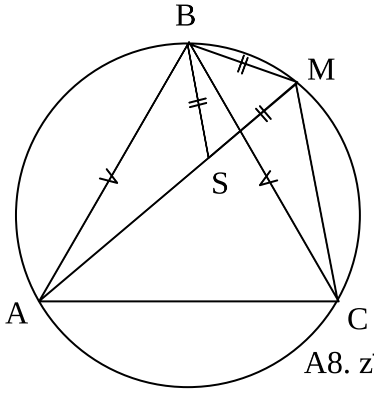
- ņemam 1 komisiju, kas satur visus sešus cilvēkus;
- ņemam 6 komisijas, kas satur pa pieciem cilvēkiem;
- ņemam $C_6^4=15$ komisijas, kas satur pa četriem cilvēkiem;

- ņemam $C_5^2 = 10$ komisijas, kas satur pa trim cilvēkiem; pie tam viens no tiem visās 10 komisijās ir viens un tas pats cilvēks *A*.

Ievērojam, ka 1 + 6 + 15 + 10 = 32.

Konstrukcijas pareizības pārbaudē lietderīgi ievērot faktu: ja divās komisijās kopā ir vairāk par 6 locekļiem, tad tām noteikti ir kopējs loceklis. Ir izveidotas komisijas, kurās ir 3, 4, 5 vai 6 cilvēki. 3 + 3 = 6, taču visās 10 triju cilvēku komisijās ir kopējs cilvēks *A*. Ņemot jebkuras citas divas komisijas, to locekļu kopskaits ≥ 7, no kā seko, ka tām noteikti ir kāds kopējs loceklis.

S.12.2. Skat. A8. zīm.



A8. zīm.

Ievērojam, ka $\angle BMA = \angle BCA = 60^o$, jo abi leņķi balstās uz viena un tā paša loka. Atliekam $MS = MB$; tad ΔBMS ir vienādsānu ar virsotnes leņķi 60^o, tātad regulārs. Tāpēc $BS = BM$. Ievērojam arī, ka $BA = BC$ un $\angle ABS = 60^o - \angle SBC = \angle CBM$. Tāpēc $\Delta ABS = \Delta CBM$ ($m\ell m$), tātad $AS = CM$; tāpēc $CM + BM = AS + SM = AM$, k.b.j.

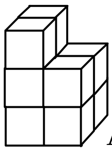
S.12.3. Izmantojot aritmētiskās progresijas locekļu summas formulu, vienādība pārveidojas par $\frac{n(n+1)}{2} + 2 = k^2$ un tālāk par $n(n+1) = 2k^2 - 4$. Apskatīsim atlikumus, dalot ar 9:

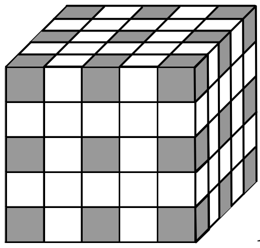
n atlikums	Kreisās puses atlikums	k atlikums	Labās puses atlikums
0	0(0+1)=0 atl.0	0	$2\cdot 0^2 - 4$=-4 atl.5
1	1(1+1)=2 atl.2	1	$2\cdot 1^2 - 4$=-2 atl.7
2	2(2+1)=6 atl.6	2	$2\cdot 2^2 - 4$=4 atl.4
3	3(3+1)=12 atl.3	3	$2\cdot 3^2 - 4$=14 atl.5
4	4(4+1)=20 atl.2	4	$2\cdot 4^2 - 4$=28 atl.1
5	5(5+1)=30 atl.3	5	$2\cdot 5^2 - 4$=46 atl.1
6	6(6+1)=42 atl.6	6	$2\cdot 6^2 - 4$=68 atl.5
7	7(7+1)=56 atl.2	7	$2\cdot 7^2 - 4$=94 atl.4
8	8(8+1)=72 atl.0	8	$2\cdot 8^2 - 4$=124 atl.7

Tā kā atlikumi abām pusēm ir dažādi, tad vienādība nav iespējama.

S.12.4. Atverot iekavas, nevienādība pārveidojas par $15abc \leq a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + a^2b + ab^2 + ab^2 + a^2c + a^2c + ac^2 + ac^2 + b^2c + b^2c + bc^2 + bc^2$. Tas seko arī no nevienādības starp 15 skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, tātad nevienādība ir pareiza.

S.12.5. a) No diviem ķieģeļiem var salikt figūru, kāda parādīta A9. zīm., no divām tādām figūrām - taisnstūra paralēlskaldni ar izmēriem 2×2×5, no 50 tādiem paralēlskaldņiem - kubu ar izmēriem 10×10×10.


A9. zīm.


A10. zīm.

b) kuba tilpums ir $k \times k \times k = V$. Tā kā ķieģelis satur 5 kubiņus, tad saliekamā kuba tilpums V dalās ar 5 (pieņemt kubiņa šķautnes garumu par 1). Tā kā 5 ir pirmskaitlis, tad arī kuba malas garums k dalās ar 5. Tāpēc vienīgais kubs, kas ir mazāks par 10×10×10 un ko varbūt varētu salikt no ķieģeļiem, ir kubs ar izmēriem 5×5×5; tad tas sastāvētu no 25 ķieģeļiem. Nokrāsosim šajā kubā 27 kubiņus pēc A10. zīm. redzamās shēmas. Viens ķieģelis var saturēt augstākais 1 nokrāsoto kubiņu; tāpēc A10. zīm. redzamo kubu no ķieģeļiem salikt nevar.

R. 57. Rajona olimpiāde

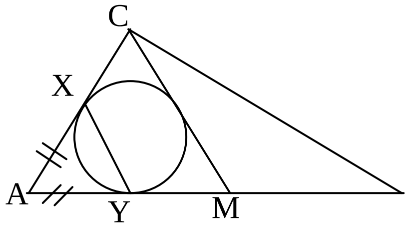
R.9. Devītā klase

R.9.1. Šādi pirmskaitļi var būt, piemēram, 23; 41; 59; 67. To summa ir 190. Tā nevar būt citāda, jo cipari 2; 4; 5; 6 nevar būt saskaitāmo pirmskaitļu vienu cipari; tāpēc tie ir desmitu cipari, un meklējamā summa noteikti ir $10 \cdot (2+4+5+6)+(1+3+7+9)=10 \cdot 17+20=190$.

R.9.2. Pārveido pierādāmo nevienādību: $2x^2 - xy - 4xy - 2y^2 \le 0$; iznes pirms iekavām līdzīgos saskaitāmos: $x(2x-y)-2y(2x-y) \le 0$ un iegūst $(\mathrm{x}-2\mathrm{y})(2\mathrm{x}-\mathrm{y}) \le 0$, ko, dalot ar $2y^2 > 0$, pārveido par $\left(\frac{x}{y}-2\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\right) \le 0$.

No dotā $\frac{3}{6} \le \frac{x}{y} \le \frac{6}{3}$, tātad pēdējā nevienādība izpildās, jo pirmā iekava būs mazāka par nulli, vai nulle, ja $\frac{x}{y}=2$, bet otrā – vai nu lielāka par nulli, vai nulle, ja $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$.

R.9.3. Mediāna ir vienāda ar pusi no hipotenūzas, tāpēc $MA=MC$. Tā kā $\Delta AMC \sim \Delta AYX$ (malas pa pāriem paralēlas), tad $YA=YX$. Pieskaru vienādības dēļ $YA=XA$. Tāpēc ΔAYX visas malas ir vienādas un tas ir regulārs, $\angle A = 60°$ un $\angle B = 30°$.



A11. zīm.

R.9.4. a) Ja visi iespējamie policistu trijnieki ir nodežurējuši pa vienai reizei, tad katrs pāris ir dežurējis kopā ar pieciem citiem policistiem; tātad var būt n = 5.

b) attēlosim policistus ar regulāra 7-stūra virsotnēm. Ja pa reizei dežurēs visi tie policistu trijnieki, kuru atbilstošās virsotnes veido vienādsānu trijstūri, iegūsim situāciju ar n = 3.

R.9.5. Katrā 2×2 rūtiņu kvadrātā var būt ne vairāk kā viens pāra skaitlis. Tātad nepāra skaitļi ierakstīti vismaz $25 \times 3 = 75$ reizes. Tā kā to pavisam ir pieci, iegūstam **a)** risinājumu.

Katrā 2×2 rūtiņu kvadrātā var būt ne vairāk kā viens no skaitļiem 3 un 9. Atceroties arī spriedumu par pāra skaitļiem, iegūstam: katrā 2×2 rūtiņu kvadrātā ir vismaz 2 skaitļi no kopas $\{1;5;7\}$; tātad to pavisam ir vismaz 50. Tā kā $3 \cdot 16 < 50$, iegūstam **b)** risinājumu.

R.10. Desmitā klase

R.10.1. Salīdzinām divas monētas A un B. Pastāv divas iespējas.

1.) A un B ir dažādas masas. Tad viena no tām ir viltota, otra – īsta. Sadalām atlikušās 2004 monētas 1002 pāros un katru no tiem salīdzinām ar pāri (A, B). Katrā svēršanā mēs noskaidrosim, cik viltoto monētu ir tajā pārī, ko salīdzinām ar (A, B). Pavisam tiks izmantotas $1 + 1002 = 1003$ svēršanas.

2.) A un B ir vienādas masas. Kā iepriekš salīdzinām pāri (A, B) ar citiem monētu pāriem, kamēr atrodam pāri (C, D), kura masa atšķiras no (A, B) masas. Pieņemsim, ka (C, D) kopējā masa ir mazāka nekā (A, B) kopējā masa (otrs gadījums ir šim „simetrisks"). Tad A un B, kā arī visas citas līdz šim svērtās monētas ir īstas. Salīdzinām C un D. Rezultātā mēs atrodam vismaz vienu monētu no pāra (C, D), kura ir viltota, kā arī noskaidrojam, cik viltoto monētu ir pārī (C, D). Tagad izveidojam pāri (īsta monēta, viltota monēta) un turpinām kā 1. gadījumā. Pavisam tiks izmantotas $1 + 1002 + 1 = 1004$ svēršanas.

R.10.2. Pie nepāra n to var izdarīt, piemēram, šādi: 2;4;6;... rindās visas rūtiņas nokrāso melnas, bet pārējās rindās visas rūtiņas nokrāso šādi: 1. rindā bsbs..., 3. rindā sbsb..., 5. rindā bsbs..., 7. rindā sbsb... utt. Pie $n = 4$ var būt, piemēram, A12. zīm.

b	m	s	m
s	m	b	b
b	m	s	s
s	m	b	m

A12. zīm.

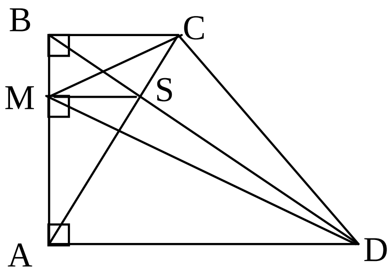
Ja n – pāra skaitlis, kas dalās ar 4, kvadrātu sadala 4×4 rūtiņu kvadrātos un izmanto A12. zīm. redzamo krāsojumu.

Ja n – pāra skaitlis, kas nedalās ar 4, kvadrātu sadala četros vienādos kvadrātos ar nepāra skaitu rūtiņu katrā un izmanto sākumā minēto krāsojumu.

R.10.3. a) piemēram, $n = 30$; dalītāju grupas ir $1 + 2 + 3 + 5 + 10 + 15 = 6 + 30$.

b) ja p –pirmskaitlis, kas lielāks par 5, apskatām skaitli $6p$. Dalītāju grupas ir $1 + 2 + 3 + p + 2p + 3p = 6 + 6p$. Tā kā pirmskaitļi var būt bezgalīgi lieli, tad arī šādi konstruēts labs skaitlis var būt lielāks par 20072007.

R.10.4. Skaidrs, ka $\Delta BSC \sim \Delta DSA$ (atbilstošie leņķi vienādi kā krustleņķi un kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm). Līdzīgos trijstūros augstumu attiecība vienāda ar atbilstošo malu attiecību, tāpēc $BC : DA = BM : AM$. Tāpēc $\Delta CBM \sim \Delta DAM$, un iegūstam $\angle BCM = \angle ADM$. Tad $\angle CMS = \angle BCM = \angle ADM = \angle DMS$, k.b.j.



A13. zīm.

R.10.5. Ievērosim, ka $f(x)=(x+4)^2-4$. Tāpēc

$f(f(x))=((x+4)^2-4+4)^2-4=(x+4)^4-4$ un

$f(f(f(x)))=((x+4)^4-4+4)^2-4=(x+4)^8-4$.

Risinot vienādojumu $(x+4)^8-4=0$, iegūstam

$(x+4)^8=4$

$x+4=\pm\sqrt[4]{2}$

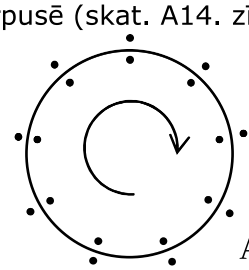
$x=-4\pm\sqrt[4]{2}$.

R.11. Vienpadsmitā klase

R.11.1. Pārveidojam vienādojumu par $x(x+3)=2^y$. Ja x – pāra skaitlis, tad $x+3$ – nepāra skaitlis, kas lielāks par 1, tātad dalās ar kādu nepāra pirmskaitli; tad $x(x+3)$ nevar būt vienāds ar 2^y saskaņā ar aritmētikas pamatteorēmu. Līdzīgi nevar būt, ka $x>1$ un x – nepāra skaitlis. Pārbaudot $x=1$, redzam, ka $y=2$. Tātad $(x;y)=(1;2)$ ir vienīgais atrisinājums.

R.11.2. a) Pieņemsim, ka tāda pāra nav. Lūgsim katram zēnam uzrakstīt y dažādas kartītes – katru ar savu vārdu un kādu tās meitenes vārdu, kas viņam patīk. Līdzīgu darbu lūgsim izdarīt meitenēm. Tā kā savstarpēju simpātiju nav, tad nav divu kartīšu, uz kurām būtu vienādi uzraksti; tāpēc kartīšu nav vairāk par $n\cdot n=n^2$. No otras puses, kartīšu ir $x\cdot n+y\cdot n=(x+y)\cdot n>n\cdot n=n^2$ – pretruna.

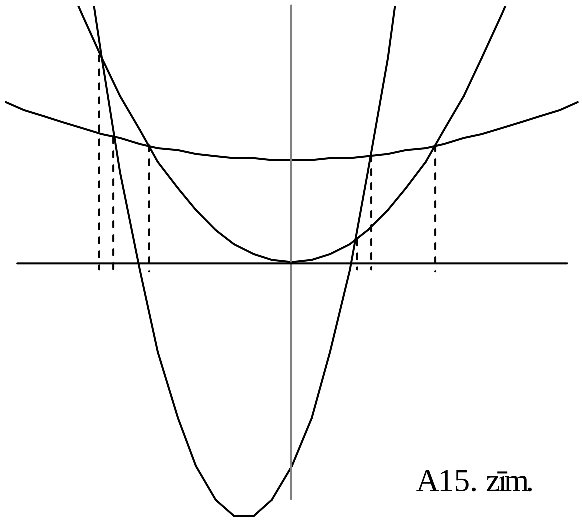
b) Attēlosim meitenes ar punktiem riņķa līnijas iekšpusē, bet zēnus – ar punktiem riņķa līnijas ārpusē (skat. A14. zīm., kur $n=9$).



A14. zīm.

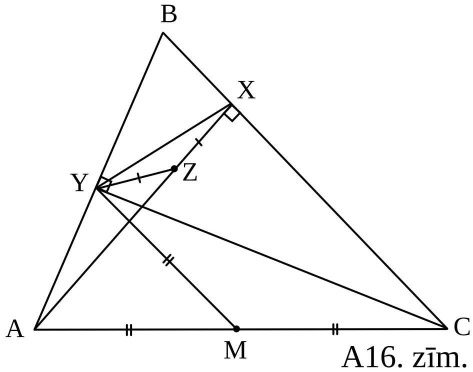
Ja katrai meitenei patīk x zēni pulksteņa rādītāja kustības virzienā, sākot ar to, kurš stāv viņai blakus, bet katram zēnam – y meitenes pulksteņa rādītāja kustības virzienā, sākot ar to, kura stāv viņam vienu pozīciju priekšā, tad savstarpēju simpātiju nav.

R.11.3. Jā, eksistē. Pietiek, ka to grafiki krustojas tā, kā parādīts A15. zīm.



A15. zīm.

R.11.4. Tā kā $\angle AYC=90^o=\angle AXC$, tad ap $AYXC$ var apvilkt riņķa līniju; tāpēc $\angle ACY=\angle AXY$ kā ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku. Apzīmēsim $\angle ACY=\angle AXY=\varphi$.



A16. zīm.

Ievērosim, ka trijstūris XYZ – vienādsānu (pēc dotā) un trijstūris CMY vienādsānu (jo $CM=YM$, kā ap taisnleņķa trijstūri CYM apvilktās riņķa līnijas rādiusi). Tā kā trijstūra leņķa blakusleņķis ir pārējo divu leņķu summa, tad vienādsānu trijstūrī XZY leņķis $\angle AMY=2\varphi$ un vienādsānu trijstūrī CMY leņķis $\angle AZY=2\varphi$, tātad $\angle AMY=\angle AZY$. No šejienes seko vajadzīgais.

R.11.5. Doto vienādību varam ekvivalenti pārveidot par $\frac{1}{y}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}{2}$. Tātad dotajiem skaitļiem apgrieztie skaitļi veido aritmētisku progresiju; acīmredzami šī progresija ir 1; $\frac{5}{6}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{2}{6}$; $\frac{1}{6}$, un paši skaitļi ir 1; $\frac{6}{5}$; $\frac{3}{2}$; 2; 3; 6.

R.12. Divpadsmitā klase

R.12.1. Visas šīs vienādības nevar vienlaicīgi pastāvēt. Ja tā būtu, tad kvadrātvienādojumam $f(x)-q\cdot x=0$ (q – progresijas kvocients) būtu 3 dažādas saknes: a_1, jo $f(a_1)-q\cdot a_1=a_2-a_2=0$ (no dotā un no ģeometriskās progresijas definīcijas), un līdzīgi arī a_2 un a_3, bet tas nevar būt, jo kvadrātvienādojumam ir ne vairāk kā divas dažādas saknes.

Ja $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 4$; $a_4 = 8$ un $f(x) = x^2 - x + 2$, no minētajām vienādībām pastāv tikai pirmās divas.

R.12.2. Atbilde: $n = 2^k$, $k = 0; 1; 2; \ldots$.

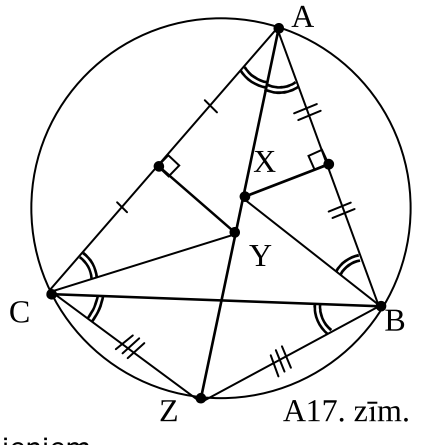
Risinājums. Ja $k = 0$, tad $n = 1$; vienīgā spuldze tiek ieslēgta, un tālāk nekas netiek darīts. Pie $n = 2^k$, $k \in \mathrm{N}$, katram no pāra dalītājiem $d = 2; 4; 8; \ldots; 2^{k-1}$; 2^k atbilstošā maiņu sērija skar katru spuldzi 0 vai d reizes (tātad kopumā neietekmē tās stāvokli), kamēr dalītājam 1 atbilstošā sērija maina katras spuldzes stāvokli 1 reizi. Tāpēc beigās visas spuldzes būs ieslēgtas.

Ja turpretī skaitlim n ir kāds nepāra pirmskaitlis p, ar kuru n dalās, tad $(p + 1)$-ā spuldze (uzskatot S par pirmo spuldzi) tiks „aizskārta" tieši $p + 1$ reizi (sērijās, kas atbilst n dalītājiem 1 un p) un tāpēc beigās paliks izslēgta.

R.12.3. Tieša pārbaude parāda, ka neder $n = 1; 2; 3; 4; 5$, tātad $n \geq 6$. Ja n, dalot ar 3, dod atlikumu 1 resp. 2, tad $n - 1$ resp. $n + 1$ nav pirmskaitlis. Tāpēc n dalās ar 3. Ja n-nepāra skaitlis, tad $n - 1$ un $n + 1$ nav pirmskaitļi, tāpēc n dalās ar 2. Tātad n dalās ar 6. Tad n ir dalītāji 1; $\frac{n}{6}$; $\frac{n}{2}$; $\frac{n}{3}$; n. Bet $\frac{n}{6} + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + n = 2n$. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem 1 jābūt vienam no skaitļiem $\frac{n}{6}$; $\frac{n}{2}$; $\frac{n}{3}$; n. Mums der tikai $1 = \frac{n}{6}$; tad $n = 6$. Pārbaude parāda, ka šī vērtība der.

R.12.4. Trijstūri AXB augstums sadala divos vienādos taisnleņķa trijstūros, tāpēc $AX = BX$. Mums pietiek pierādīt, ka $BX = YZ$. Tas būs pierādīts, ja iegūsim, ka $\Delta CZY = \Delta ZBX$. Bet tā tas ir, jo (1) $CZ = ZB$ kā hordas, kas savelk vienādus lokus ($\cup CZ = \cup ZB$, jo uz tiem balstās vienādi ievilktie leņķi $\angle CAZ$ un $\angle ZAB$);
(2) $\angle CYZ = 2\angle CAY = \angle CAB$ (ārējais leņķis ΔCYA); līdzīgi $\angle ZXB = \angle CAB$. Tātad $\angle CYZ = \angle ZXB$;
(3) $\angle CZY = \angle CZA = \angle CBA$, jo pēdējie divi balstās uz viena un tā paša loka. Tā kā leņķis $\angle CBZ$ balstās uz viena loka ar $\angle CAZ$, tad tas ir tikpat liels, kā $\angle XBA$ (kas vienāds ar $\angle XAB$ kā leņķi pie pamata vienādsānu trijstūrī). Tāpēc $\angle ZBX = \angle ZBC + \angle CBX = \angle CBX + \angle XBA = \angle CBA = \angle CZY$. Esam ieguvuši, ka $\angle CZY = \angle ZBX$.

No (2) un (3) seko, ka $\Delta CZY \sim \Delta ZBX$. Tas kopā ar $CZ = ZB$ dod vajadzīgo trijstūru vienādību.



A17. zīm.

R.12.5. Atbilde: ar 144 gājieniem.

Risinājums. Sākumā ir 72 melnas rūtiņas. Lai melnu rūtiņu pārveidotu par baltu, tās krāsa jāmaina divas reizes. Tā kā sākotnēji melnajām rūtiņām nav kopīgu malu, tad ar vienu gājienu var skart tikai vienu sākotnēji melno rūtiņu. Tāpēc nepieciešami vismaz 72·2=144 gājieni.

Parādīsim, ka ar 144 gājieniem pietiek. Sadalīsim kvadrātu 24 taisnstūros ar izmēriem 2×3 rūtiņas. Sākotnēji katram no tiem ir viens no krāsojumiem, kas redzami A18. zīm.:

b	**m**	**b**
m	**b**	**m**

m	**b**	**m**
b	**m**	**b**

A18. zīm.

Ar 6 gājieniem vienu taisnstūri var pārveidot vajadzīgajā formā:

b	**m**	**b**
m	**b**	**m**

→

b	**m**	**b**
s	**m**	**m**

→

b	**m**	**b**
b	**s**	**m**

→

b	**m**	**b**
b	**b**	**s**

↓

b	**m**	**b**
b	**m**	**b**

←

m	**s**	**b**
b	**m**	**b**

←

m	**b**	**m**
b	**m**	**b**

A19.zīm.

Tātad pavisam pietiek ar 24·6=144 gājieniem.

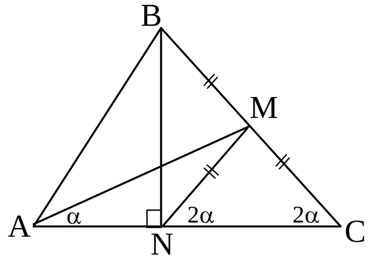
V. 57. Republikas olimpiāde

V.9. Devītā klase

V.9.1. Doto vienādību pārveido par $x^2 - y^2 = 2007(x-y)$ un tālāk par $(x-y)(x+y) = 2007(x-y)$. Tā kā $x \neq y$, tad no šejienes seko $x + y = 2007$.

V.9.2. Var ņemt $p = -1$, $q = -2$. **Patvaļīgam** veselam skaitlim a apskatām vienādojumu $x^2 + (a-1)x + (a-2) = 0$. Tam ir saknes $x_1 = -1$ un $x_2 = 2-a$. Tiešām, $(-1)^2 + (a-1)(-1) + (a-2) = 0$ un $(2-a)^2 + (a-1)(2-a) + (a-2) =$ $= 4 - 4a + a^2 + 2a - a^2 + a - 2 + a - 2 = 0$. Tātad visiem dotajiem kvadrātvienādojumiem gan **a)**, gan **b)** būs veselas saknes.

V.9.3. Apzīmēsim doto $\angle MCA = 2 \cdot \angle MAC = 2\alpha$ (skat. A20. zīm.). Tā kā ΔBNC ir taisnleņķa, tad tajā mediāna pret hipotenūzu vienāda ar pusi no hipotenūzas, t.i., $NM=MC$. Tāpēc $\angle MNC = 2\alpha$. No ΔANM ārējā leņķa seko, ka $\angle AMN = 2\alpha - \alpha = \alpha$, tātad ΔANM – vienādsānu. Tāpēc $AN=NM=MC$, no kurienes seko vajadzīgais.

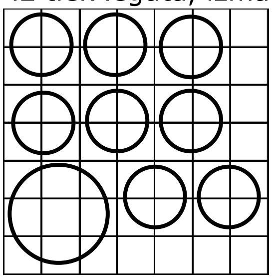


A20. zīm.

V.9.4. <u>Atbilde:</u> 0; 4; 6; 8; 10; ...; 38; 40; 42.

<u>Risinājums.</u> Tā kā katrā rindā ir pāra skaits melno rūtiņu, tad a) tas nepārsniedz 6, un tādēļ kopējais melno rūtiņu skaits nepārsniedz $6 \cdot 7 = 42$, b) kopējais melno rūtiņu skaits ir pāra skaitlis. Viegli saprast, ka 0 melno

rūtiņu var būt, bet 2 melnas rūtiņas – nē, jo divas rūtiņas nevar izkārtot tā, lai reizē gan rindiņās, gan kolonnās būtu pāra skaits melnu rūtiņu. Atliek parādīt, kā iegūt 4; 6; 8; ...; 40; 42 melnas rūtiņas. Mēs to panāksim, izvietojot melnās rūtiņas divu veidu blokos: kvadrātos ar izmēriem $2k \times 2k$ rūtiņas, kur **katra** rūtiņa ir melna, un kvadrātos ar izmēriem $(2k+1)\times(2k+1)$ rūtiņas, kur melnas ir visas rūtiņas, izņemot vienu diagonāli.
1) Vērtības 4; 8; 12; ...; 32; 36 tiek iegūtas, izmantojot 1; 2; 3; ...; 9 kvadrātus ar izmēriem 2×2.
2) Vērtība 6 tiek iegūta, izmantojot kvadrātu 3×3 (ievietojam to lielā kvadrāta stūrī); vērtības 10; 14; 18; ...; 38 tiek iegūtas, pievienojot tam 1; 2; 3; ...; 8 kvadrātus ar izmēriem 2×2 (skat. A21. zīm.).
3) Vērtība 40 tiek iegūta ar vienu 5×5 rūtiņu kvadrātu un pieciem 2×2 rūtiņu kvadrātiem.
4) Vērtība 42 tiek iegūta, izmantojot visu 7×7 rūtiņu kvadrātu.



A21. zīm.

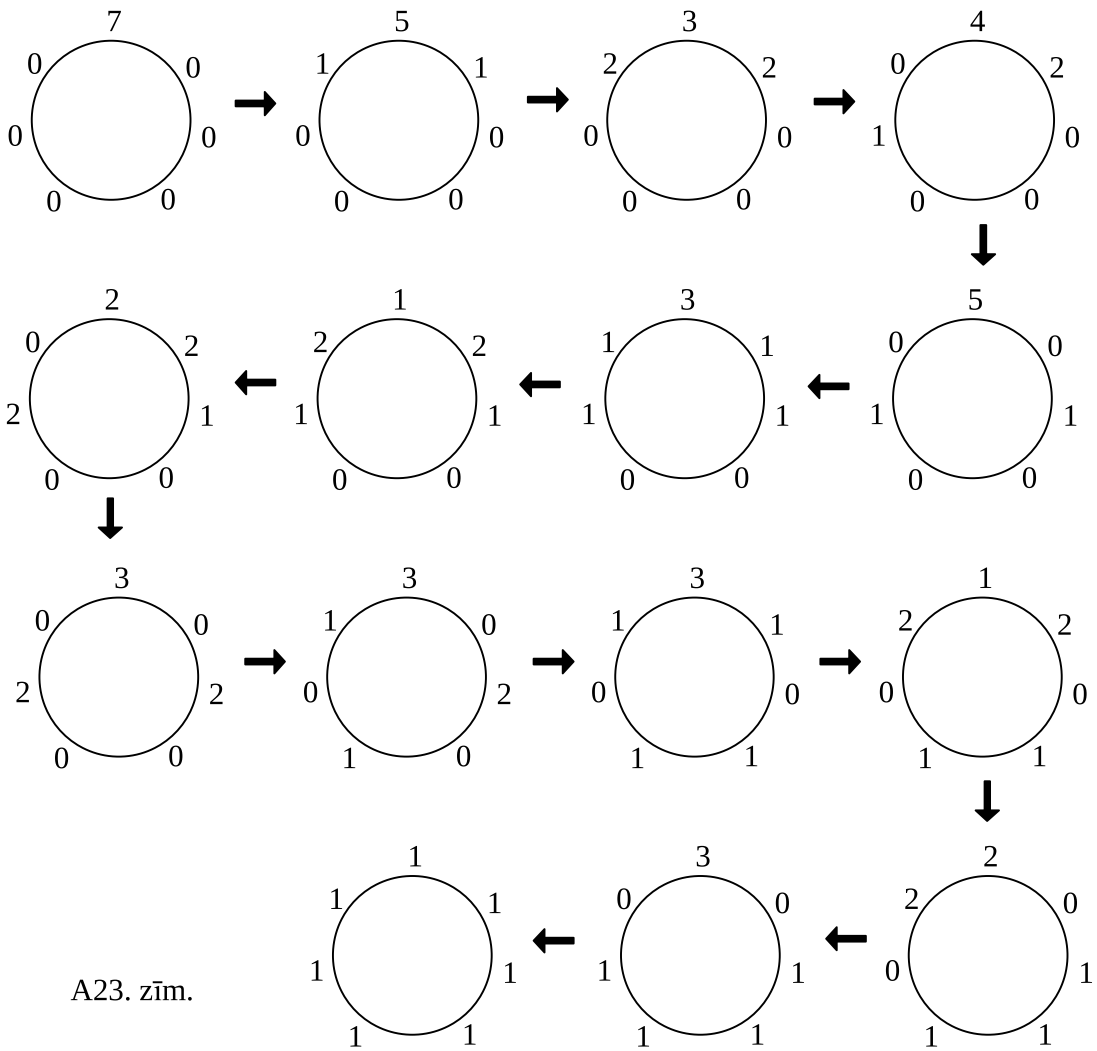
8	3	9
1	5	6
7	2	4

A22. zīm.

V.9.5. a) jā, skat., piem., A22. zīm.
b) nē. Apskatīsim pirmskaitļus 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79. Tā kā tie visi lielāki par $\frac{1}{2}\cdot 81$, tad neviens cits ierakstāmais skaitlis ne ar vienu no tiem nedalās. Tāpēc šiem skaitļiem jābūt uz diagonāles (ja kāds pirmskaitlis sastopams rindiņas elementu reizinājumā, tad aritmētikas pamatteorēmas dēļ tam jābūt sastopamam arī atbilstošās kolonnas elementu reizinājumā). Bet šo pirmskaitļu pavisam ir 10, un tie jāizvieto 9 vietās – pretruna.

V.10. Desmitā klase

V.10.1. a) jā; piemēram, $x = 4$ un $y = 2$.
b) nē; izteiksmi var pārveidot par $x(x-1)-y(y-1)$. No diviem blakus esošiem veseliem skaitļiem viens ir pāra skaitlis. Pāra skaitļa un nepāra skaitļa reizinājums arī ir pāra skaitlis. Divu pāra skaitļu starpība arī ir pāra skaitlis. Tātad dotās izteiksmes vērtība ir pāra skaitlis un nevar būt 2007.
V.10.2. a) jā. Skat., piem., A23. zīm.
b) nē. Sanumurēsim trauciņus pēc kārtas ar numuriem 1; 2; 3; ...; 10. Monētu kopējais skaits 1., 3., 5., 7., 9. trauciņā sākumā ir pāra skaitlis un ar katru gājienu mainās par 2. Tāpēc tas vienmēr paliek pāra skaitlis. Bet, sasniedzot uzdevuma mērķi, šajos trauciņos kopā būtu 5 monētas – pretruna.



A23. zīm.

V.10.3. Ja a un b ir viens otram sekojoši pirmskaitļi un $a \le n < b$, tad $x(n) = a$ un $y(n)=b$. Tāpēc katram šādam n atbilstošais saskaitāmais summā ir $\frac{1}{a \cdot b}$. Ja visiem šādiem n atbilstošie saskaitāmie summā ir, tad to daudzums ir tieši $b - a$.

Atliek ievērot, ka 601 ir pirmskaitlis. Apzīmējot pirmskaitļus no 2 līdz 601 augošā kārtībā ar p_1, p_2, ..., p_n, iegūstam, ka apskatāmā summa ir

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2} + \frac{p_3 - p_2}{p_2 p_3} + \ldots + \frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1} p_n} =$$

$$= \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{601}$$, k.b.j.

V.10.4. Tā kā OX, OY, OZ pa pāriem veido $120°$ lielus leņķus, tad to vidusperpendikuli pa pāriem veido $60°$ lielus leņķus, tāpēc to veidotais trijstūris Δ ir regulārs. Punkts O atrodas Δ iekšpusē, un tā attālumu summa Σ līdz trijstūra Δ malām ir $\frac{1}{2}(OX + OY + OZ)$. Mēs pierādīsim divus faktus:

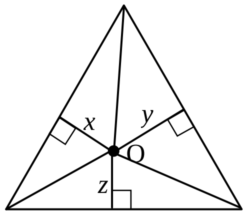
A. Σ vienāda ar Δ augstumu,

B. $OX+OY+OZ=AC$.

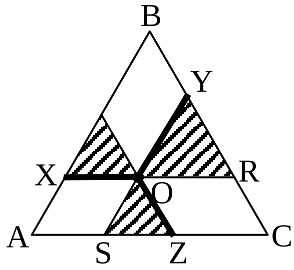
No tā sekos, ka visiem Δ ir vienādi augstumi, tātad tie ir vienādi savā starpā; tātad visiem Δ ir vienādi laukumi.

Atliek pierādīt minētos faktus.

A. Apzīmējot Δ laukumu ar L, malas garumu ar a, bet augstumu ar h, iegūstam, ka $L=\frac{1}{2}ah$ un $L=\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}az$ (skat. A24. zīm.); no tā seko vajadzīgais.



A24. zīm.



A25. zīm.

B. Iesvītrotie trijstūri ir regulāri (skat. A25. zīm.), jo to leņķi sakrīt ar sākotnējā trijstūra leņķiem, kā kāpšļleņķi pie paralēlām taisnēm. Trijstūri, kam visi iekšējie leņķi ir 60°, ir regulāri. Tāpēc $OX + OY + OZ = OX + OR + SZ$, jo vienādmalu trijstūru malas ir vienādas. $XO = AS$, jo AX, SO un XO, AS pa pāriem paralēlas, tāpēc $AXOS$ – paralelograms. Līdzīgi $OR = ZC$. Tāpēc $OX + OR + SZ = AS + ZC + SZ$. Tātad $OX + OY + OZ = AS + ZC + SZ = AC$, k.b.j.

V.10.5. No n dažādiem skaitļiem var izveidot $\frac{n(n-1)}{2}$ summas $x + y$, kur $x \neq y$; n summas $x + x = 2x$; bez tam n veidos var ņemt vienu pašu skaitli x. Tāpēc jābūt $\frac{n(n-1)}{2}+2n\geq 27$ **(*)**, no kurienes seko $n \geq 6$, un **a)** pierādīts.

Apzīmēsim uzrakstīto skaitļu kopu ar K. Pie $n = 6$ nevienādībā (*) pastāv vienādība. Tātad katram skaitlim no 1 līdz 27 jābūt izsakāmam vienā vienīgā veidā. No tā pakāpeniski seko, ka $1\in$K, jo to citādi nevar izteikt; $2\notin$K, jo to var izteikt, kā $2\cdot 1$; $3\in$K, jo to nevar izteikt ar 1 un dotajām operācijām; $4\notin$K, jo to var izteikt kā 1+3; $5\in$K, jo to nevar izsacīt ar 1, 3 un dotajām operācijām. Tagad redzam, ka 6 var izsacīt gan kā 1+5, gan kā $2\cdot 3$ – pretruna. Tātad $n > 6$ jeb $n \geq 7$ un ir pierādīts **b)**.

V.11. Vienpadsmitā klase

V.11.1. a) jā; piemēram, var ņemt $n = 9$.

b) nē. Skaitlis, dalot ar 9, dod tādu pašu atlikumu kā tā ciparu summa. Ja uzdevumā minētais skaitlis n eksistētu, tad n un $n + 199$ dotu vienādus atlikumus, dalot ar 9. Tad to starpība $(n+199)-n = 199$ dalītos ar 9 – pretruna.

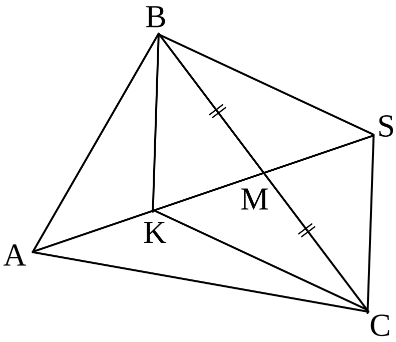
V.11.2. Jā, eksistē. Piemēram, var ņemt trinomus x^2, $(x-1)^2$ un $(x+1)^2$. Viegli redzēt, ka šiem kvadrāttrinomiem ir attiecīgi saknes 0, 1 un -1. Saskaitot $x^2+(x-1)^2 = 2x^2-2x+1$ un $x^2+(x+1)^2 = 2x^2+2x+1$, redzam, ka abām summām diskriminants ir -4, tātad sakņu nav. Vēl atliek $(x-1)^2+(x+1)^2 = 2x^2+2$, un arī šai summai nav sakņu, tātad izpildās visi uzdevuma nosacījumi.

V.11.3. Sanumurēsim katrā lapas pusē esošos daudzstūrus ar skaitļiem 1; 2; 3. Tās daļas laukumu, pa kuru „pārklājas" daudzstūris ar numuru i lapas pirmajā pusē un daudzstūris ar numuru j lapas otrajā pusē, apzīmēsim ar L_{ij}; lapas kopējo laukumu apzīmēsim ar L. Skaidrs, ka

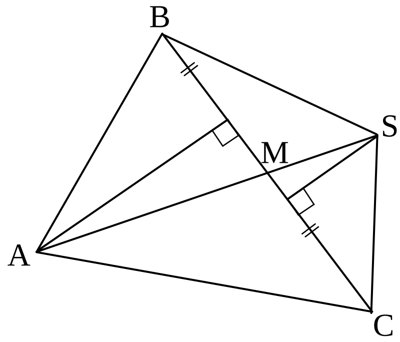
$$(L_{11}+L_{22}+L_{33})+(L_{12}+L_{23}+L_{31})+(L_{13}+L_{21}+L_{32})=L\,.$$

Tāpēc vismaz viena no iekavām nav mazāka par $\frac{L}{3}$. Pieņemsim, ka tā ir iekava $L_{i_1 j_1} + L_{i_2 j_2} + L_{i_3 j_3}$. Nokrāsojot vienādās krāsās daudzstūrus ar numuriem i_1 un j_1; i_2 un j_2; i_3 un j_3 (attiecīgi lapas pirmajā un otrajā pusē), iegūstam vajadzīgo.

V.11.4. Izvēlamies tādu punktu S, ka $BSCK$ ir paralelograms (skat. A26. zīm.); A, K, M, S atrodas uz vienas taisnes, jo taisne KM dala paralelograma diagonāli BC uz pusēm un tātad arī ir šī paralelograma diagonāle.



A26. zīm.



A27. zīm.

Tad $\angle BAC + \angle BSC = \angle BAC + \angle BKC = 180°$. Tāpēc arī $\angle ABS + \angle ACS = 180°$; no tā seko, ka $\sin\angle ABS = \sin\angle ACS$.

Ievērojam, ka L(ABM)=L(ACM) un L(SBM)=L(SCM) (trijstūri ar vienādiem pamatiem un kopīgiem augstumiem). Tāpēc L(ABS)=L(ACS).

Iegūstam $\frac{1}{2} AB \cdot BS \cdot \sin\angle ABS = \frac{1}{2} AC \cdot CS \cdot \sin\angle ACS$, no kurienes seko $AB{\cdot}BS = AC{\cdot}CS$. Bet $BS = KC$ un $CS = KB$, no kurienes seko vajadzīgais.

V.11.5. Vispirms pierādīsim īpašību: katram naturālam n $a_n = 0 \Leftrightarrow a_{n+3} = 0$.

Tiešām, ja $a_n=0$, tad no dotās vienādības seko, ka saucēji un tātad arī skaitītāji ir pretēji skaitļi; no tā seko $a_{n+3}=0$. Ja $a_{n+3}=0$, no dotās vienādības seko, ka skaitītāji un tātad arī saucēji ir pretēji skaitļi; no tā seko $a_n=0$.

Tātad katrs trešais virknes loceklis (visi virknes locekļi, kuru kārtas numuri dod vienādu atlikumu dalot ar 3) būtu 0, ja kaut viens no tiem būtu 0. Ja ir tāds virknes loceklis, kas nav 0, tad visi virknes locekļi, kuru kārtas skaitļi dod tādu pašu atlikumu dalot ar 3, kā šī virknes locekļa kārtas skaitlis, arī nav 0.

Izmantojot šo īpašību un dotos virknes locekļus, iegūstam:

ja $n \geq 1$, tad $a_{3n} \neq 0$ (jo $a_{33} \neq 0$, $33=3\cdot 11$)

ja $n \geq 0$, tad $a_{3n+1} \neq 0$ (jo $a_{22} \neq 0$, $22=3\cdot 7+1$)

ja $n \geq 0$, tad $a_{3n+2} \neq 0$ (jo $a_{11} \neq 0$, $11=3\cdot 3+2$).

Līdz ar to a) daļa pierādīta.

No dotās vienādības seko, ka

$(a_{n+3} - a_{n+2})(a_n + a_{n+1}) = (a_n - a_{n+1})(a_{n+3} + a_{n+2})$;

pēc vienkāršošanas iegūstam

$$a_{n+1}a_{n+3} = a_n a_{n+2} \quad \textbf{(1)}$$

Ņemot vienādībā (1) n vietā $n+1$, iegūstam

$$a_{n+2}a_{n+4} = a_{n+1}a_{n+3} \qquad \textbf{(2)}$$

Sareizinot (1) un (2), iegūstam

$$a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}a_{n+4} = a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \quad \textbf{(3)}$$

Tā kā $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} \neq 0$, no šejienes seko $a_{n+4}=a_n$.

Tātad virkne ir periodiska ar periodu 1, 2 vai 4.

Tāpēc $a_1=a_{33}=1$; $a_2=a_{22}=2$; $a_3=a_{11}=4$; no (1) seko $a_4=\frac{a_1\cdot a_3}{a_2}=2$.

No šejienes

$a_1^{\ k}+a_2^{\ k}+...+a_{100}^{\ k}=25(1^k+2^k+4^k+2^k)=25(1+2^k)^2=\left(5(1+2^k)\right)^2$, no kā seko vajadzīgais.

V.12. Divpadsmitā klase

V.12.1. Ja x – kopējā sakne, tad $x^2+a^2x+b^3=x^2+b^2x+a^3$, no kurienes $(a^2-b^2)\cdot x=a^3-b^3$. Ja $a\neq b$, tad $x=\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}=$

$=\frac{\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}}{a+b}>0$, jo kvadrātu summas un nenegatīvu skaitļu summas dalījums arī būs nenegatīvs, un tas nevar būt 0, jo tad $a=b=0$. Bet skaidrs, ka dotajiem vienādojumiem nav pozitīvu sakņu.

Ja turpretī $a=b$, tad abi vienādojumi ir identiski viens otram. Vienādojumam $x^2+a^2x+a^3=0$ ir reāla sakne tad un tikai tad, ja $a^4-4a^3\geq 0 \Leftrightarrow a^3(a-4)\geq 0$. Tā kā $a\geq 0$, tad tas ir gadījumos, ja $\boldsymbol{a=b=0}$ vai $\boldsymbol{a=b\geq 4}$.

V.12.2. a) jā; piemēram, divās pretējās kuba virsotnēs ieraksta „-1”, bet citās ieraksta „+1”.

b) nē. Pieņemsim, ka to izdevies izdarīt. Tad **visu** ierakstīto skaitļu reizinājums vienāds ar reizinājumu skaitļiem prizmas pamatu virsotnēs; katram pamatam ir nepāra skaits šķautņu, tāpēc reizinājums ir $(-1)\cdot(-1)=1$. No otras puses, tas ir reizinājums skaitļiem piecu sānu skaldņu virsotnēs (ņemot ik otro skaldni); tāpēc tas ir $(-1)^5=-1$ – pretruna.

V.12.3. Ja $(x;y)$ ir sistēmas atrisinājums, tad atrisinājumi ir arī $(-x;y)$, $(x;-y)$, $(-x;-y)$; tāpēc meklēsim atrisinājumu pie $x\geq 0$, $y\geq 0$. Ja $(x;y)$ ir sistēmas atrisinājums, tad atrisinājums ir arī $(y;x)$; tāpēc meklēsim atrisinājumu pie $x\leq y$.

Saskaitot abus vienādojumus, iegūstam $x^2+y^2=2$ **(1)**

Atņemot abus vienādojumus vienu no otra, pēc pārveidojumiem iegūstam

$$2\sin^2 x-2\sin^2 y=y^2-x^2 \quad \textbf{(2)}$$

No (1) seko, ka $0\leq x\leq y\leq\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$. Tā kā šajā apgabalā funkcijas $f(t)=\sin^2 t$ un $g(t)=t^2$ abas ir augošas, tad $\sin^2 x\leq\sin^2 y$ un $y^2\geq x^2$; tāpēc no (2) seko, ka $x=y$, citādi katrā vienādības pusē būtu atšķirīga zīme pie tās absolūtās vērtības. No (1) iegūstam $x=y=1$. Pārbaude parāda, ka tas tiešām ir sistēmas atrisinājums.

Tātad sistēmai ir 4 atrisinājumi $(x;y)$: $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$.

V.12.4. Skat. A28. zīm. No ievilktu leņķu un krustleņķu īpašībām

$$\angle\boldsymbol{CAD}=\angle CBD=\angle EBF=\angle\boldsymbol{EAF} \quad \textbf{(1)}$$

No ievilktu četrstūru un ievilktu leņķu īpašībām

$$\angle\boldsymbol{ACD}=180°-\angle ABD=\angle ABF=\angle\boldsymbol{AEF} \quad \textbf{(2)}$$

No (1) un (2) seko, ka $\Delta ACD\sim\Delta AEF$.

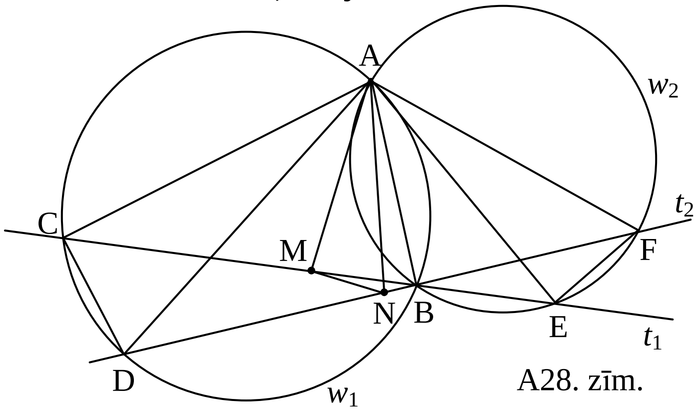
No $\angle ACB=\angle ADB$ un $\angle AEB=\angle AFB$ seko, ka $\Delta ACE\sim\Delta ADF$. Tāpēc $AC:AM=AD:AN$ (malas un mediānas attiecības līdzīgos trijstūros, tātad

$$AC:AD=AM:AN \quad \textbf{(3)}$$

Bez tam $\angle CAM=\angle DAN$ (leņķi starp atbilstošajām malām un mediānām līdzīgos trijstūros). Atņemot no šīs vienādības abām pusēm $\angle DAM$, iegūstam

$$\angle CAD=\angle MAN \quad \textbf{(4)}$$

No (3) un (4) seko $\Delta CAD \sim \Delta MAN$, k.b.j.



A28. zīm.

V.12.5. Atbilde: **a)** jā, **b)** nē.

Risinājums. Apskatām vispirms gadījumu ar galīgu daudzumu daļu. Pieņemsim, ka šīs daļas ir A_1, A_2, ..., A_n un daļa A_i nesatur nevienu skaitļa x_i daudzkārtni, $i = 1; 2; ...; n$. Skaitlis $x = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n$ pieder vienai no šīm daļām; pieņemsim, ka $x \in A_i$. Tad no vienādības $x = x_i \cdot (x_1 x_2 ... x_{i-1} x_{i+1} ... x_n)$ seko pretruna ar pieņēmumu.

Tagad parādīsim, ka bezgalīga daļu daudzuma gadījumā uzdevumā minētā situācija ir iespējama. Kopā A_1 ieskaitīsim vieninieku un visus pirmskaitļus un to pakāpes ar naturāliem kāpinātājiem. Katram i, $i \geq 2$, kopā A_i ieskaitīsim tos skaitļus, kas dalās ar tieši i dažādiem pirmskaitļiem.

Katram naturālam i daļa A_i nesatur nevienu daudzkārtni skaitlim $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_i \cdot p_{i+1}$, kur p_1, p_2, ..., p_i, p_{i+1} - dažādi pirmskaitļi, jo šī skaitļa daudzkārtnis dalītos ar vismaz $i+1$ dažādiem pirmskaitļiem, bet tas ir pretrunā ar to, kā veidota grupa A_i.

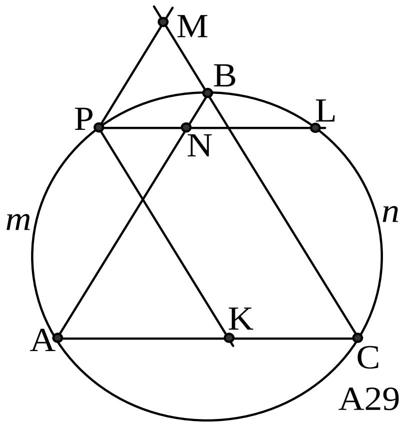
A. Latvijas 34. atklātā matemātikas olimpiāde

A.9. Devītā klase

A.9.1. Atbilde: nē.

Risinājums. Pieņemsim, ka tā noticis, un vienīgais skaitlis, kas nedalās ar 3, izveidots no kādas kolonnas cipariem (otrs gadījums analoģisks). Tad katrā rindiņā ciparu summa dalās ar 3. Tāpēc arī visu ierakstīto ciparu summa dalās ar 3. Savukārt deviņās kolonnās ciparu summas dalās ar 3, bet vienā - nē; tāpēc arī visu ciparu summa nedalās ar 3. Iegūta pretruna.

A.9.2. No konstrukcijas seko, ka $PMBN$ ir trapece, pie tam vienādsānu ($\angle NPM = \angle PMB = 60^0$). Tāpēc $\underline{\angle BMN = \angle BPN}$.



A29. zīm.

Līdzīgi $PMCK$ ir vienādsānu trapece ($\angle PMC = \angle MCK = 60^0$), tāpēc <u>$\angle BMK$=$\angle BCP$</u>, un mums pietiek pierādīt, ka $\angle BPN$=$\angle BCP$. Tā kā tie abi ir ievilkti leņķi, tad pietiek pierādīt, ka loki, uz kuriem tie balstās, ir vienādi. Pagarinām PN un iegūstam L - krustpunktu ar riņķa līniju. Līdz ar to loki, uz kuriem balstās leņķi $\angle BPN$ un $\angle BCP$, ir attiecīgi loki $\cup PB$ un $\cup BL$ un mums pietiek pierādīt, ka $\boldsymbol{\cup PB = \cup BL}$.

$\cup APB$=$\cup CLB$, jo uz tiem balstās vienādi ievilkti leņķi, attiecīgi $\angle BCA = \angle CAB = 60^0$. Atliekam m un n tā, kā redzams A29. zīm. $\cup AmP$ = $\cup CnL$, jo loki starp paralēlām hordām ir vienādi.

Atņemot no vienādiem lokiem $\cup APB$=$\cup CLB$ vienādus lokus $\cup AmP$=$\cup CnL$, iegūtie loki $\cup PB$ un $\cup BL$ ir vienādi.

<u>Piezīme.</u> No pierādītā seko, ka M, N, K atrodas uz vienas taisnes.

A.9.3. a) Tā kā katrs no naturāliem skaitļiem a un b ir izsakāms kā divu veselu skaitļu kvadrātu summa, varam apzīmēt $a = q^2+y^2$, $b = z^2+t^2$, līdz ar to varam izteikt to reizinājumu un veikt pārveidojumus:

$(q^2+y^2)(z^2+t^2) = q^2z^2 + q^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2 =(q^2z^2 + 2qyzt + y^2t^2) + (q^2t^2-2qyzt + y^2z^2)=$
$= (qz + yt)^2 + (qt-yz)^2$. Tā kā q, y, z un t ir veseli skaitļi, tad arī $qz + yt$ un $qt - yz$ ir veseli skaitļi. Līdz ar to esam pierādījuši, ka reizinājums $a \cdot b$ ir izsakāms kā divu veselu skaitļu kvadrātu summa.

b) $(x^2+1)(x^2+4)(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=$

$=(x^2+1^2)(x^2+2^2)((x+1)^2+1^2)((x-1)^2+1^2)$.

Izmantojam a) punktā iegūto identitāti $(q^2+y^2)(z^2+t^2) = (qz + yt)^2+(qt-yz)^2$:

- apskatām reizinājumu $(x^2+1^2)(x^2+2^2)$,

šajā gadījumā $q = x$, $y = 1$, $z = x$, $t = 2$:

$(x^2+1^2)(x^2+2^2)=(x\cdot x+1\cdot 2)^2+(x\cdot 2-1\cdot x)^2=(x^2+2)^2+x^2$;

- apskatām reizinājumu $((x+1)^2+1^2)((x-1)^2+1^2)$,

šajā gadījumā $q = x+1$, $y = 1$, $z = x-1$, $t = 1$:

$((x+1)^2+1^2)((x-1)^2+1^2)=((x+1)\cdot(x-1)+1\cdot 1)^2+((x+1)\cdot 1-1\cdot(x-1))^2=(x^2)^2+2^2.$

Esam ieguvuši:

$(x^2+1)(x^2+4)(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=((x^2+2)^2+x^2)((x^2)^2+2^2)$. Tas ir reizinājums, kur reizinātāji ir divu kvadrātu summas. Līdz ar to atkal varam izmantot a) punktā iegūto identitāti. Šajā gadījumā $q=x^2+2$, $y=x$, $z = x^2$, t = 2:

$$((x^2+2)^2+x^2)((x^2)^2+2^2)=((x^2+2)\cdot x^2+x\cdot 2)^2+((x^2+2)\cdot 2-x\cdot x^2)^2=$$

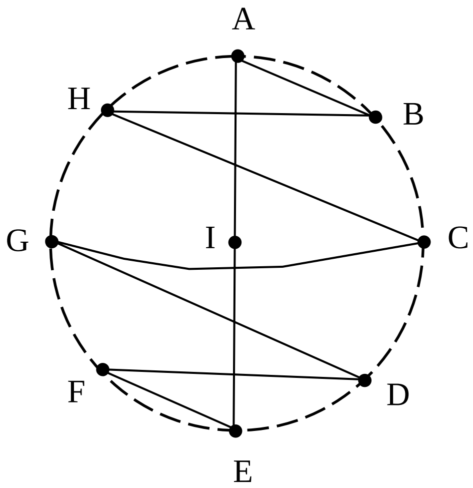
$$=(x^4+2x^2+2x)^2+(2x^2+4-x^3)^2.$$

Esam ieguvuši divus polinomus ar veseliem koeficientiem $f(x)$ un $g(x)$, ka visiem x pastāv uzdevumā prasītā vienādība.

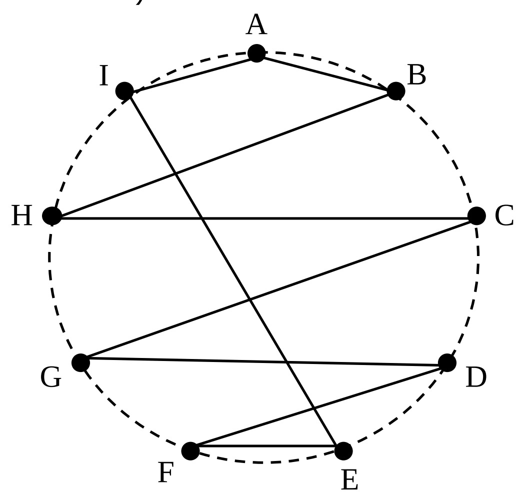
A.9.4. Atbilde: **a)** nē, **b)** jā.

Risinājums. **a)** katrai no slēgtajām lauztajām līnijām katrā virsotnē ir pāra skaits (divi) posmu, tātad katrā virsotnē pavisam kopā arī būs pāra skaits posmu – no katras lauztas līnijas 2 posmi. Bet no katras astoņstūra virsotnes kopā iziet septiņi nogriežņi - 2 malas un 5 diagonāles. Tā kā 7 nav pāra skaitlis, iegūta pretruna.

b) No katras virsotnes var novilkt astoņus posmus. Tā kā ir 9 virsotnes, no virsotnēm kopā iziet $9 \cdot 8 = 72$ posmi. Tā kā katrs posms ir novilkts starp divām virsotnēm, pavisam kopā ir novilkti $72{:}2=36$ posmi, t.i. $36{:}9=4$ lauztas līnijas. Lai izveidotu simetrisku zīmējumu un varētu viegli saskatīt, ka divu lauztu līniju posmi nepārklājas, 9-stūra virsotnes attēlojam kā astoņstūra virsotnes un centru. Atbilstošās virsotnes apzīmējam ar vienādiem burtiem. Izveidojam pirmo lauzto līniju $ABHCGDFE$ (skat. A30. zīm.) un savienojam atbilstošās virsotnes deviņstūrī (skat. A31. zīm.).

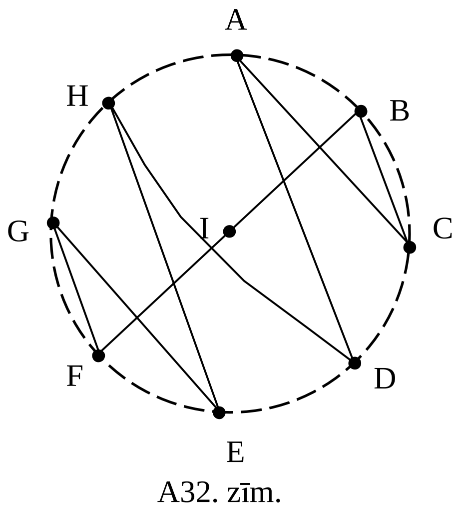


A30. zīm.

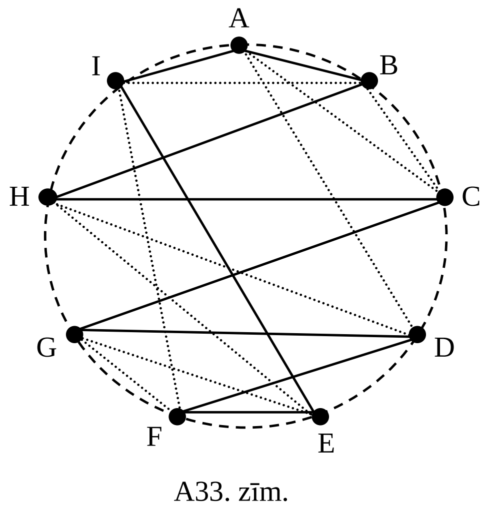


A31. zīm.

Lai izveidotu otru lauzto līniju, pagriežam pirmo lauzto līniju A30. zīmējumā pulksteņrādītāja kustības virzienā tā, lai punkts A attēlotos par punktu B (skat. A32. zīm), un arī šo lauzto līniju atbilstoši attēlojam deviņstūrī. Tā kā nekādi no A30. un A32. zīm lauzto līniju posmiem nepārklājas, tad arī deviņstūrī nekādi divi no pirmās un otrās lauztās līnijas posmiem nesakrīt viens ar otru (skat. A33. zīm.).



A32. zīm.



A33. zīm.

Līdzīgi attēlojot atlikušās divas lauztās līnijas, viegli pārliecināties, ka no katra punkta uz katru citu iziet tieši viens lauztas līnijas posms un no katras virsotnes iziet tieši astoņi posmi.

A.9.5. Atbilde: 8 monētas.

Risinājums sastāv no 2 daļām. Pirmkārt: parādīt, kādi gājieni jāveic, lai uz augšu tiktu novietoti 8 ģerboņi: apgriežot divus monētu četriniekus bez kopējiem elementiem, uz augšu ir 8 ģerboņi. Otrkārt: pierādīt, ka vairāk kā 8 ģerboņus uz augšu novietot nevar. Izvēlamies 5 monētas, no kurām nekādas divas neatrodas blakus. Katrs gājiens aizskar tieši divas no tām. Tāpēc šādā monētu pieciniekā katrā gājienā "lašu" skaits nemainās vai mainās par 2:

- ja gājiens maina monētas, kas ir ar lasi uz augšu, tad „lašu" monētu kļūst par divām mazāk;
- ja gājiens maina monētas, kas ir ar ģerboni uz augšu, tad „lašu" monētu kļūst par divām vairāk;
- ja gājiens maina vienu monētu ar lasi uz augšu, otru – ar lasi uz leju, tad „lašu" skaits nemainās.

Sākumā visas piecas monētas ir ar lasi uz augšu. Tā kā 5 ir nepāra skaitlis, tad pēc katra gājiena „lašu" skaits paliek nepāra skaitlis. Tātad katrā no abiem šādiem monētu pieciniekiem vienmēr uz augšu ir vismaz viens "lasis". No tā seko, ka uz augšu noteikti būs vismaz divi „laši".

A.10. Desmitā klase

A.10.1. Pieņemsim, ka n dalās gan ar 999 999, gan ar 1 000 001. Tā kā LKD(999 999, 1 000 001)=1, tad n dalās arī ar $999\,999 \cdot 1\,000\,001=(10^6-1)\cdot(10^6+1)=10^{12}-1$.

Bet tā nevar būt, jo desmitciparu skaitlis ir mazāks par $10^{12}-1$.

A.10.2. Atbilde: **a)** jā, **b)** nē.

Risinājums**. a)** ievērosim, ka $(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=$

$$=1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{x}{t}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{y}{t}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}+\frac{t}{y}+\frac{t}{z}+1=$$

$$=4+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{t}+\frac{t}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{y}{t}+\frac{t}{y}\right)+\left(\frac{z}{t}+\frac{t}{z}\right).$$

Tā kā pozitīviem α ir spēkā $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2\sqrt{\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}}=2$, tad apskatāmā reizinājuma vērtība ir vismaz $4+6\cdot 2=16$. Tā kā $0<x+y+z+t\leq 4$, tad $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}$ vērtība ir vismaz 16:4=4, kas arī bija jāpierāda.

b) apskatām piemēru $x=y=z=0{,}1$; $t=1000$. Tad $x+y+z+t=1000{,}3\geq 4$, taču $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=10+10+10+0{,}001=30{,}001$. Summa ir lielāka nekā 4.

Esam parādījuši, ka vienmēr uzdevumā prasītais apgalvojums neizpildās.

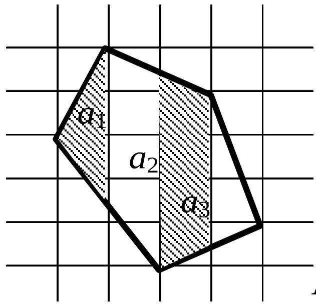
A.10.3. Pieņemsim, ka siera gabalu masas ir $m_1\leq m_2\leq m_3\leq m_4\leq m_5\leq m_6\leq m_7$.

Tā kā $m_1\geq m_2$, $m_3\geq m_4$ un $m_5\geq m_6$, tad $m_1+m_3+m_5\geq m_2+m_4+m_6$. Pievienojot kreisajai pusei siera gabalu m_7, iegūstam nevienādību: $\underline{m_1+m_3+m_5+m_7}$ > $\underline{m_2+m_4+m_6}$.

Tā kā $m_1 \le m_2$, $m_3 \le m_4$ un $m_5 \le m_6$, tad $m_1 + m_3 + m_5 \le m_2 + m_4 + m_6$. Pievienojot labajai pusei siera gabalu m_7, iegūstam nevienādību:
$\underline{m_1 + m_3 + m_5} < \underline{m_2 + m_4 + m_6} + m_7$.

Tātad, ja no sākuma vienā kaudzē novietojam m_1; m_3; m_5, bet otrā - m_2; m_4; m_6, tad pievienojam pirmajai kaudzei m_7 un sākam m_7 pakāpeniski "pārsūknēt" uz otro kaudzi, tad sākumā smagākā ir pirmā kaudze, bet beigās - otrā. Tāpēc būs tāds brīdis, kad abās kaudzēs būs vienādas masas. Šai brīdī redzams, kādos gabalos jāsagriež m_7. Tātad vienmēr būs iespējams sagriezt lielāko siera gabalu divās daļās tā, ka iegūtos 8 siera gabalus varēs sakārtot divās daļās ar vienādām masām.

A.10.4. Pieņemsim, ka rūtiņas malas garums ir 1. Apskatīsim vertikālās rūtiņu līnijas; tās sadala daudzstūri 2 trijstūros un kaut kādā daudzumā trapeču/ paralelogramu ar augstumu 1. Apzīmējam vertikālo līniju garumus ar a_1, a_2, ..., a_n (skat. A34. zīm.)

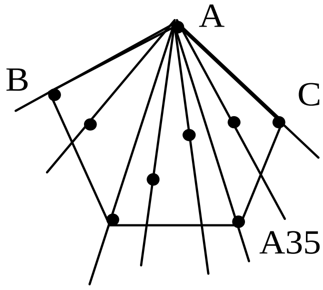


A34. zīm.

Tā kā trijstūra laukums ir $\frac{1}{2}a \cdot h$ un trapeces/paralelograma laukums ir $\frac{1}{2}(a+b) \cdot h$, tad daudzstūra kopējais laukums ir

$\frac{1}{2}a_1 \cdot 1 + \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \cdot 1 + \frac{1}{2}(a_2 + a_3) \cdot 1 + ... + \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_n) \cdot 1 + \frac{1}{2}a_n \cdot 1 = a_1 + ... + a_n$. Tātad vertikālo līniju garumu summa ir vienāda ar daudzstūra laukumu. Tāpat apskatām horizontālo līniju garumu summu un secinām, ka arī tā ir vienāda ar daudzstūra laukumu. Tā kā gan vertikālo, gan horizontālo līniju summa ir vienāda ar daudzstūra laukumu, tad tās ir vienādas savā starpā, kas arī bija jāpierāda.

A.10.5. a) apskatām dotās punktu sistēmas izliekto apvalku. Ņemam vienu tā virsotni. Tās n-1 taisnes, kas iet caur šo virsotni un citiem n-1 punktiem, savā starpā nav paralēlas, jo nekādi trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes (skat. A35. zīm.);



A35. zīm.

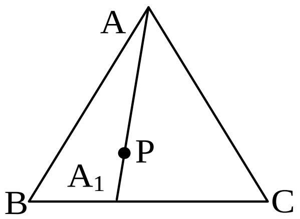
b) ja iepriekšējā risinājumā "malējās" taisnes ir AB un AC, tad taisne BC nav paralēla nevienai no pārējām (n-1) taisnēm, jo krusto tās visas; tāpēc to var ņemt par n-to taisni;

c) ja dotie n punkti ir regulāra n-stūra virsotnēs, tad taisnēm, kas vilktas caur diviem no tiem, ir pavisam n dažādi virzieni. Tāpēc no tām nevar izvēlēties vairāk nekā n pa pāriem neparalēlas taisnes.

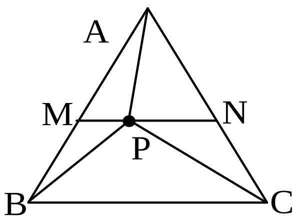
A.11. Vienpadsmitā klase

A.11.1. Lemma. $PA<AB$.

Tiešām, pagarinām AP līdz krustpunktam A_1 ar malu BC. Vai nu $\angle AA_1B \geq 90^o$, vai arī $\angle AA_1C \geq 90^o$; varam pieņemt, ka $\angle AA_1B \geq 90^o$. Tad trijstūrī AA_1B $\angle AA_1B$ ir lielākais leņķis, tātad pret to atrodas lielākā mala; tāpēc $\underline{AB>AA_1}>AP$. Otrā gadījumā iegūstam $\underline{AC>AA_1}>AP$. Tā kā trijstūris ABC ir regulārs, tad $AB = AC > AP$



A36. zīm.



A37. zīm.

Tagad atrisināsim uzdevumu.

a) no lemmas seko: $PA<a$, $PB<a$, $PC<a$, kur a – regulārā trijstūra malas garums. Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam

$PA + PB + PC < a + a + a = 3a = 3AB$, kas arī bija jāpierāda.

b) novelkam caur P $MN \parallel BC$; tad ΔMAN ir regulārs. No trijstūra nevienādības seko $BP + CP < (BM + MP) + (CN + NP)$, tātad

$$BP + CP < BM + CN + MN \qquad (1)$$

No lemmas pierādījuma (pasvītrotās nevienādības) seko:

$$AP < AM \quad (2)$$

Saskaitot (1) un (2), iegūstam $BP + CP + AP < BM + CN + MN + AM$.

Tā kā $MN = AN$ (jo ΔMAN - regulārs) un $AC = AB$ (jo ΔBAC - regulārs), tad $BM + CN + MN + AM = (BM + AM) + (CN + AN) = BA + AC = 2 \cdot AB$.

Tātad $BP + CP + AP < 2AB$, kas arī bija jāpierāda.

A.11.2. Ievērosim, ka katram $n > 0$ pastāv vienādība

$$\frac{n}{n^4+n^2+1} = \frac{n}{n^4+2n^2+1-n^2} = \frac{n}{(n^2+1)^2-n^2} = \frac{n}{(n^2-n+1)(n^2+n+1)} =$$

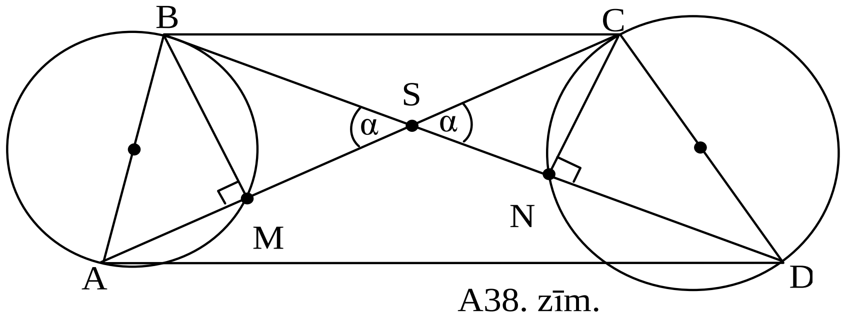
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right]$$

Saskaitot šīs vienādības pie $n = 1; 2; 3; ...; 2007$, iegūstam, ka novērtējamās summas vērtība ir

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1^2-1+1} - \frac{1}{2^2-2+1} + \frac{1}{2^2-2+1} - \frac{1}{3^2-3+1} + ... - \frac{1}{2008^2-2008+1}\right] <$$

$< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1^2-1+1} = \frac{1}{2}$, kas arī bija jāpierāda.

A.11.3. Apzīmējam $\angle ASB = \alpha$ (skat. A38. zīm.). Saskaņā ar teorēmu par pieskares garuma kvadrātu mums pietiek pierādīt, ka $SM \cdot SA = SN \cdot SD$.



A38. zīm.

Ievērojam, ka $\angle BMA = 90^0$ un $\angle CND = 90^0$, jo balstās uz riņķa līnijas diametra. Tātad arī $\angle BMS = 90^0$ un $\angle CNS = 90^0$ kā attiecīgo leņķu blakusleņķi. No tā seko, ka trijstūri ΔBMS un ΔCND - taisnleņķa. Tātad $\cos\alpha = \frac{SM}{SB}$ (ΔBSM) un $\cos\alpha = \frac{SN}{SC}$ (ΔBSM). Izsakām: $SM = SB\cdot\cos\alpha$ un $SN = SC\cdot\cos\alpha$, un mums pietiek pierādīt, ka $SB\cdot SA\cdot\cos\alpha = SC\cdot SD\cdot\cos\alpha$.

Ja būtu $\cos\alpha = 0$, tad $\alpha = 90^\circ$ un S atrodas uz abām riņķa līnijām ($S = M = N$) – pretruna. Tātad pietiek pierādīt, ka <u>$SB\cdot SA = SC\cdot SD$</u>.

Trijstūri ΔBSC un ΔDSA –līdzīgi trijstūri ($\ell\ell\ell$), tātad $\frac{SB}{SD} = \frac{SC}{SA}$, t.i., $SB\cdot SA = SC\cdot SD$. Tātad pieskares, kas no S novilktas abām riņķa līnijām, vienādas savā starpā .

A.11.4. Apzīmēsim patiesos darbiniekus ar P un darbiniekus, kas melo, ar M. Apskatīsim to no P, kas saņem vislielāko algu, apzīmēsim to kā P^*. Saskaņā ar paziņojumu ir vismaz 90 darbinieku, kas saņem lielāku algu. Tā kā P^* no P ir lielākā alga, tad šie 90 darbinieki ir M. Tātad ir vismaz 90 M.

Apskatīsim to no M, kas saņem vismazāko algu, apzīmēsim to kā M^*. Saskaņā ar paziņojumu, nav vairāk kā 89 darbinieku, kas saņem lielāku algu. Tā kā par P^* vairāk naudas pelnīja 90 darbinieku, tad M^* pelna vairāk nekā P^* (pretēji par M^* vairāk pelnītu vismaz 90 darbinieku). <u>Tātad kopā ir tieši 90 M.</u>

Apskatīsim to no M, kas strādā visilgāk. Saskaņā ar paziņojumu ir vismaz 10 P (kuri strādā ilgāk par šo meli).

Apskatīsim to no P, kurš strādājis vismazāko laiku. Saskaņā ar paziņojumu, ir ne vairāk kā 9 darbinieki, kas strādā firmā ilgāk, tātad ir ne vairāk kā 9 citi P. Tā kā ir vismaz 10 P, tad <u>kopā ir tieši 10 P.</u>

Tātad firmā strādā tieši 100 darbinieki.

A.11.5. <u>Atbilde:</u> **a)** nevar, **b)** var.

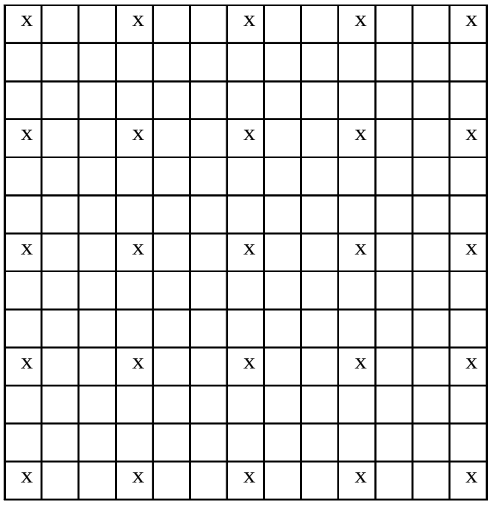
<u>Risinājums.</u> **a)** Pie $n = 8$ apskatīsim to kvadrātā iekšā esošo rūtiņu malu skaitu, kam abās pusēs ir melnas rūtiņas. Sākumā tas ir 0; beigās tam jābūt $2\cdot7\cdot8$, t.i., **nav** jādalās ar 3.

Viegli pārliecināties, ka ar katru gājienu šis skaits mainās par 0, par 3 vai par 12. Ja nokrāso:

- vienu baltu rūtiņu, tad skaits nemainās, jo visas blakus rūtiņas tai ir baltas;
- no divām baltām rūtiņām sastāvošu taisnstūri, tad skaits mainās par 3, jo tieši divas no tam blakus esošām rūtiņām jau ir melnas un vēl 1 rūtiņu mala ir starp tikko nokrāsotajām rūtiņām;
- no četrām baltām rūtiņām sastāvošu kvadrātu, tad skaits mainās par 12, jo visas 8 tam blakus esošās rūtiņas jau ir melnas un vēl 4 rūtiņu malas ir starp tikko nokrāsotajām rūtiņām.

Esam pārliecinājušies, ka kvadrātā iekšā esošo rūtiņu malu skaits vienmēr dalās ar 3. Tātad prasītā nokrāsošana nav iespējama.

b) Pie $n = 13$ vispirms nokrāsojam ar krustiņiem atzīmētās rūtiņas (skat. A39. zīm.)



A39. zīm.

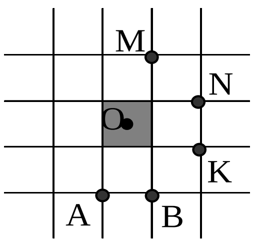
Pēc tam nokrāsojam visus 40 003×2 rūtiņas lielos taisnstūrus, kas tās „savieno” – gan horizontāli, gan vertikāli; pēc tam nokrāsojam 16 baltos 2×2 rūtiņu kvadrātus, un viss kvadrāts ir nokrāsots melns.

A.12. Divpadsmitā klase

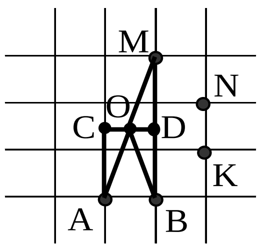
A.12.1. Pārliecināmies, ka punkti A, B, K, N, M atrodas vienādos attālumos no iekrāsotās rūtiņas centra O (skat. A40. zīm.):

$\Delta ACO = \Delta BDO = \Delta MDO = \Delta NEO = \Delta KFO$ $(m\ell m)$, tātad

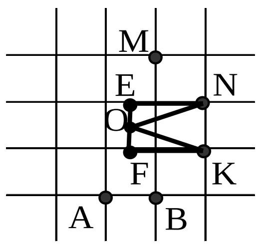
$AO = BO = MO = NO = KO$ kā hipotenūzas vienādos trijstūros (skat. A41., A42. zīm.).



A40. zīm.



A41. zīm.



A42. zīm.

Tātad punkti A, B, K, N, M atrodas uz vienas riņķa līnijas. Redzam, ka apskatāmie leņķi ir ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku AB. No tā seko, ka šie leņķi ir vienādi.

Iespējami ļoti daudzi citi risinājumi.

A.12.2. a) Apzīmējam $f(x) = x3 - 6x^2 + 7x - 1$. Tā kā $f(0)<0$, $f(1)>0$, $f(2)<0$, $f(1000)>0$, tad pa vienai saknei ir intervālos $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;1000)$. Vairāk sakņu 3. pakāpes vienādojumam nevar būt. Tātad vienādojumam ir tieši trīs dažādas pozitīvas saknes, kas arī bija jāpierāda.

b) Apzīmējam saknes ar x_1; x_2; x_3. Tad $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3-6x^2+7x-1$ ir identitāte.

Polinomi ir identiski vienādi tad un tikai tad, ja visi to attiecīgie koeficienti pa pāriem vienādi. Apskatām koeficientus pie x^0 gan kreisajā, gan labajā pusē. Redzam, ka $(-x_1)(-x_2)(-x_3) = -1$, t.i., $x_1x_2x_3 = 1$. Tā kā x_1, x_2 un x_3 ir taisnstūra paralēlskaldņa augstums, garums un platums, tad tā tilpums ir 1.

Apskatām koeficientus pie x gan kreisajā, gan labajā pusē un iegūstam $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=7$. Tā kā x_1x_2 ir taisnstūra paralēlskaldņa vienas skaldnes laukums, x_1x_3 - otras skaldnes laukums un x_2x_3 - trešās skaldnes laukums, tad triju skaldņu laukumu summa ir 7. Tā kā pārējās trīs skaldnes ir atbilstoši vienlielas ar šīm trīs skaldnēm, arī to laukumu summa ir 7. No tā secinām, ka pilnas virsmas laukums ir 7+7=14.

A.12.3. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Ja sarkana figūriņa stāv pa kreisi no baltas (**ne noteikti blakus**), teiksim, ka šis figūriņu pāris ir vēlams. Sākumā vēlamo pāru ir 0, beigās jābūt 1 vēlamam pārim. Viegli pārbaudīt, ka ar katru gājienu vēlamo pāru skaits mainās par pāra skaitli:

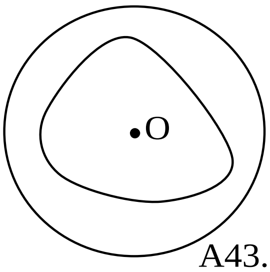
- Ja pievieno 2 baltas figūriņas vietā, no kuras pa kreisi ir n sarkanas, tad vēlamo pāru skaits aug par $2n$;
- Ja pievieno 2 sarkanas figūriņas vietā, no kuras pa labi ir n baltas, tad vēlamo pāru skaits aug par $2n$;
- Ja noņem 2 baltas figūriņas vietā, no kuras pa kreisi ir n sarkanas, tad vēlamo pāru skaits samazinās par $2n$;
- Ja noņem 2 sarkanas figūriņas vietā, no kuras pa labi ir n baltas, tad vēlamo pāru skaits samazinās par $2n$.

Tātad vēlamo pāru vienmēr ir pāra skaits, tātad tas nekad nevar būt 1. Uzdevumā prasītais nav sasniedzams.

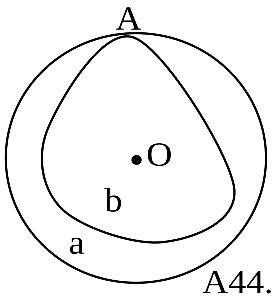
A.12.4. Atbilde: **a)** nevar, **b)** var.

Risinājums. **a)** Pierādīsim, ka pie $n=2$ prasītais nav izdarāms. Pieņemsim no pretējā, ka tas izdevies. Tad novilkta tikai viena dalījuma līnija. Ir trīs gadījumi:

1.) abām daļām nav neviena kopīga punkta uz riņķa līnijas. Tad vienai daļai ir „caurums”, bet otrai nav, līdz ar to tās nav vienādas (skat. A43. zīm.);



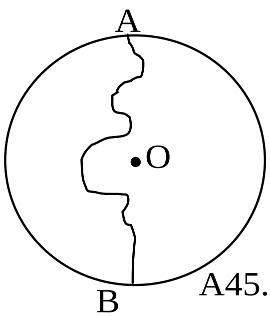
A43. zīm.



A44. zīm.

2.) abām daļām ir viens kopīgs punkts A uz riņķa līnijas. Tad abas daļas nevar būt vienādas, jo uz figūras a var atrast divus tādus punktus, starp kuriem attālums ir riņķa diametrs, bet uz figūras b šādus divus punktus atrast nevar (skat. A44. zīm.).

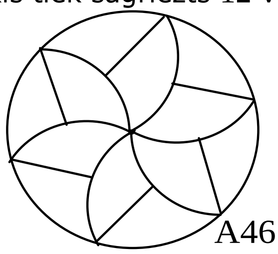
3.) abām daļām ir divi kopīgi punkti A un B uz riņķa līnijas (skat. A45. zīm.).



A45. zīm.

Ja A un B nav diametrāli pretēji punkti, tad vienā daļā ir divi punkti, starp kuriem attālums ir riņķa diametrs, bet otrā daļā tādu punktu nav, tāpēc daļas nav vienādas. Tāpēc A un B jābūt diametrāli pretējiem punktiem. Tad katrā

daļā ir tieši viens punktu pāris (A,B), starp kuriem attālums vienāds ar riņķa diametru; tāpēc, savietojot daļas tā, lai tās sakristu, vai nu A sakrīt ar A un B ar B, vai arī A ar B un B ar A. Bet tad daļas kopumā nesakrīt, jo viena no tām satur centru O, bet otra – nē.
Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.
b) Piemēru skat. A46. zīm. Lai izveidotu šādu sadalījumu, uz riņķa līnijas atliek 6 punktus tā, ka riņķa līnija tiek sadalīta 6 vienādās daļās. Šos punktus un riņķa centru savieno ar līnijām, kas ir vienādas ar 6 punktu izveidotajiem lokiem uz riņķa līnijas. Savienojot šo līniju viduspunktus ar punktiem, kas atlikti uz riņķa līnijas, riņķis tiek sagriezts 12 vienādos gabalos.



A46. zīm.

A.12.5. Izmantosim matemātisko indukciju. Pie $n=1$ un $n=2$ apgalvojums acīmredzami pareizs. Pieņemsim, ka tas pareizs pie $n<k$, un apskatīsim gadījumu, kad $n=k$ ($k \geq 3$). Pieņemsim, ka kreisajā rindas galā jābūt 1.sējumam utt.; labajā galā jābūt n-tajam sējumam.
Attēlosim situācijas tā, kā parādīts A47. zīm.: zem svītras norādītas sējumu atrašanās vietas, virs svītras – to sējumu numuri, kas kādā brīdī atrodas atbilstošajās vietās (sējumu numuri apvilkti ar aplīšiem):

5	3	1	2	4
1	2	3	4	5

A47. zīm.

Sāksim „bīdīt” k-to sējumu pa labi, mainot to ar kārtējiem kaimiņiem, kamēr kārtējās maiņas rezultātā kārtējais kaimiņš „nedraud” nostāties savā vietā. Ja šāda iespēja parādās, šķirojam gadījumus:
A. Šīs maiņas rezultātā arī k-tais sējums nostātos savā vietā. Tad šo maiņu izdarām. Rezultātā (k-1)-ais un k-tais sējumi ir savās vietās, bet citi sējumi – joprojām nē. Esam ieguvuši situāciju ar $n=k$-2 un varam atsaukties uz induktīvo hipotēzi.
B. Radusies situācija, kas attēlota A48. zīmējumā: **visi** tālākie sējumi līdz rindas galam atrodas vienu vietu pa labi no savas īstās vietas (patiesībā A gadījums ir B gadījuma speciālgadījums):

	k	m	m+1		k-2	k-1
...	m	m+1	m+2		k-1	k

A48. zīm.

Tad „bīdām” k-to sējumu tālāk līdz galam. Rezultātā sējumi m, m+1,..., k-2, k-1, k nonāk savās vietās rindas labajā galā, bet pirmie m-1 sējumi joprojām nav savās vietās. Atkal varam izmantot induktīvo hipotēzi.
C. Radusies situācija, kad t sējumi, kas ir pa labi no k-tā sējuma pašreizējās pozīcijas, atrodas vienu vietu pa labi no savas īstās vietas, bet (t+1)-ais sējums – nē (A49. zīm.):

...	k	m	m+1	...	m+t-1	j	...
...	m	m+1	m+2	...	m+t	m+t+1	...

$\boxed{j \neq m+t}$

A49. zīm.

Skaidrs, ka $j \neq m+t$; $m+t-1$; $m+t-2$; ...; $m+1$; m. Tāpēc varam sējumu j „nosūtīt" pa kreisi, kamēr tas samainās ar k. Rezultātā neviens sējums nav no jauna nonācis īstajā vietā, bet k pabīdījies vienu vietu pa labi. Līdzīgi turpinām pārbīdīt k, kamēr iestājas A vai B gadījums.

Līdz ar to mēs vienmēr varam k pārbīdīt uz savu vietu - induktīvā pāreja izdarīta.

VP. Papildsacensības par vietu Latvijas izlasē dalībai 48. Starptautiskajā matemātikas olimpiādē

VP.1. Latvijas 57. matemātikas olimpiādes 4.kārta

VP.1.1. Apzīmēsim $a+b+c=x$. Tad $a+b=x-c$, $b+c=x-a$ un $a+c=x-b$. Izmantojam izveidotās vienādības un pārveidojam uzdevumā doto vienādību: $(a+b)(b+c)(c+a)=(x-a)(x-b)(x-c)=1$.

Tātad $x^3-x^2\cdot(a+b+c)+x(ab+ac+bc)-abc=1$. Tā kā $a+b+c=x$, tad tas ir tas pats, kas $x^3-x^2\cdot x+(a+b+c)(ab+ac+bc)-abc=1$, un tātad $ab+ac+bc=\dfrac{1+abc}{a+b+c}$ (*) (šo vienādību var iegūt arī citādu pārveidojumu ceļā).

Ievērojam, ka

$a+b+c=\dfrac{1}{2}((a+b)+(a+c)+(b+c))\geq\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}=\dfrac{3}{2}$, tātad $a+b+c\geq\dfrac{3}{2}$ (**)

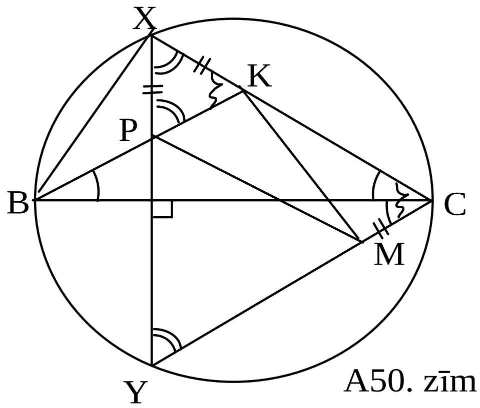
No otras puses, $1=(a+b)(a+c)(b+c)\geq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{ac}\cdot 2\sqrt{bc}=8abc$, tāpēc $abc\leq\dfrac{1}{8}$ (***)

No (*), (**) un (***) seko, ka $ab+ac+bc\leq\dfrac{1+\frac{1}{8}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{4}$, k.b.j.

VP.1.2. Tā kā $BK \| CY$, tad $\angle KBC=\angle BCY$ kā iekšējie šķērsleņķi. Arī $\angle KCB=\angle BCY$, jo BC ir XY vidusperpendikuls. No tā seko, ka ΔBKC ir vienādsānu un <u>$BK=KC$</u>.

Līdzīgi $\angle XPK=\angle XYC$ kā kāpšļleņķi un $\angle PXK=\angle XYC$, tāpēc $\angle XPK=\angle PXK$. No tā seko, ka ΔXKP ir vienādsānu un $XK=PK$. Tā kā $PKCM$ – paralelograms, tad $PK=CM$. Tātad <u>$CM=KX$.</u>

Tā kā arī <u>$\angle XKB=\angle MCK$</u> kā kāpšļleņķi, tad no pasvītrotajām vienādībām seko, ka $\Delta MCK=\Delta XKB$ (mlm) (*)



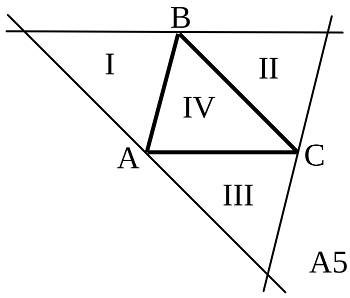
A50. zīm.

Tā kā $PKCM$ ir paralelograms, tad $\Delta MCK = \Delta KPM$ (**).
No (*) un (**) seko, ka $\Delta XKB = \Delta KPM$.
Tāpēc $\angle PKM = \angle KXB$ kā attiecīgie leņķi vienādos trijstūros. Bet $\angle KXB \equiv \angle CXB = 90^0$ kā ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru. Tātad $\angle \mathrm{PKM} = 90^0$, kas arī bija jāpierāda.

VP.1.3. No Fermā Mazās teorēmas seko, ka $x^p - x$ un $y^p - y$ dalās ar p. Varam izteikt $x + y = x + y + x^p - x^p + y^p - y^p = (x^p + y^p) - (x^p - x) - (y^p - y)$. Tā kā visi trīs saskaitāmie dalās ar p, tad arī $x + y$ dalās ar p, un tādēļ varam izteikt $x + y = n \cdot p$, kur n – vesels skaitlis. Tātad $x = -y + n \cdot p$.

Izvirzot pēc Ņūtona binoma formulas, iegūstam $x^p = -y^p + y^{p-1} \cdot C_p^1 \cdot np + Q$, kur izteiksmē Q visi saskaitāmie satur p^2 atklātā veidā. No šejienes redzam, ka $x^p + y^p = y^{p-1} \cdot C_p^1 \cdot np + Q$, tātad $x^p + y^p$ dalās ar p^2, jo $C_p^1 = p$.

VP.1.4. Pieņemsim, ka ABC ir ar vislielāko laukumu starp trijstūriem, kurus veido dotie pieci punkti. Tad novelkam taisnes caur tā virsotnēm paralēli pretējām malām. Izveidojas vēl trīs trijstūri I, II un III, kas vienlieli ar ΔABC . Tātad punkti D un E atrodas šo taišņu veidotā trijstūra iekšpusē, pretēji ΔABC nebūtu trijstūris ar vislielāko laukumu.



A51. zīm.

Vismaz vienā no trijstūriem I, II, III nav ne D, ne E. Abi pārējie kopā ar IV veido prasīto trapeci, jo visiem trijstūriem I, II, III, IV laukumi ir vienādi un neviens no tiem nepārsniedz 1.

VP.1.5. Izmantosim matemātisko indukciju. Pie $n = 2$ apgalvojums ir acīmredzams. To, ka no A var aizbraukt uz B pa baltas/sarkanas krāsas ceļiem, pierakstīsim kā AbB (resp. AsB).
Pieņemsim, ka apgalvojums pareizs karaļvalstīm ar 2; 3; ...; m pilsētām. Apskatīsim karaļvalsti ar $m+1$ pilsētu. Apzīmēsim vienu no pilsētām ar P. Iedomāsimies uz brīdi, ka P nav (un nav arī ceļu, kam P ir sākums vai beigas). Pēc induktīvās hipotēzes „reducētajā” valstī eksistē pilsēta L ar

īpašību: katrai pilsētai X vai nu LbX, vai LsX. Pieņemsim, ka ceļš starp L un P ved no P uz L; pretējā gadījumā L ir „laba" arī sākotnējā valstī, jo no L var aizbraukt uz visām citām pilsētām un arī uz P, un uzdevums atrisināts. Tāpēc pieņemam, ka PsL (identiski var apskatīt gadījumu PbL).

Pieņemsim, ka $x_1, x_2, ..., x_k$ ir pilsētas, uz kurām no L var aizbraukt pa baltiem ceļiem. (Ja tādu vispār nav, tad no P var aizbraukt uz visām pilsētām pa sarkaniem ceļiem, un uzdevums atrisināts.) Apskatām pilsētu sistēmu $P, x_1, x_2, ..., x_k$. Tā satur $\leq n$ pilsētas, un varam lietot induktīvo hipotēzi; atrodam šai sistēmai meklējamo pilsētu P_1, no kuras var aizbraukt uz pārējām k pilsētām (*). Apskatām divus gadījumus:

- $P_1 = P$ - tad no P var aizbraukt uz $x_1, ..., x_k$ vajadzīgajā veidā, kas seko no (*), un uz pārējām pilsētām – pa sarkaniem ceļiem caur L.
- Pieņemam, ka P_1 nav P.
    - Ja $P_1 sP$, tad no P_1 var aizbraukt uz $P, x_1, x_2, ..., x_k$ vajadzīgajā veidā, kas seko no (*), un uz pārējām pilsētām – pa sarkaniem ceļiem caur P un L.
    - Ja $P_1 bP$, tad no L var vajadzīgajā veidā aizbraukt uz visām pilsētām (uz P caur P_1 pa baltiem ceļiem, uz pārējām pilsētām – saskaņā ar induktīvo hipotēzi).

VP.2. Latvijas izlases atlases sacensības 2007. gada 30. aprīlī

VP.2.1. Pirmskaitļu pavisam ir bezgalīgi daudz. Tāpēc eksistē tāds r, $0 \leq r \leq n-1$, ka bezgalīgi daudzi pirmskaitļi dod atlikumu r, dalot ar n. Pieņemsim, ka p - viens no šādiem pirmskaitļiem. Visi citi šādi pirmskaitļi, kas lielāki par p, izsakāmi formā $q = p + \frac{q-p}{n} \cdot n$, kur $\frac{q-p}{n}$ ir naturāls skaitlis (jo q un p dod vienādus atlikumus, dalot ar n).

VP.2.2. Tā kā šaurleņķu trijstūrī visu leņķu kosinusi ir pozitīvi, tad no kosinusu teorēmas seko, ka $a^2 < b^2 + c^2$, $b^2 < a^2 + c^2$ un $c^2 < a^2 + b^2$.

Koši-Švarca-Bunjakovska nevienādība apgalvo, ka patvaļīgiem skaitļiem $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ... y_n$ ir spēkā sakarība

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2\right) \geq \left(x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n\right).$$

Izmantojot šo nevienādību, varam iegūt

$$\left(\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{a^3}\right)^2 + \left(\sqrt{b^3}\right)^2 + \left(\sqrt{c^3}\right)^2\right) \geq \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b^3} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{c^3}\right)^2$$

jeb

$$(a+b+c)\left(a^3 + b^3 + c^3\right) \geq \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2,$$

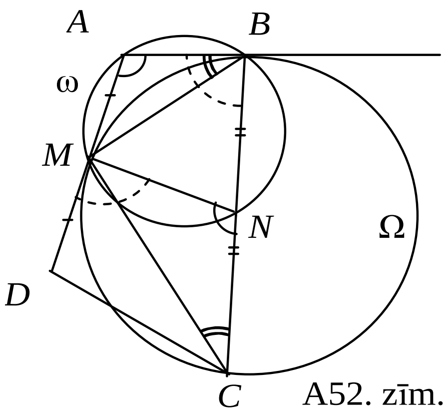
tāpēc mums pietiek pierādīt, ka $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^3 > 4\left(a^6 + b^6 + c^6\right)$. Tā tiešām ir: identisku pārveidojumu ceļā iegūstam $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^3 =$

$$= a^6 + b^6 + c^6 + 6(abc)^2 + 3\left(a^2b^4 + a^4b^2 + a^2c^4 + a^4c^2 + b^2c^4 + b^4c^2\right) =$$

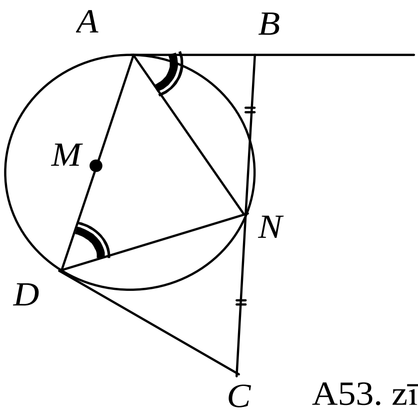
$$= 4\left(a^6 + b^6 + c^6\right) + 12(abc)^2 + 3\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(a^2 - b^2 + c^2\right)\left(-a^2 + b^2 + c^2\right) >$$

$$> 4\left(a^6 + b^6 + c^6\right).$$

VP.2.3. Ap $ABNM$ apvilkto riņķa līniju sauksim ω (skat. A52. zīm). No $ABNM$ leņķu īpašībām seko, ka $\angle MAB = 180° - \angle MNB = \angle MNC$.



A52. zīm.



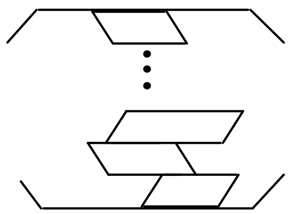
A53. zīm.

No hordas un pieskares leņķa īpašībām un ievilkta leņķa īpašībām riņķa līnijā Ω seko $\angle ABM = \angle BCM$. Iegūstam, ka $\Delta ABM \sim \Delta NCM$ un tātad $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{NC}$. Tāpēc arī $\frac{MD}{AB} = \frac{MN}{BN}$, un tātad $\frac{MD}{MN} = \frac{AB}{BN}$ (1). No riņķa līnijā ω ievilktā četrstūra leņķu īpašībām seko, ka $\angle DMN = \angle ABN$ (2). No (1) un (2) seko, ka $\Delta DMN \sim \Delta ABN$. Tāpēc $\angle MDN = \angle BAN$ (skat. A53. zīm.). No tā seko prasītā pieskaršanās.

VP.3. Latvijas izlases atlases sacensības 2007. gada 1. maijā

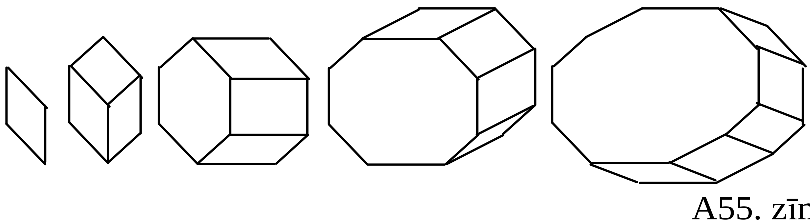
VP.3.1. Risinājums balstās uz vairākām lemmām.

1. lemma. Ja izliekts daudzstūris sagriezts paralelogramos, tad tas ir centrāli simetrisks.


A54. zīm.

Tiešām, paralelogramu ķēdītes, kas „sākas pie vienas malas”, var beigties tikai uz tai paralēlas malas; tāpēc *katrai malai eksistē tai paralēla mala ar tādu pašu garumu*.

2. lemma. Centrāli simetrisku $2n$-stūri var sagriezt $\frac{n(n-1)}{2}$ paralelogramos.


A55. zīm.

Pierādīsim, izmantojot matemātisko indukciju (skat. A55. zīm.). Ja $n = 2$, tad 4-stūri varam sagriezt 1 paralelogramā. Ja $n = 3$, 6-stūri varam sagriezt 1+2 paralelogramos. Ja $n = 4$, 8-stūri varam sagriezt 6-stūrī un vēl 3 paralelogramos jeb 1+2+3 = 6 paralelogramos. Tā turpinām līdz $2n$-stūrim, kas dos $1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ paralelogramus.

3. lemma. Centrāli simetrisku $2n$-stūri nevar sadalīt mazāk kā $\frac{n(n-1)}{2}$ paralelogramos.

Tiešām, katras divas no 1. lemmas pierādījumā minētajām n ķēdītēm „krustojas" (katras divas citā paralelogramā); tāpēc ir vismaz $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ (tik veidos var izvēlēties 2 no n ķēdītēm) paralelogrami.

Tagad varam atrisināt uzdevumu. Pieņemsim, ka uzdevumā runāts par $2k$-stūri. Tad $\frac{k(k-1)}{2}\le 14$; no šejienes $k\le 5$ (jo $\frac{6\cdot 5}{2}=15\not\le 14$). No $k\le 5$ un no 2. lemmas seko vajadzīgais.

VP.3.2. Skaidrs, ka jābūt $n\ge 2$. Sadalot reizinātājos, iegūstam $\frac{n^{2000}-1}{n-1}=\left(n^{1000}+1\right)\left(n^{500}+1\right)\frac{n^{500}-1}{n-1}$; visi reizinātāji ir naturāli skaitļi, jo $a^k-b^k=(a-b)(\ldots)$. Apzīmēsim reizinātājus ar $x=n^{1000}+1$, $y=n^{500}+1$, $z=\frac{n^{500}-1}{n-1}$. Redzam, ka $x-2$ un $y-2$ abi dalās ar z, jo $\frac{x-2}{z}=\left(n^{500}-1\right)\left(n^{500}+1\right)\cdot\frac{n-1}{n^{500}-1}=(n-1)\left(n^{500}+1\right)$ un $\frac{y-2}{z}=\left(n^{500}-1\right)\cdot\frac{n-1}{n^{500}-1}=n-1$. Līdzīgi $x-2$ dalās ar y.

Tāpēc x, y, z LKD pa pāriem var būt tikai 1 vai 2.

Tāpēc xyz var būt kvadrāts tikai tad, ja katrs reizinātājs atsevišķi ir vai nu kvadrāts, vai divkāršots kvadrāts. Ne x, ne y nav kvadrāti, jo tie ir par 1 lielāki nekā $\left(n^{500}\right)^2$ resp. $\left(n^{250}\right)^2$. Tāpēc tie ir divkāršoti kvadrāti, un $4xy$ ir kvadrāts. Bet tā nevar būt, jo $4xy=4\left(n^{1000}+1\right)\left(n^{500}+1\right)=$ $=4n^{1500}+4n^{1000}+4n^{500}+4>\left(2n^{750}+n^{250}\right)^2$ un līdzīgi $4xy<\left(2n^{750}+n^{250}+1\right)^2$, tātad $4xy$ atrodas starp divu blakusesošu naturālu skaitļu kvadrātiem.

Tātad tādu n, par kādiem jautāts uzdevumā, nav.

VP.3.3. Atbilde: mērķa sasniegšanai vienmēr pietiek ar 3 gājieniem un var gadīties, ka ar mazāk nepietiek.

Risinājums sastāv no divām daļām – I, ka ar mazāk gājieniem nepietiek, un II, ka ar 3 gājieniem pietiek.

x	y	
t	z	

$\Rightarrow$

x	t	
y	z	

A56. zīm.

I Piemēram, A56. zīm. parādītā pārkārtošanās prasa lai y un t mainītu gan rindas, gan kolonnas, tāpēc noteikti vajag vismaz 2 gājienus – vienu „pa rindām", otru – „pa kolonnām". Ja citu gājienu nebūtu, x un z nevarētu atrasties turpat, kur sākumā.

II Parādīsim, ka ar 3 gājieniem pietiek.

Ierakstīsim tabulā katrā rūtiņā tās rindas numuru, kurā rūķītim, kas sākumā ir šajā rūtiņā, jānonāk procesa beigās. Tātad tabulā ir 2007 „1", 2007 „2", ..., 2007 „2007".

Veiksim šādus 3 gājienus:

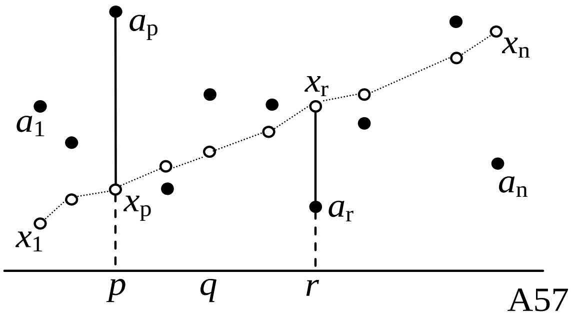
a) panāksim, ka *katrā* kolonnā ir visi skaitļi no 1 līdz 2007 ieskaitot (kā to izdarīt, parādīsim vēlāk), katrs vienu reizi;

b) savāksim visus „1” 1. rindā, visus „2” – 2. rindā utt. (skaidrs, ka to var izdarīt, ja gājiens a) ir izdarīts);
c) katras rindas ietvaros sakārtosim rūķīšus tā, kā viņiem jābūt procesa beigās (ja b) ir izdarīts, tad c) acīmredzami var izdarīt).
Tātad mums jāparāda, ka var izdarīt gājienu a). Skaidrs, ka tas jādara, mainot skaitļus rindu iekšienē. Mēs pierādīsim sekojošu **apgalvojumu**: ja tabulā ir 2007 rindas, katrā rindā ir n skaitļi un tajā pavisam ir n reizes „1”, n reizes „2”, ..., n reizes „2007”, tad var izvēlēties katrā rindā pa vienai rūtiņai tā, ka visi izvēlētie skaitļi ir dažādi. Šos skaitļus var salikt vienā kolonnā, pēc tam pielietot **apgalvojumu** atlikušajai tabulai, kurā ir 2007 rindas un katrā ir $(n\text{-}1)$ skaitļi (pavisam n-1 reizes „1”, n-1 reizes „2” utt.), un iegūtos skaitļus atkal salikt vienā kolonnā, utt.
Atliek pierādīt **apgalvojumu**. Pierādīsim to induktīvi, parādot, kā izvēlas rūtiņas 1., 2., 3., ... rindās.
1. rindā izvēlamies jebkuru rūtiņu.
Pieņemsim, ka jau izvēlētas rūtiņas 1., 2., 3., ..., k. rindā, un šajās rūtiņās ierakstītie skaitļi visi ir dažādi. Apskatām $(k+1)$-o rindu. Ja tajā ir skaitlis, kas vēl nav izvēlēts iepriekšējās rindiņās, izvēlamies to. Ja turpretī visi $(k+1)$-ās rindas skaitļi ir jau izvēlēti iepriekšējās rindās $r_1, r_2, ..., r_k$, tad kaut kur šajās rindās ir skaitlis, kas vēl nav izvēlēts (tiešām, rindās „$r_1, r_2, r_3, ..., r_k, (k+1)$-ā rinda” kopā ir $n(k+1)$ rūtiņas, un līdz šim izvēlētie skaitļi aizpilda augstākais $n\cdot k$ no tām). Pieņemsim, ka rindiņā r_i patlaban izvēlēts skaitlis α, kas sastopams arī $(k+1)$-ā rindiņā, bet rindiņā r_i vēl ir arī skaitlis β, kas vēl nav izvēlēts. Tad mainām savu izvēli: no r_i izvēlamies β, bet no $(k+1)$-ās rindiņas izvēlamies α. Esam izvēlējušies pa rūtiņai no 1., 2., ..., k-tās, $(k+1)$-ās rindiņas.
Tā turpinām, kamēr izvēlētas pa rūtiņai no katras rindiņas. **Apgalvojums** līdz ar to ir pierādīts.

IMO. 48. Starptautiskā matemātikas olimpiāde (48th International Mathematical Olympiad)

IMO. Uzdevumi 2007. gada 25. jūlijā.

IMO.1. a) Izvēlēsimies tādus indeksus $1 \le p \le q \le r \le n$, kuriem izpildās $d = d_q$, $a_p = \max\{a_j : 1 \le j \le q\}$, $a_r = \min\{a_j : q \le j \le n\}$ un tātad $d = a_p - a_r$. (Šiem indeksiem nav noteikti jābūt vienīgajiem, tādi var būt vairāki.)
Brīvi izvēlēsimies reālus skaitļus $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ un apskatīsim lielumus $\left|x_p - a_p\right|$ un $\left|x_r - a_r\right|$. (Skat. A57. zīm.) Tā kā $\left(a_p - x_p\right) + \left(x_r - a_r\right) = = \left(a_p - a_r\right) + \left(x_r - x_p\right) \ge a_p - a_r = d$, tad vai nu $a_p - x_p \ge \frac{d}{2}$, vai $x_r - a_r \ge \frac{d}{2}$.
No tā izriet $\max\{\left|x_i - a_i\right| : 1 \le i \le n\} \ge \max\{\left|x_p - a_p\right|, \left|x_r - a_r\right|\} \ge \ge \max\{a_p - x_p, x_r - a_r\} \ge \frac{d}{2}$.



A57. zīm.

b) Nodefinēsim virkni (x_k) sekojoši: $x_1 = a_1 - \frac{d}{2}$, $x_k = \max\left\{x_{k-1}, a_k - \frac{d}{2}\right\}$ pie $2 \le k \le n$. Parādīsim, ka šai virknei ir spēkā **b)** daļā prasītā vienādība.

Virkne (x_k) ir nedilstoša pēc definīcijas un $x_k - a_k \ge -\frac{d}{2}$ visiem $1 \le k \le n$.

Pierādīsim, ka $x_k - a_k \le \frac{d}{2}$ visiem $1 \le k \le n$.

Apzīmēsim ar $l \le k$ mazāko tādu indeksu, kam izpildās $x_k = x_l$ brīvi izvēlētam indeksam $1 \le k \le n$. Būs spēkā vai nu $l = 1$, vai $l \ge 2$ (un tad $x_l > x_{l-1}$). Abos gadījumos $x_k = x_l = a_l - \frac{d}{2}$.

Tā kā $a_l - a_k \le \max\{a_j : 1 \le j \le k\} - \min\{a_j : k \le j \le n\} = d_k \le d$, tad no $x_k = a_l - \frac{d}{2}$ varam iegūt $x_k - a_k = a_l - a_k - \frac{d}{2} \le d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$.

Mēs esam ieguvuši $-\frac{d}{2} \le x_k - a_k \le \frac{d}{2}$ visiem $1 \le k \le n$, tādēļ $\max\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} \le \frac{d}{2}$.

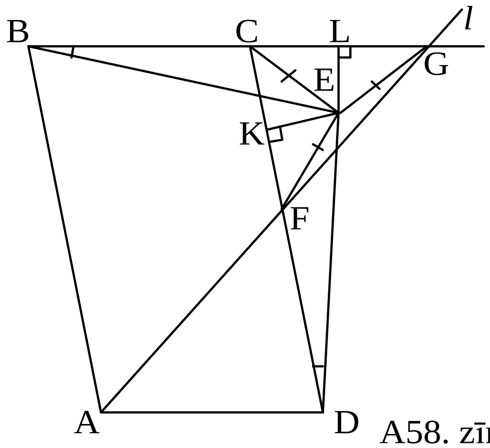
Vienādība izpildās tādēļ, ka $|x_1 - a_1| = \frac{d}{2}$.

IMO.2. Ja $CF = CG$, tad $\angle FGC = \angle GFC$ un no tā izriet $\angle GAB = \angle GFC = = \angle FGC = \angle FAD$ un tas, ka l ir bisektrise.

Pieņemsim, ka $CF < CG$. Vienādsānu trijstūros ECF un EGC novilksim attiecīgi augstumus EK un EL. (Skat. A58. Zīm.) Tad taisnleņķa trijstūros EKF un ELC ir spēkā $EF = EC$ un $KF = \frac{CF}{2} < \frac{CG}{2} = LC$, tādēļ $KE = \sqrt{EF^2 - KF^2} > \sqrt{EC^2 - LC^2} = LE$.

Tā kā ap četrstūri $BCED$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle EDC = \angle EBC$, tādēļ taisnleņķa trijstūri BEL un DEK ir līdzīgi. Tad no tā, ka $KE > LE$, izriet $DK > BL$ un tādēļ $DF = DK - KF > BL - LC = BC = AD$.

Bet, tā kā trijstūri ADF un GCF ir līdzīgi, iegūstam $1 > \frac{AD}{DF} = \frac{GC}{CF}$, kas ir pretrunā ar mūsu pieņēmumu.



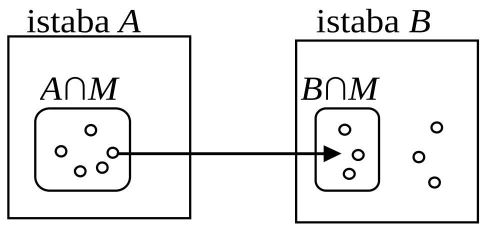
A58. zīm.

Gadījums, kad $CF > GC$, ir analogs. Mēs iegūstam pretējās nevienādības $KF > LC$, $KE < LE$, $DK < BL$, $DF < AD$, no kurām izriet $1 < \frac{AD}{DF} = \frac{GC}{CF}$, kas ir pretruna.

IMO.3. Aprakstīsim algoritmu, ar kuru pakāpeniski sakārtosim dalībniekus pa istabām. Nosauksim istabas par A un B. No sākuma izvietosim dalībniekus, kā tālāk minēts 1. solī, un tad mainīsim šo izvietojumu, vairākas reizes sūtot dalībniekus pa vienam no vienas istabas uz otru. Jebkurā algoritma darbības brīdī A un B apzīmē dalībniekus kopu, kas atrodas attiecīgajā istabā, un $c(A)$ un $c(B)$ apzīmē lielākās kliķes izmēru attiecīgajā istabā.

1. solis. Apzīmēsim ar M vienu no lielākajām kliķēm un tās izmēru apzīmēsim $|M| = 2m$. Liksim, lai visi dalībnieki, kas ir kliķē M, iet uz istabu A, bet visi pārējie – uz B. Tā kā M ir lielākā kliķe, tad ir spēkā $c(A) = |M| \geq c(B)$.

2. solis. Kamēr $c(A) > c(B)$, sūtīsim pa vienam sacensību dalībniekam no istabas A uz istabu B. Ievērosim, ka no $c(A) > c(B)$ izriet, ka istaba A nav tukša.

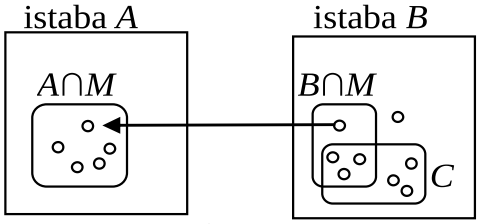


A59. zīm.

Katrā solī $c(A)$ samazinās par 1 un $c(B)$ palielinās par ne vairāk kā 1, tādēļ 2. soļa beigās iegūsim $c(A) \leq c(B) \leq c(A)+1$. Mēs iegūsim arī $c(A) = |A| \geq m$, pretējā gadījumā būtu vismaz $m+1$ dalībnieki no kliķes M istabā B un ne vairāk kā $m-1$ dalībnieki no M istabā A, un no tā sekotu $c(B) - c(A) \geq$ $\geq (m+1)-(m-1) = 2$.

3. solis. Apzīmēsim $k = c(A)$. Ja $c(B) = k$, tad pārstājam sūtīt dalībniekus uz istabu B. Ja esam sasnieguši $c(A) = c(B) = k$, tad esam atraduši uzdevumā prasīto. Citādi $c(B) = k+1$. Zinām arī, ka $k = |A| = |A \cap M| \geq m$ un $|B \cap M| \leq m$.

4. solis. Ja ir tāds dalībnieks $x \in B \cap M$ un tāda kliķe $C \subset B$, ka $|C| = k+1$ un $x \notin C$, tad sūtīsim x uz istabu A un pārtrauksim šo soli.

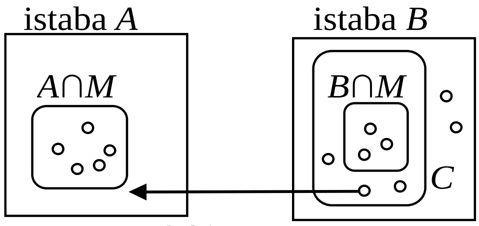


A60. zīm.

Pēc x atgriešanās istabā A tajā būs $k+1$ kliķes M dalībnieki un $c(A) = k+1$. Tā kā $x \notin C$, tad $c(B) = |C|$ nebūs samazināts un pēc šī soļa izpildīšanas $c(A) = c(B) = k+1$.

Ja šāda dalībnieka x nav, tad $B \cap M$ ir apakškopa visām kliķēm izmērā $k+1$ istabā B.

5. solis. Kamēr $c(B) = k+1$, izvēlamies tādu kliķi $C \subset B$, ka $|C| = k+1$ un vienu dalībnieku no $C \setminus M$ sūtām uz istabu A.



A61. zīm.

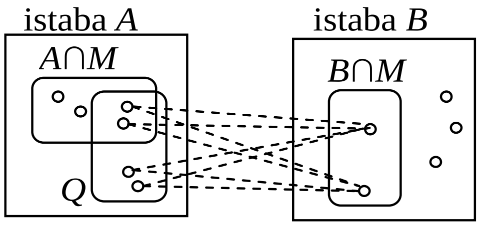
Ievērosim, ka $|C| = k+1 > m \geq |B \cap M|$, tādēļ $C \setminus M$ nevar būt tukša.

Tā kā dalībnieki pārvietojas no istabas B uz istabu A pa vienam, tad $c(B)$ samazinās par ne vairāk kā 1, tādēļ šī cikla beigās būs $c(B) = k$.

Istabā A ir kliķe $A \cap M$, kuras izmērs $|A \cap M| = k$ un tādēļ $c(A) \geq k$.

Pierādīsim, ka istabā A nav lielākas kliķes. Apskatīsim brīvi izvēlētu kliķi $Q \subset A$. Parādīsim, ka $|Q| \leq k$.

Istabā A un jo īpaši kopā Q var būt divu veidu dalībnieki: tādi, kas ir kliķē M un līdz ar to ir draugos ar visiem dalībniekiem kopā $B \cap M$, un tādi dalībnieki, kas uz istabu A tika atsūtīti 5. solī. Katrs no viņiem ir bijis vienā kliķē ar dalībniekiem no kopas $B \cap M$, tātad viņi ir draugos ar arī visiem $B \cap M$ dalībniekiem.



A62. zīm.

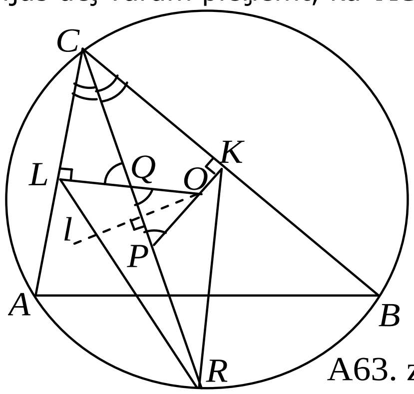
Tātad visi dalībnieki no kopas Q ir draugi ar visiem dalībniekiem no kopas $B \cap M$. Tā kā kopas Q un $B \cap M$ pašas par sevi ir kliķes, tad $Q \cup (B \cap M)$ arī ir kliķe. Tā kā M ir lielākā izmēra kliķe, tad $|M| \geq |Q \cup (B \cap M)| =$

$=|Q|+|B\cap M|=|Q|+|M|-|A\cap M|$ un tātad $|Q|\le |A\cap M|=k$. Visbeidzot pēc 5. soļa esam ieguvuši $c(A)=c(B)=k$.

Piezīme. Acīmredzams, ka šis apgalvojums ir aplams, ja lielākās kliķes izmērs nav pāra skaitlis.

IMO. Uzdevumi 2007. gada 26. jūlijā.

IMO.4. Ja $AC=BC$, tad trijstūris ABC ir vienādsānu, trijstūri RQL un RPK ir simetriski attiecībā pret bisektrisi CR un apgalvojums ir acīmredzams. Ja $AC\ne BC$, tad simetrijas dēļ varam pieņemt, ka $AC<BC$.



A63. zīm.

Apzīmēsim apvilktās riņķa līnijas centru, kas atradīsies hordu AC un BC vidusperpendikulu krustpunktā, ar O. Taisnleņķa trijstūriem CLQ un CKP pie virsotnes C ir vienādi šauri leņķi, tādēļ tie ir līdzīgi un $\angle CPK=\angle CQL=\angle OQP$, kā arī

$$\frac{QL}{PK}=\frac{CQ}{CP}\quad(1)$$ kā attiecīgo malu proporcija līdzīgos trijstūros.

Apzīmēsim hordas CR vidusperpendikulu ar l. Protams, ka tas ies caur riņķa līnijas centru O. Tā kā leņķi $\angle OPQ$ un $\angle OQP$ ir vienādi, tad trijstūris OPQ ir vienādsānu ar $OP=OQ$. Tā kā l ir simetrijas ass šajā trijstūrī, tad punkti P un Q atrodas simetriski uz nogriežņa CR,

$$RP=CQ \text{ un } RQ=CP.\quad(2)$$

Trijstūros RQL un RPK leņķi $\angle RQL$ un $\angle RPK$ ir vienādi. Tātad

$$\frac{\text{laukums}(RQL)}{\text{laukums}(RPK)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot RQ\cdot QL\cdot\sin\angle RQL}{\frac{1}{2}\cdot RP\cdot PK\cdot\sin\angle RPK}=\frac{RQ}{RP}\cdot\frac{QL}{PK}.$$

Ievietojot (1) un (2) iegūstam

$$\frac{\text{laukums}(RQL)}{\text{laukums}(RPK)}=\frac{RQ}{RP}\cdot\frac{QL}{PK}=\frac{CP}{CQ}\cdot\frac{CQ}{CP}=1,$$

no kā izriet, ka trijstūru RQL un RPK laukumi ir vienādi.

IMO.5. Sauksim skaitļu pāri (a,b) par sliktu, ja $(4a^2-1)^2$ dalās ar $4ab-1$, bet $a\ne b$. Lai pierādītu, ka slikti skaitļu pāri neeksistē, parādīsim, ka tiem piemistu divas īpašības, kuras ļauj konstruēt bezgalīgu dilstošu šādu pāru virkni.

I īpašība. Ja (a,b) ir slikts skaitļu pāris un $a<b$, tad eksistē tāds vesels pozitīvs skaitlis $c<a$, ka (a,c) arī ir slikts pāris.

Apzīmēsim $r = \frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}$.

Tad $r = -r \cdot (-1) \equiv -r(4ab-1) = -(4a^2-1)^2 \equiv -1 \pmod{4a}$ un $r = 4ac-1$ kādam pozitīvam veselam skaitlim c. No $a < b$ mēs iegūstam $4ac-1 = \frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1} < 4a^2-1$ un tādēļ $c < a$. Pēc konstrukcijas skaitlis $4ac-1$ ir $(4a^2-1)^2$ dalītājs, tādēļ (a,c) ir slikts skaitļu pāris.

<u>II īpašība</u>. Ja (a,b) ir slikts skaitļu pāris, tad arī (b,a) ir slikts skaitļu pāris.

Tā kā $1 = 1^2 \equiv (4ab)^2 \pmod{4ab-1}$, tad $(4b^2-1)^2 \equiv (4b^2-(4ab)^2)^2 = 16b^4(4a^2-1)^2 \equiv 0 \pmod{4ab-1}$. No tā izriet, ka $4ab-1$ ir arī $(4b^2-1)^2$ dalītājs.

Iedomāsimies, ka eksistē vismaz viens slikts pāris. Ņemsim tādu sliktu pāri (a,b), kam ir vismazākā $2a+b$ vērtība. Ja $a < b$, tad I īpašība parāda, ka eksistē pāris (a,c), kur $c < b$ un tātad $2a+c < 2a+b$. Ja $b < a$, tad II īpašība apgalvo, ka arī (b,a) ir slikts pāris un tad $2b+a < 2a+b$. Abos gadījumos ir pretruna ar $2a+b$ minimalitāti. Uzdevums atrisināts.

IMO.6. <u>Atbilde</u>: $3n$ plaknes.

<u>Risinājums</u>. Viegli atrast $3n$ šādas plaknes. Piemēram, plaknes $x = i$, $y = i$ un $z = i$ $(i = 1,2,...,n)$ satur kopu S, bet nesatur koordinātu sākumpunktu. Vēl plakņu sistēmu veido visas plaknes $x + y + z = k$ pie $k = 1,2,...,3n$.

Parādīsim, ka $3n$ ir mazākais iespējamais plakņu skaits.

Pieņemsim, ka ir N tādas plaknes, kas satur visus kopas S punktus, bet nesatur koordinātu sākumpunktu. Pieņemsim, ka to vienādojumi ir $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$.

Apskatīsim polinomu $P(x,y,z) = \prod_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i z + d_i)$. Tā kopējā pakāpe ir N. Šim polinomam piemīt īpašība, ka $P(x_0, y_0, z_0) = 0$ katriem $(x_0, y_0, z_0) \in S$, bet $P(0,0,0) \neq 0$. Pierādīsim, ka šāda polinoma pakāpe $\deg P \geq 3n$.

<u>Lemma</u>. Apskatīsim nenulles polinomu $P(x_1,...,x_k)$ ar k mainīgajiem. Ja $P = 0$ visos punktos $(x_1,...,x_k)$, kur $x_1,...,x_k \in \{0,1,...,n\}$ un $x_1 + ... + x_k > 0$, bet $P(0,0,...,0) \neq 0$, tad $P(x_1,...,x_k)$ pakāpe $\deg P \geq kn$.

<u>Lemmas pierādījums</u>. Lietosim indukciju pa k. Induktīvā bāze gadījumā $k = 0$, kad $P \neq 0$, izpildās. Skaidrības pēc apzīmēsim $y = x_k$.

Apzīmēsim P atlikumu, dalot ar $Q(y) = y(y-1)...(y-n)$, ar $R(x_1,...,x_{k-1},y)$. Polinoms $Q(y) = 0$ katram $y = 0,1,...,n$, tātad $P(x_1,...,x_{k-1},y) = R(x_1,...,x_{k-1},y)$ visiem $x_1,...,x_{k-1},y \in \{0,1,...,n\}$. Tādēļ arī R apmierina lemmas nosacījumus un tā pakāpe $\deg_y R \leq n$, jo $\deg Q = n+1$. Skaidri redzams, ka $\deg R \leq \deg P$ kā atlikuma pakāpe, salīdzinot ar dalāmā pakāpi, tādēļ pietiek pierādīt, ka $\deg R \geq nk$.

Izvērsīsim R pa y pakāpēm:

$$R(x_1,...,x_{k-1},y)=R_n(x_1,...,x_{k-1})y^n+R_{n-1}(x_1,...,x_{k-1})y^{n-1}+...+R_0(x_1,...,x_{k-1}).$$

Parādīsim, ka polinoms $R_n(x_1,...,x_{k-1})$ apmierina induktīvās hipotēzes nosacījumu. Jāizpildās abām īpašībām: I) $R_n(0,0,...,0)\neq 0$ un II) $R_n(x_1,...,x_{k-1})=0$ pie $x_1+...+x_{k-1}>0$.

I) Apskatīsim polinomu $T(y)=R(0,...,0,y)$, kam pakāpe $\leq n$. Šim polinomam ir n saknes $y=1,...,n$. No otras puses, tā kā $T(0)\neq 0$, tad $T(y)$ - nenulles polinoms. Un no tā izriet, ka $\deg T=n$ un tā koeficients pie augstākās pakāpes ir $R_n(0,0,...,0)\neq 0$. Gadījumā, kad $k=1$, iegūstam, ka koeficients R_n nav nulle.

II) Līdzīgi izvēlamies jebkurus skaitļus $a_1,...,a_{k-1}\in\{0,1,...,n\}$, kam $a_1+...+a_{k-1}>0$. Ievietojot $x_i=a_i$ polinomā $R(x_1,...,x_{k-1},y)$, iegūsim polinomu attiecībā pret y, kura vērtība ir nulle visos punktos $y=0,1,...,n$ un kura pakāpe ir $\leq n$. Tādēļ šis polinoms ir nulles polinoms, no kā izriet, ka $R_i(a_1,...,a_{k-1})=0$ visiem $i=0,1,...,n$. Starp citu, arī $R_n(a_1,...,a_{k-1})=0$.

Tātad polinoms $R_n(x_1,...,x_{k-1})$ apmierina induktīvās hipotēzes nosacījumus. Tātad $\deg R_n\geq(k-1)n$ un $\deg P\geq\deg R\geq\deg R_n+n\geq kn$.

Lemma ir pierādīta. Tā kā mūs interesējošais polinoms, kam $k=3$, $P(x,y,z)=\prod_{i=1}^{N}(a_ix+b_iy+c_iz+d_i)$ ir plakņu vienādojumu reizinājums un katram plaknes vienādojumam ir pirmā pakāpe, tad polinoma kopējā pakāpe ir plakņu skaits. Tātad pēc pierādītās lemmas mēs iegūstam, ka ir vismaz $3n$ plaknes.

AB. Atlases sacensības olimpiādei „Baltijas Ceļš 2006”

AB.A. Algebra

AB.A.1. Pārveidojam vienādības kreiso pusi:

$$\frac{2n-1}{2}-\frac{2n-2}{3}+\frac{2n-3}{4}-\ldots-\frac{2}{2n-1}+\frac{1}{2n}=$$

$$=\left(\frac{2n-1}{2}+1\right)-\left(\frac{2n-2}{3}+1\right)+\left(\frac{2n-3}{4}+1\right)-\ldots+\left(\frac{1}{2n}+1\right)-1=$$

$$=\left(\frac{2n-1+2}{2}\right)-\left(\frac{2n-2+3}{3}\right)+\left(\frac{2n-3+4}{4}\right)-...+\left(\frac{1+2n}{2n}\right)-1=$$

$$=\left(\frac{2n+1}{2}\right)-\left(\frac{2n+1}{3}\right)+\left(\frac{2n+1}{4}\right)-...+\left(\frac{2n+1}{2n}\right)-1=$$

$$=(2n+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{1}{2n}\right)-1.$$

Pārveidojam vienādības labo pusi:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{3}{n+2}+\frac{5}{n+3}+\ldots+\frac{2n-1}{2n}=$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-2\right)+\left(\frac{3}{n+2}-2\right)+\ldots+\left(\frac{2n-1}{2n}-2\right)+2n=$$

$$=\left(\frac{1-2n-2}{n+1}\right)+\left(\frac{3-2n-4}{n+2}\right)+\ldots+\left(\frac{2n-1-4n}{2n}\right)+2n=$$
$$=\left(\frac{-2n-1}{n+1}\right)+\left(\frac{-2n-1}{n+2}\right)+\ldots+\left(\frac{-2n-1}{2n}\right)+2n=$$
$$=2n-(2n+1)\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right].$$

Tātad jāpierāda, ka

$$(2n+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{1}{2n}\right)-1=2n-(2n+1)\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right].$$

Veicam pārveidojumus:

$$(2n+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{1}{2n}\right)-1-2n=-(2n+1)\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right]$$
$$(2n+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{1}{2n}\right)-(2n+1)=-(2n+1)\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right]$$
$$(2n+1)\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{1}{2n}\right)=-(2n+1)\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right]$$
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Pieskaitot iegūtajai vienādībai acīmredzami patiesu vienādību:

$$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n},$$

iegūstam:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Tātad esam pierādījuši doto vienādību.

AB.A.2. Pārbaudām, vai vienādība pareiza pie $n=3$. Izvēlamies $x_1=x_2=x_3=1$.

Kreisajā pusē iegūstam $(1+1+1)^2=3^2=9$, bet labajā pusē iegūstam $4(1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1)=4\cdot3=12$. Tā kā 9 nav mazāks kā 12, tad dotā nevienādība nav patiesa **visām** reālām x_1, x_2, x_3 vērtībām.

Pārbaudām, vai vienādība pareiza pie $n=4$. Pārveidojam nevienādību par: $(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)\geq 0$.

Tā kā $(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)=(x_1-x_2+x_3-x_4)^2$, tad mums atliek pārliecināties, vai $(x_1-x_2+x_3-x_4)^2\geq 0$. Tā kā neviens kvadrāts nav negatīvs, tad dotā nevienādība ir patiesa **visām** reālām x_1, x_2, x_3, x_4 vērtībām.

Pārbaudām, vai nevienādība pareiza pie $n\geq 5$. Izvēlamies $x_1=x_2=1$; $x_3=0$; $x_4=-2$; $x_5\ldots=x_n=0$.

Kreisajā pusē iegūstam $(1+1+0+(-2)+0+\ldots+0)^2=0$, bet labajā pusē iegūstam $4(1\cdot1+1\cdot0+0\cdot(-2)+(-2)\cdot0+0\cdot0+\ldots+0\cdot0+0\cdot1)=4\cdot1=4$. Tā kā 0 nav mazāks kā 4, tad dotā nevienādība nav patiesa **visām** reālām $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_n$ vērtībām.

Tātad nevienādība ir patiesa visām reālām $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geq 3$) vērtībām tikai tad, ja $n = 4$.

AB.A.3. Mēs varam pieņemt, ka $x \geq y$.

Tā kā $x = (y+z)^3$ un $y = (z+x)^3$, tad $(y+z)^3 \geq (z+x)^3$. Tātad $y + z \geq z + x$.

Esam ieguvuši, ka $y \geq x$. Tā kā pieņēmām, ka $x \geq y$, tad $x = y$.

Līdzīgi iegūstam, ka $x = z$ vai $y = z$. Tātad $x = y = z$.

No pirmā vienādojuma $(x+y)^3 = z$ un nupat iegūtās vienādības $x = y = z$ iegūstam, ka $(x+x)^3 = x$, tātad $8x^3 = x$.

Atrisinot šo vienādojumu, iegūstam 3 atrisinājumus:

$$(0; 0; 0),\ \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \text{ un } \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

AB.A.4. Pārveidojam doto nevienādību:

$$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + a + b + c - ab - bc - ca \geq 6$$

Apskatām nevienādības kreiso pusi:

$$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + a + b + c - ab - bc - ca =$$
$$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - (ab + ac + bc) + (a + b + c) =$$
$$= \left(a^2 + b^2\right) + \left(a^2 + c^2\right) + \left(b^2 + c^2\right) - (ab + ac + bc) + (a + b + c) \geq$$
$$\geq (2ab + 2ac + 2bc) - (ab + ac + bc) + (a + b + c) = ab + ac + bc + a + b + c$$

(trīs reizes lietojam sakarību $x^2 + y^2 \geq 2xy$).

Tā kā $abc = 1$, tad $ab = \frac{1}{c}$, $ac = \frac{1}{b}$, $bc = \frac{1}{a}$, tāpēc iegūstam, ka

$$ab + ac + bc + a + b + c = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + a + b + c = \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right).$$

No sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko iegūstam, ka

$$\left(\mathrm{a} + \frac{1}{\mathrm{a}}\right) + \left(\mathrm{b} + \frac{1}{\mathrm{b}}\right) + \left(\mathrm{c} + \frac{1}{\mathrm{c}}\right) \geq 2\sqrt{\mathrm{a} \cdot \frac{1}{\mathrm{a}}} + 2\sqrt{\mathrm{b} \cdot \frac{1}{\mathrm{b}}} + 2\sqrt{\mathrm{c} \cdot \frac{1}{\mathrm{c}}} = 6.$$

Esam pierādījuši doto nevienādību.

AB.A.5. Apskatīsim $f(m) + f(n)$.

1) Ievērojam, ka $f(m) + f(n) = n + f(m) - n + f(n)$, tātad ir patiesa arī vienādība:

$$f\left(f(m) + f(n)\right) = f\left((n + f(m)) - n + f(n)\right)$$

2) Apzīmējam $n + f(m) = x$. Izmantojam doto sakarību, kur m vietā ievietojam x. Tādā gadījumā $f(x - n + f(n)) = f(x) + f(n)$, t.i.,

$$f\left((n + f(m)) - n + f(n)\right) = f\left(n + f(m)\right) + f(n)$$
$$f\left((n + f(m)) - n + f(n)\right) = f\left((n + m) - m + f(m)\right) + f(n).$$

Tātad $f(m) + f(n) = f\left((n + m) - m + f(m)\right) + f(n)$.

2) Izmantojam doto sakarību $f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n)$, m vietā ievietojot $n + m$, bet n vietā ievietojot m:

$$f\left((n + m) - m + f(m)\right) = f(n + m) + f(m)$$
$$f\left((n + m) - m + f(m)\right) + f(n) = f(n + m) + f(m) + f(n).$$

Tātad $f\left(f(m) + f(n)\right) = f(n + m) + f(m) + f(n)$

3) Tāpat saskaņā ar doto vienādību $f(m)+f(n)$ ir funkcijas f vērtība kādam argumentam $t=m-n+f(n)$; tāpēc $f\left(f(\mathrm{m})+f(\mathrm{n})\right)=f\left(f(t)\right)$.

4) Izmantojam doto sakarību $f(m-n+f(n))=f(m)+f(n)$: ja $m=n$, tad iegūstam, ka

$$f(n-n+f(n))=f(n)+f(n), \text{ tātad } f\left(f(n)\right)=2f(n).$$

$f(n)$ vietā ievietojam $f(t)=f(m)+f(n)$: $f\left(f(t)\right)=2f(t)=2\left(f(m)+f(n)\right)$..

Tātad $f\left(f(m)+f(n)\right)=2\left(f(m)+f(n)\right)$

5) Tā kā $f\left(f(m)+f(n)\right)=f(n+m)+f(m)+f(n)$ (no 2.) un

$f\left(f(m)+f(n)\right)=2\left(f(m)+f(n)\right)$ (no 4.), tad

$f(n+m)+f(m)+f(n)=2\left(f(m)+f(n)\right)$. Tātad $f(n+m)=f(m)+f(n)$.

6) Izmantojam šo sakarību: ja $m=n$, tad iegūstam, ka $f(2n)=2f(n)$.

7) No (5) un (6) ar matemātisko indukciju seko, ka veselam k $f(k\cdot n)=k\cdot f(n)$.

8) Apzīmējot $f(n)=c$, no (7) seko, $f(n)=c\cdot n$.

No $f(2n)=2f(n)$ (no 6.) seko $c=0$ vai $c=2$.

Tātad $f(n)\equiv 0$ vai arī $f(n)=2\cdot n$.

AB.K. Kombinatorika

AB.K.1. Atzīmēsim uz riņķa līnijas regulāra 198 – stūra virsotnes. Tās sadala riņķa līniju 198 vienādos lociņos. Dažus dalījuma punktus iekrāsosim tā, ka attālumi starp blakus esošajām iekrāsotajām virsotnēm pa riņķa līniju, izteikti lociņos, atbilst santīmu daudzumiem Jāņa monētās. Pavisam ir 100 iekrāsotas virsotnes. Tā kā pavisam ir 198:2=99 diametri, tad 100 iekrāsotās virsotnes izvietotas uz 99 diametriem. No tā secinām, ka eksistē divas iekrāsotas virsotnes, kas atrodas uz viena un tā paša diametra, t.i., dala riņķa līniju **uz pusēm**. Atbilstoši šim dalījumam Jānis arī var sadalīt savu naudu.

AB.K.2.

a_1	b_1	c_1	d_1	e_1
a_2	b_2	c_2	d_2	e_2
a_3	b_3	c_3	d_3	e_3
...	...	...	...	...
a_{37}	b_{37}	c_{37}	d_{37}	e_{37}

A64. zīm.

Apzīmēsim skaitļus, kā parādīts zīmējumā, un apskatīsim virkni

$$e_1, d_1, c_1, b_1, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{36}, a_{37}.$$

Tajā ir 41 skaitlis. Tā kā katrā rindiņā skaitļi no kreisās uz labo pusi izvietoti nedilstošā kārtībā, tad virknes segments $(e_1;\ldots;a_1)$ ir neaugošs. Apskatīsim atlikušos skaitļus virknē. Tā kā katrā „diagonāllīnijā", kas iet „pa labi un uz leju", visi ierakstītie skaitļi ir vienādi, tad $a_k=b_{k+1},(k=1;2;\ldots;36)$, taču $b_{k+1}\geq a_{k+1},(k=1;2;\ldots;36)$, tāpēc arī virknes segments $(a_1;\ldots;a_{37})$ ir neaugošs. Tātad visa **šī virkne ir neaugoša.**

Apskatītās virknes skaitļiem ir tikai 10 dažādas iespējamas vērtības. Tā kā $41>4\cdot 10$, tad **atradīsies 5 no tiem, kas ir vienādi.** Tā kā virkne ir neaugoša, tad **tiem jāatrodas pēc kārtas.** Ja pēdējais no šiem 5 skaitļiem ir a_k, tad k-tajā rindā visi skaitļi ir vienādi. Tiešām:

- Ja pēdējais no šiem skaitļiem ir a_1, tad pirmajā rindā visi skaitļi ir vienādi.
- Ja $d_1 = c_1 = b_1 = a_1 = a_2$, redzam, ka $b_2 = a_1$, $c_2 = b_1$, $d_2 = c_1$, $e_2 = d_1$, jo atrodas uz vienas "diagonāllīnijas". Tātad $e_2 = d_2 = c_2 = b_2 = a_2$.
- Ja $c_1 = b_1 = a_1 = a_2 = a_3$, redzam, ka $b_3 = a_2$, $c_3 = b_2 = a_1$, $d_3 = c_2 = b_1$, $e_3 = d_2 = c_1$, jo atrodas uz vienas "diagonāllīnijas". Tātad $e_3 = d_3 = c_3 = b_3 = a_3$.

Līdzīgi varam apskatīt pārējos gadījumus, kad pēdējais no 5 vienādajiem skaitiem ir a_4, a_5,..., a_{36} vai a_{37}.

AB.K.3. Jā, var.

Parādīsim, kā Andris var panākt, lai figūriņa pārbīdītos **pa labi** par attālumu $\frac{1}{512}$ no sākotnējās vietas.

Andris vispirms nosauc skaitli $\frac{1}{512}$. Var būt divi gadījumi:

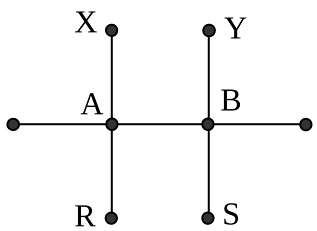
- Ja Maija pārbīda figūriņu pa labi, viss kārtībā.
- Ja Maija pārbīda figūriņu pa kreisi, Andris nosauc skaitli $\frac{1}{256}$, jo $\left(-\frac{1}{512}\right) + \frac{1}{256} = \frac{1}{512}$. Atkal iespējami divi gadījumi:
  - Ja Maija pārbīda figūriņu pa labi, tad viss kārtībā.
  - Ja Mija pārbīda figūriņu pa kreisi, tad Andris kā nākošo nosauc skaitli $\frac{1}{128}$, jo $\left(-\frac{1}{512}\right) + \left(-\frac{1}{256}\right) + \frac{1}{128} = \frac{1}{512}$, utt.

Vēlākais 10. gājienā Maija pārbīdīs figūriņu pa labi, un tad Andris būs sasniedzis savu mērķi.

Atkārtojot to $512 \cdot 2006$ reizes, figūriņa būs pārbīdīta tieši par attālumu 2006 pa labi.

AB.K.4. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. Varam uzskatīt, ka apskatāmais režģis iezīmēts bezgalīgā rūtiņu lapā, un mēs šajā lapā krāsojam figūriņas, kas vienādas ar zīmējumā redzamo.



A65. zīm.

Ja šāda figūriņa nokrāsota, tad, nokrāsojot nogriezni XY, nāksies nokrāsot otrreiz XA vai/un YB; līdzīgi, nokrāsojot RS, nāksies nokrāsot otrreiz RA vai/un SB To pārbauda, izdarot nelielu variantu pārlasi.

Katra figūriņa, ko nokrāsojam, sastāv no 7 nogriežņiem. Tiem **figūriņas** nogriežņiem, kas ir 2006×2006 režģa nogriežņi, piešķiram vērtības:

- 1, ja šis nogrieznis nepārklājas ar citām figūriņām,
- $\frac{1}{2}$, ja pārklājas ar citām figūriņām.

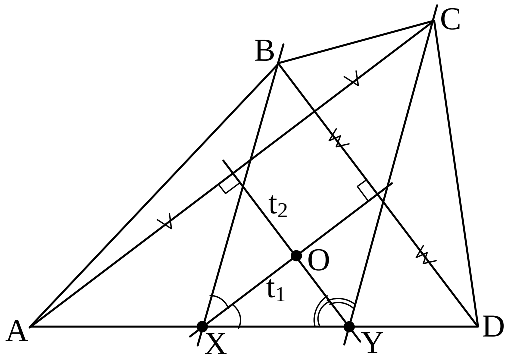
Tātad vienas figūriņas nogriežņu kopējā vērtība ir augstākais $5+2\cdot\frac{1}{2}=6$, bet visām figūriņām, kas nokrāsotas $1\,300\,000$ gājienos, tā nepārsniegtu $6\cdot 1\,300\,000=7\,800\,000$.

Visā režģī ir $2\cdot 2006\cdot 2007$ nogriežņi, tātad, ja tie visi tiktu nokrāsoti, tad figūriņu vērtību summai būtu jābūt $\geq 2\cdot 2006\cdot 2007$ (vērtība $1\cdot 1$ vienreiz pārklātam nogrieznim un vērtība $\geq 2\cdot\frac{1}{2}$ vairākkārt pārklātam nogrieznim). Tā kā $2\cdot 2006\cdot 2007>8\,000\,000>7\,800\,000$, prasītā pārklāšana nav iespējama.

AB.K.5. Skatīt atrisinājumu S.11.5.

AB.Ģ. Ģeometrija

AB.Ģ.1. Apskatām ΔBXD. Vidusperpendikuls t_1 tajā ir gan augstums, gan mediāna, tātad t_1 ir arī bisektrise. No tā seko, ka $\angle BXO = \angle DXO$. Līdzīgi apskatām arī ΔAYC un secinām, ka $\angle AYO = \angle CYO$.

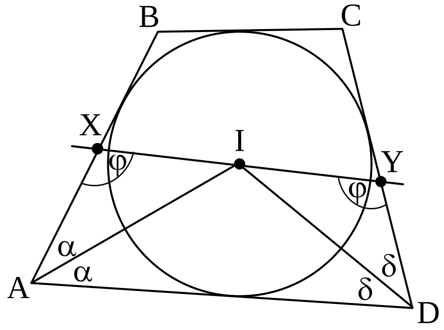


A66. zīm.

No tā, ka $BX \parallel CY$, seko, ka $\angle BXY + \angle CYX = 180^o$, jo iekšējo vienpusleņķu summa ir 180^0. Tātad $\angle OXY + \angle OYX = 90^o \Rightarrow \angle XOY = 180^0 - 90^o = 90^o$.

Tātad abi diagonāļu vidusperpendikuli krustojoties veido 90^o leņķi, no kā seko, ka arī pašas diagonāles krustojoties veido 90^o leņķi, kas bija jāpierāda.

AB.Ģ.2. Novelkam nogriežņus IA un ID. Ievērojam, ka $\angle XAI = \angle DAI \overset{\text{apz}}{=} \alpha$ un $\angle YDI = \angle ADI \overset{\text{apz}}{=} \delta$. Tā kā $2\alpha+2\delta+2\varphi=360°$, tad $\boldsymbol{\alpha+\delta+\varphi=180°}$.



A67. zīm.

Apskatām ΔYID: $\angle YID = 180^0 - \varphi - \delta = \alpha$, līdzīgi iegūstam, ka $\angle XIA = \delta$. Tāpēc $\Delta AXI \sim \Delta IYD$ ($\ell\ell\ell$), tātad attiecīgās malas proporcionālas: $AX{:}IY = XI{:}YD$, tātad $AX\cdot YD = XI\cdot IY$.

Līdzīgi iegūstam, ka $BX\cdot YC = XI\cdot YI$.

Tātad esam ieguvuši, ka $AX \cdot YD = BX \cdot YC$, tāpēc $\frac{AX}{BX} = \frac{YC}{YD}$, kas arī bija jāpierāda.

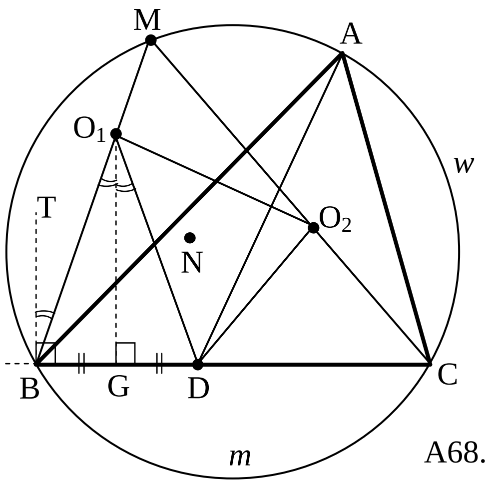
AB.Ģ.3. Ja visi punkti ir uz vienas taisnes, ir vismaz 10^6-1 dažādi attālumi. Tiešām, ja apzīmējam punktus ar X_1, X_2, X_3, ..., X_{100000}, tad dažādie attālumi ir: X_1X_2, X_1X_3, ..., $X_1X_{1000000}$.

Apskatām gadījumu, kad trīs punkti A, B, C nav uz vienas taisnes. Apskatām ceturto punktu X. Attālumus no X līdz A, B un C apzīmējam ar attālumu kortežu $(XA; XB; XC)$. Maksimums ir divi tādi punkti, kas veido attālumu kortežu $(XA; XB; XC)$. Tiešām, ir iespējami divi gadījumi:

- A, B, C un X atrodas vienā plaknē: tad ir atrodams tikai viens šāds punkts;
- X neatrodas plaknē, ko veido A, B un C: tad varam atrast otru punktu, kas veido attālumu kortežu $(XA; XB; XC)$. Šis punkts ir simetrisks punktam X attiecībā pret plakni, ko veido punkti A, B un C.

Apskatām attālumu kortežu katram no pārējiem 999 997 punktiem. Ja nebūtu 79 dažādu attālumu, tad būtu ne vairāk kā 78 dažādu attālumu, tātad šādu **dažādu** kortežu nebūtu vairāk par $78^3 = 474\,552$. Tā kā $2 \cdot 475\,552 = 951\,104 < 999\,997$, tad ir vairāk kā 78 dažādi attālumi un var izvēlēties vismaz 79 dažāda garuma nogriežņus, kas arī bija jāpierāda.

AB.Ģ.4.



A68. zīm.

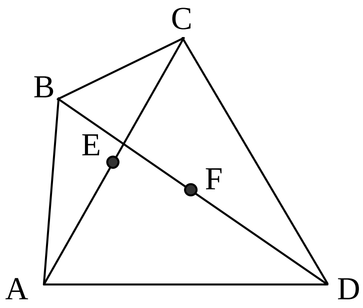
Ievērojam, ka $\angle TBO_1 = \angle GO_1B$ (skat. A68. zīm.) kā iekšējie šķērsleņķi, tātad $\angle O_1BD = 90° - \angle TBO_1 = 90° - \frac{1}{2}\angle BO_1D$. Tā kā $\angle BO_1D$ un $\angle BAD$ ir leņķi, kas balstās uz vienu loku riņķa līnijā ar centru O_1, tad $\angle O_1BD = 90° - \angle BAD$.

Līdzīgi $\angle O_2CD = 90° - \angle CAD$, tad

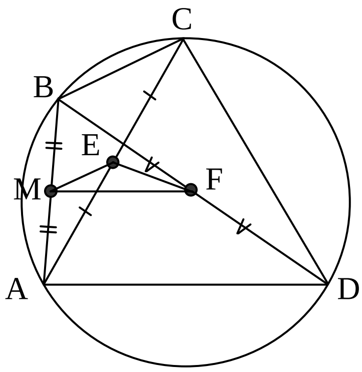
$$\angle BMC = 180° - \angle O_1BD - \angle O_2CD = 180° - (90° - \angle BAD) - (90° - \angle CAD) =$$
$$= \angle BAD + \angle CAD = \angle BAC = 60°,$$

tāpēc M tāpat kā A atrodas uz w (skat. A68. zīm.), jo ir vienādu leņķu virsotnes, kas balstās uz vienu un to pašu loku. Tālāk $\angle O_1DO_2 = 180° - \angle O_1DB - \angle O_2DC = 180° - \angle O_1BD - \angle O_2CD =$ $= \angle BMC = \angle BAC = 60°$ Tāpēc $\angle O_1NO_2 = 2\angle O_1DO_2 = 120°$. Tā kā $\angle O_1MO_2 + \angle O_1NO_2 = 60° + 120° = 180°$, tad M, O_1, N, O_2 atrodas uz vienas riņķa līnijas. **Šajā** riņķa līnijā NO_1 un NO_2 ir vienādas hordas (kā rādiusi), tāpēc $\angle O_1MN = \angle O_2MN (=30°)$. Tāpēc stars MN ir $\angle BMC$ bisektrise, kas iet caur loka $\cup BmC$ viduspunktu – tātad caur fiksētu punktu, kas nav atkarīgs no D izvēles.

AB.Ģ.5.



A69. zīm.



A70. zīm.

Lemma 1 (Eilera formula). Ja izliektā četrstūrī $ABCD$ punkti E un F ir diagonāļu AC un BD viduspunkti, tad $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$ (A69. zīm.)

(Lemmu pierāda ar skalārā reizinājuma palīdzību vai vairākkārt izmantojot sakarību starp paralelograma malām un diagonālēm).

Lemma 2 (Ptolomeja teorēma). Ja četrstūris $ABCD$ ievilkts riņķa līnijā, tad $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

Izmantojot Ptolomeja teorēmu, pārveidojam Eilera formulu:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$$

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - 2AC \cdot BD = AC^2 + BD^2 + 4EF^2 - 2AC \cdot BD$$

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - 2(AB \cdot CD + BC \cdot AD) = AC^2 - 2AC \cdot BD + BD^2 + 4EF^2$$

$$(AB^2 - 2AB \cdot CD + CD^2) + (AD^2 - 2BC \cdot AD + BC^2) = AC^2 - 2AC \cdot BD + BD^2 + 4EF^2$$

$$(AB - CD)^2 + (AD - BC)^2 = (AC - BD)^2 + 4EF^2$$

Ja izpildītos nevienādība $4EF^2 \geq \left(AD - BC\right)^2$, tad patiesa būtu arī nevienādība $(AC - BD)^2 \leq (AB - CD)^2$ jeb $\left|AC - BD\right| \leq \left|AB - CD\right|$. Tātad jāpierāda, ka $4EF^2 \geq \left(AD - BC\right)^2$. jeb $2EF \geq \left|AD - BC\right|$, jeb $\boldsymbol{EF \geq \left|\frac{AD}{2} - \frac{BC}{2}\right|}$. Bet šī ir trijstūra nevienādība trijstūrim MEF (A70. zīm), tātad esam pierādījuši, ka $\left|AC - BD\right| \leq \left|AB - CD\right|$.

AB.S. Skaitļu teorija

AB.S.1. Pārveidojam doto vienādību par

$$ab - a + 3b = n \qquad (1)$$

Tā kā vienādības labā puse dalās ar b, tad arī kreisajai pusei jādalās ar b. Kreisajā pusē divi saskaitāmie dalās ar b, tāpēc arī trešajam saskaitāmajam jādalās ar b, lai visu trīs saskaitāmo summa dalītos ar b. Tātad (-a) dalās ar b. Tā kā $a \neq b$ un gan a, gan b ir naturāli skaitļi, tad vai nu $a = 2b$, vai $a = 3b$, vai $a = 4b$, vai … .

Tāpat no (1) seko arī, ka $3b$ dalās ar a, tātad $a \leq 3b$. Tāpēc no iepriekš minētajām iespējām der tikai $\mathrm{a} = 3\mathrm{b}$.

Tad $3b \cdot b - 3b + 3b = n \Rightarrow 3b^2 = n \Rightarrow 3n = 9b^2 = \left(3b\right)^2 \Rightarrow 3n = a^2$. Tā kā a ir naturāls skaitlis, tad vajadzīgais ir pierādīts.

AB.S.2. Doto skaitli var uzrakstīt kā

$$\underbrace{a0a0\ldots a0a}_{2003\,\text{cipari}}\ \underbrace{00\ldots0}_{2002\,\text{nulles}} - a\cdot10^{2002} + \underbrace{c0c0\ldots c0c}_{2003\,\text{cipari}} - c\cdot10^{2002} + b\cdot10^{2002} =$$

$$= \underbrace{a0a0\ldots a0a}_{2003\,\text{cipari}}\ \underbrace{00\ldots0}_{2002\,\text{nulles}} + \underbrace{c0c0\ldots c0c}_{2003\,\text{cipari}} + (b-a-c)\cdot10^{2002} \qquad (*).$$

Apskatām skaitli $\overline{x0x0x}$, kur x - cipars. To varam pierakstīt arī kā $x\cdot10101$.

Tā kā 10101 dalās ar 37, tad arī $\overline{x0x0x} = x\cdot10101$ dalās ar 37. Ievērojam, ka tādā gadījumā arī skaitlis $\underbrace{x0x0\ldots x0x}_{2003\,\text{cipari}} = \underbrace{x0x0x0\,x0x0x0\ldots x0x0x0}_{333\,\text{grupas}}x0x0x$ dalās ar 37.

Apskatām izteiksmi $(*)$. Uzdevumā dots, ka šī izteiksme dalās ar 37. Tā kā pirmais saskaitāmais dalās ar 37, jo $\underbrace{a0a0\ldots a0a}_{2003\,\text{cipari}}$ dalās ar 37, un otrais saskaitāmais dalās ar 37, jo $\underbrace{c0c0\ldots c0c}_{2003\,\text{cipari}}$ dalās ar 37, tad arī trešajam saskaitāmajam $(b-a-c)\cdot10^{2002}$ jādalās ar 37. Tā kā $\text{LKD}(10,37)=1$, tad $b-a-c$ dalās ar 37. Ievērojam, ka $-18 \le b-a-c \le 9$. Tā kā vienīgais skaitlis intervālā [-18;9], kas dalās ar 37, ir 0, tad $b-a-c=0$ jeb $b=a+c$, kas arī bija jāpierāda.

AB.S.3. Pieņemsim no pretējā, ka d ir tāds skaitlis, par kādu runāts uzdevuma nosacījumos.

Izpildās otrā prasība: xy dalās ar d. Tātad d varam izteikt: $d = d_x\cdot d_y$, kur x dalās ar d_x un y dalās ar d_y.

Dots, ka x atrodas intervālā (n^2, n^2+n) un pēc trešās prasības arī d atrodas šajā intervālā. No pirmās prasības redzam, ka $d \ne x$ un secinām, ka intervālā (n^2, n^2+n) ir divi skaitļi (x un d), kas dalās ar d_x. Tātad d un x atšķiras vismaz par d_x, bet mazāk nekā par n (no trešā nosacījuma); tāpēc $d_x < n$. Līdzīgi iegūstam, ka $d_y < n$.

Tā kā $d = d_x\cdot d_y$, kur $d_x < n$ un $d_y < n$, tad $d < n\cdot n = n^2$ - pretruna, jo no trešās prasības seko, ka $d > n^2$. Tātad neeksistē tāds naturāls skaitlis, kuram izpildās visas trīs uzdevumā dotās prasības.

AB.S.4. <u>Atbilde:</u> $m = n = 1$.

<u>Risinājums.</u> Pārbaude acīmredzama. Ja $n=1$, tad $13m+1=14 \Rightarrow m=1$.

Ja $n>1$, tad kreisā puse dalās ar 4, tāpēc $13\cdot m^n + 1 \equiv_4 0$ Tā kā $13\cdot m^n + 1 = 12m^n + (m^n+1)$ un $12m^n$ dalās ar 4, tad $m^n \equiv_4 -1 \Rightarrow \boxed{m^n \equiv_4 3}$.

Ja m ir pāra skaitlis, tad $m^n \equiv_4 0$ vai $m^n \equiv_4 2$. Rodas pretruna ar nupat pierādīto, tāpēc m ir nepāra skaitlis. Tādā gadījumā m varam pierakstīt kā $2k+1$.

Pieņemam, ka n – pāra skaitlis. Apzīmējam to ar $2p$. Tādā gadījumā $m^n = (2k+1)^{2p} = \left((2k+1)^2\right)^p = (4k^2+4k+1)^p \equiv_4 1$. Pretruna ar iepriekš pierādīto, tātad arī n ir nepāra skaitlis.

Tā kā n - nepāra, tad $14^n = (12+2)^n \equiv_3 2 \Rightarrow 13m^n + 1 \equiv_3 2$. Bet tā kā $13m^n + 1 = 12m^n + (m^n + 1)$ un $12m^n$ dalās ar 3, tad $m^n + 1 \equiv_3 2$. Tādā gadījumā $\boxed{m^n \equiv_3 1}$.

No dotās vienādības seko, ka $1 \le m \le 14$. Apskatām m iespējamās vērtības. Tā kā m – nepāra skaitlis, tad m iespējamās vērtības ir 1, 3, 5, 7, 9, 11 un 13.

- No $m^n \equiv_3 1$ seko, ka m vērtība nevar būt 3 un 9.
- Tā kā n – nepāra skaitlis, tad 14^n pēdējais cipars būs 4 visām n vērtībām. Apskatām dotā vienādojuma labo pusi: ja $m = 5$, tad m^n pēdējais cipars būs 5 visām n vērtībām. Tātad vienādojuma labās puses pēdējais cipars būs $5+1=6$. Tā kā vienādojuma kreisās un labās puses pēdējie cipari nesakrīt, tad m nevar būt 5.
- Ja $m = 7$, tad $13 \cdot m^n$ dalīsies ar 7, bet tādā gadījumā $13 \cdot m^n + 1$ nedalīsies ar 7. Redzam, ka vienādojuma kreisā puse dalās ar 7, tātad m vērtība nevar būt 7.
- Ja $m = 11$, tad $m^n = 11^n \equiv_3 2^n \equiv_3 2$ - pretruna ar iepriekšējo. Tātad $m \neq 11$
- Ja $m = 13$ - apskatām pēdējos ciparus skaitlim, kas atrodas vienādības labajā pusē: n ir nepāra, tāpēc 13^n pēdējais cipars ir 3 vai 7, savukārt 13^{n+1} pēdējais cipars būs 9 vai 1, tātad skaitlim $13^{n+1} + 1$ pēdējais cipars būs 0 vai 2 visām n vērtībām. Tā kā vienādojuma kreisajā pusē esošajam skaitlim pēdējais cipars ir 4, tad m nevar būt 13.
- Tāpēc $m = 1$, bet tādā gadījumā $13 \cdot 1^n + 1 = 13 + 1 = 14$, tātad arī $14^n = 1$, no kurienes seko, ka $n = 1$ - pretruna, jo apskatām gadījumu $n > 1$.

Tātad šim vienādojumam ir viens vienīgs atrisinājums: $m = n = 1$.

AB.S.5. Tā kā p - pirmskaitlis, tad no $n^3 - 1 \vdots p$ un $n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$ seko, ka vai nu $n - 1 \vdots p$, vai $n^2 + n + 1 \vdots p$.

Pieņemsim, ka $n - 1 \vdots p$. Tad $n \ge p + 1 > p - 1$. Redzam, ka n lielāks nekā p-1, tātad $p - 1$ nevar dalīties ar n. Esam ieguvuši pretrunu ar doto, tātad pieņēmums ir nepareizs un n-1 nedalās ar p.

Esam ieguvuši, ka $n^2 + n + 1 \vdots p$. Tādā gadījumā $n^2 + n + 1 = pt, t \in N$. Ievietojam $p = nk + 1$, $k \in N$, un iegūstam:

$$n^2 + n + 1 = (nk + 1)t$$

$$n^2 + n + 1 = nkt + t$$

Kreisā puse dod atlikumu 1, dalot ar n, tātad arī labajai pusei jādod atlikums 1, dalot ar n. Tā kā nkt dalās ar n, tad t dod atlikumu 1, dalot ar n. Tāpēc $t = n \cdot m + 1$, kur $m \ge 0$, $m \in Z$.

Esam ieguvuši:

$$n^2 + n + 1 = (nk + 1)(nm + 1)$$

Ja $m > 0$, tad labā puse lielāka par kreiso; tāpēc $m = 0$. Tad $t = n \cdot 0 + 1 = 1$, tātad $n^2 + n + 1 = p \cdot 1 = p$. Tāpēc $4p - 3 = 4 \cdot (n^2 + n + 1) - 3 = 4n^2 + 4n + 1 = = (2n + 1)^2$. Tā kā n ir naturāls skaitlis, tad arī $2n + 1$ ir naturāls skaitlis. Tātad esam pierādījuši, ka $4p - 3$ ir naturāla skaitļa kvadrāts.

BW. 17. matemātikas komandu olimpiāde „Baltijas Ceļš 2006”

BW.A. Algebra

BW.A.1. Virknes sākums varētu būt 1; 2; 3; 1; 1; -2; 0. Katrai virknei pirmie seši elementi ir a_1; a_2; a_3; $a_2 - a_1$; $a_3 - a_2$; $a_2 - a_1 - a_3$. Redzam, ka $a_1 + a_5 + a_6 = a_1 + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1 - a_3) = 0$. Tātad elementi a_1, a_5, a_6 nevar būt pozitīvi vienlaicīgi.

BW.A.2. Ērtības labad apzīmēsim $m = -2$ un $M = 17$. Tā kā $m \le a_i \le M$, tad izpildās nevienādība $\left(a_i - \frac{m+M}{2}\right)^2 \le \left(\frac{M-m}{2}\right)^2$. No tā iegūstam

$$\sum_{i=1}^{59}\left(a_i - \frac{m+M}{2}\right)^2 = \sum_i a_i^2 + 59\cdot\left(\frac{m+M}{2}\right)^2 - (m+M)\sum_i a_i \le 59\cdot\left(\frac{M-m}{2}\right)^2.$$

Tātad $\sum_i a_i^2 \le 59\cdot\left(\left(\frac{m-M}{2}\right)^2 - \left(\frac{m+M}{2}\right)^2\right) = -59\cdot m\cdot M = 2006$.

BW.A.3. Pierādīsim, ka visi polinomi var tikt izteikti kā kubu summas, izmantojot indukciju attiecībā pret polinoma $P(x)$ pakāpi. Protams, ka visi konstantie polinomi var tikt izteikti kā kubu summas. Induktīvās pārejas solī mums jāpierāda, ka katram n-tās pakāpes polinomam $P(x)$ eksistē tādi polinomi $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, ..., $Q_r(x)$, ka polinoma $P(x) - (Q_1(x))^3 - (Q_2(x))^3 - \ldots - (Q_r(x))^3$ pakāpe ir ne lielāka par n-1. Pieņemsim, ka polinomā $P(x)$ koeficients pie x^n ir c. Apskatīsim trīs gadījumus. Ja $n = 3k$, mēs izvēlamies $r = 1$, $Q_1(x) = \sqrt[3]{c}x^k$. Ja $n = 3k+1$, tad izvēlamies $r = 3$, $Q_1(x) = \sqrt[3]{\frac{c}{6}}x^k(x-1)$, $Q_2(x) = \sqrt[3]{\frac{c}{6}}x^k(x+1)$, $Q_3(x) = -\sqrt[3]{\frac{c}{3}}x^{k+1}$. Un, ja $n = 3k+2$, mēs izvēlamies $r = 2$, $Q_1(x) = \sqrt[3]{\frac{c}{3}}x^k(x+1)$, $Q_2(x) = -\sqrt[3]{\frac{c}{3}}x^{k+1}$. Tātad jebkuru polinomu ir iespējams izteikt kā kubu summu.

BW.A.4. <u>Atbilde</u>: 8. <u>Risinājums</u>. Ja izvēlamies $a = b = c = 2$, $d = e = f = 0$, tad dotās izteiksmes vērtība ir 8. Pierādīsim, ka tā ir lielākā iespējamā vērtība. Izmantojot aritmētiskā vidējā un ģeometriskā vidējā nevienādību, iegūstam

$$8 = \left(\frac{(a+d)+(b+e)+(c+f)}{3}\right)^3 \ge (a+d)(b+e)(c+f) =$$

$= (abc + bcd + cde + def + efa + fab) + (ace + bdf)$, no kā mēs redzam, ka $abc + bcd + cde + def + efa + fab \le 8$ un vislielākā vērtība tiek sasniegta, kad $a + d = b + e = c + f$ (un to vērtība vienāda ar 2, jo $a + b + c + d + e + f = 6$) un $ace = bdf = 0$. To var pierakstīt arī formā $(a,b,c,d,e,f) = (a,b,c,2-a,2-b,2-c)$ ar $ac(2-b) = b(2-a)(2-c) = 0$. No šī seko, ka (a,b,c) jābūt kādā no formām $(0,0,t)$, $(0,t,2)$, $(t,2,2)$, $(2,2,t)$, $(2,t,0)$ vai $(t,0,0)$. Līdz ar to vislielākā vērtība tiek sasniegta kortežiem $(a,b,c,d,e,f) = (0,0,t,2,2,2-t)$, kur $0 \le t \le 2$, un tiem kortežiem, kurus iegūst no minētajiem, cikliski pārkārtojot elementus.

BW.A.5. Atbilde: 1. apgalvojums seko no aksiomām, 2. neseko. Risinājums. Ja apzīmējam $x*y = z$, tad no aksiomas b) iegūstam $z*y = x$. No aksiomas a) seko $z*(z*y) = y$, tātad no aksiomas a) un $z*y = x$ iegūstam $z*x = y$. Līdzīgi no aksiomas b) seko $(z*x)*x = z$ un, izmantojot $z*x = y$, iegūstam $y*x = z$. Atceramies sākotnējo apzīmējumu un redzam, ka $x*y = z = y*x$. Esam ieguvuši 1. apgalvojumu, izmantojot aksiomas. Pretpiemērs 2. apgalvojumam ir funkcija $x*y = -(x+y)$.

BW.K. Kombinatorika

BW.K.1. Atbilde: 32.

Risinājums. Piekārtosim katram skaitlim a_i tā ciparu kopu M_i. No 1., 2. un 3. īpašības redzam, ka skaitli viennozīmīgi nosaka tam piekārtotā $\{1, 2, ..., 6\}$ apakškopa. No 4. īpašības zinām, ka katras divas kopas pārklājas. Sadalām visas kopas $\{1, 2, ..., 6\}$ 64 apakškopas 32 pāros tā, ka katrs pāris kopā veido pilno kopu (X, $\{1, 2, ..., 6\} - X$). Acīmredzami, katrā pārī tikai viena kopa var būt skaitlim atbilstošā kopa M_i, jo šīs divas kopas nepārklājas. Tātad ir ne vairāk kā 32 naturāli skaitļi ar meklētajām īpašībām. Šie 32 varētu būt tie, kurus veido 22 kopas ar vismaz četriem elementiem, un 10 kopas, kuras satur „1" un kurās ir trīs elementi. Tātad 32 ir lielākais skaits naturālu skaitļu ar prasītajām īpašībām.

BW.K.2. Apzīmēsim ar x to fotogrāfiju skaitu, kurās redzami trīs cilvēki (tātad arī 3 pāri), bet ar y – skaitu fotogrāfijām, kurās redzami divi cilvēki (tātad viens pāris). Tad zinām, ka $3x + y = 45$. Katrs cilvēks redzams kopā ar vēl deviņiem. Tā kā 9 ir nepāra skaitlis, tad katrs cilvēks atrodams vismaz vienā pāra fotogrāfijā, tātad $y \geq 5$ un tāpēc $x \leq 13$. Kopējais fotogrāfiju skaits ir $x + y = 45 - 2x \geq 45 - 2 \cdot 13 = 19$.

Pārliecināsimies, ka ar 19 fotogrāfijām pietiks. Apzīmēsim cilvēkus ar skaitļiem 0, 1, ..., 9 un apskatīsim, kādas varētu būt 13 bildes pa trim cilvēkiem katrā. Sāksim ar fotogrāfijām, kurās pāri neatkārtojas un redzami cilvēki 1-8: **123**, **345**, **567**, **781**. Varam iedomāties, ka šie cilvēki ir sastājušies aplī un starp tiem cilvēkiem, kas ir vienā fotogrāfijā, ir ne vairāk kā viens cits cilvēks. Tālāk veidosim fotogrāfijas ar 0, izvairoties no jau nofotografētiem pāriem. Liksim jaunajās bildēs cilvēkus, starp kuriem aplī ir vismaz divi citi cilvēki: **014**, **085**, **027**, **036**. Tālāk veidosim fotogrāfijas ar 9, atkal izvairoties no jau nofotografētiem pāriem un izvēloties citas četras iespējas izvēlēties cilvēkus, kam ir divi cilvēki starpā: **916**, **925**, **938**, **947**. Visbeidzot sastādām trijnieku **246**. Šeit starp 2 un 4, kā arī starp 4 un 6 ir pa vienam cilvēkam, taču šo pāru nebija pirmajā sarakstā, bet starp 2 un 6 ir trīs cilvēki, un arī viņi nav bijuši kopā vienā bildē. Esam ieguvuši 13 fotogrāfijas ar 39 pāriem. Atlikušie 6 pāri būs redzami sešās pāru fotogrāfijās.

Piezīme: Šis uzdevums ekvivalents uzdevumam par to, kāds ir vislielākais skaits grafu ar 3 virsotnēm, kas atrodas vienā grafā ar 10 virsotnēm, bet kam nav kopīgu malu.

BW.K.3. Apzīmēsim darbinieku skaitu ar n. Protams, ka $n > 4$, jo $C_4^3 < 6$. Ja $n = 5$ ($C_5^3 > 6$), tad var izvēlēties 3 cilvēkus, kas nav vienā sazvērestībā, un likt viņus vienā laboratorijā, bet atlikušos divus – otrā. Ja $n = 6$, ievērojam, ka $C_6^3 = 20$. Tātad var atrast tādus trīs darbiniekus, ka ne viņi, ne pārējie trīs nepiedalās vienā sazvērestībā. (Tiešām, izveidojam 10 trijnieku pārus, kur vienā pārī ieejošajiem trijniekiem nav kopīgu elementu. Mūsu apgalvotais seko no tā, ka $10 > 6$.) Šos trīs tad liek vienā laboratorijā, pārējos trīs – otrā. Ja $n \geq 7$, lietojam indukciju. Atrodam divus cilvēkus A un B, kas nepiedalās sazvērestībā, iedomājamies, ka viņi ir viens cilvēks AB, un rīkojamies kā n-1 cilvēku gadījumā (n-$1 = 6$, ja $n = 7$). Kad esam sadalījuši visus pa laboratorijām, atceramies, ka AB patiesībā bija divi cilvēki A un B.

BW.K.4. Atbilde: nē.

Pierādījums. Parādīsim, ka sākuma pozīcijai $-\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$ nav iespējams iegūt piecas nulles. Pieskaitot katrai virsotnei $\frac{1}{5}$ mūsu uzdevums kļūst pierādīt, ka no sākuma pozīcijas 0, 0, 0, 0, 1, nav iespējams iegūt katrā virsotnē $\frac{1}{5}$. To var pierādīt, ievērojot, ka sākumā visi skaitļi ir „bināri racionāli", t.i. uzrakstāmi formā $\frac{k}{2^m}$, kur k ir vesels skaitlis un m – nenegatīvs vesels skaitlis. Katru divu šādu skaitļu aritmētiskais vidējais arī ir uzrakstāms šādā formā, taču $\frac{1}{5}$ nav uzrakstāms šādā formā. Tātad nav iespējams no jebkuras situācijas iegūt prasīto.

BW.K.5. Atbilde: $2592 = 72 \cdot 18 \cdot 2$.

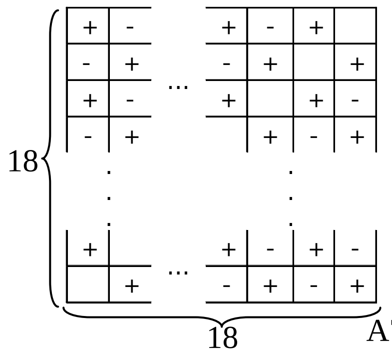
Risinājums. Uzdevumā parādās divu veidu skaitļi: „horizontālie" (tie, ko skaita plusiem) un „vertikālie" (mīnusiem). Parādīsim, ka abu tipu skaitļu summas savu maksimumu sasniedz, kad zīmes tabulā sarakstītas vienā un tajā pašā veidā.

Apskatīsim tikai horizontālos skaitļus. Apskatīsim brīvi izvēlētu rindiņu un pieņemsim, ka tajā ir p plusi un m mīnusi, $m + p \le 17$. Summa, kas saskaitīta plusiem šajā rindiņā, ir mp. Sadalīsim šo summu vienmērīgi pa visām šīs rindiņas zīmēm, t.i. ierakstīsim katrā netukšā šīs rindiņas rūtiņā skaitli $\frac{mp}{m+p}$.

Tagad visa „horizontālā" summa ir vienāda ar 306 ierakstīto skaitļu summu.

Meklēsim vislielāko katras zīmes „vērtību" šajā summā. Tas nozīmē, ka patiesībā meklēsim izteiksmes $f(m,p) = \frac{mp}{m+p}$ maksimālo vērtību, ja $m + p \le 17$. Ievērosim, ka patiesībā $f(m,p)$ ir augoša funkcija no m. Tādējādi, ja $m + p < 17$, tad m palielināšanās palielinās arī $f(m,p)$ vērtību. Ja $m + p = 17$, tad $f(m,p) = \frac{m(17-m)}{17}$ un ir acīmredzami, ka maksimumu $\frac{72}{17}$ tā sasniedz, kad $m = 8$ vai $m = 9$.

Tātad visi 306 saskaitāmie horizontālajā summā būs vislielākie, ja mēs atradīsim izkārtojumu, kur katrā netukšā rindiņā ir 9 plusi un 8 mīnusi. Analogs apgalvojums ir spēkā arī vertikālajai summai. Lai iegūtu vēlamo izkārtojumu, 18×18 laukumā uz mūsu 30×30 laukuma uz vienas garākās diagonāles atstāsim tukšumus, deviņās tai paralēlās diagonālēs ik pa vienai ierakstām plusus un astoņās diagonālēs – mīnusus, kā parādīts A71. zīm.



A71. zīm.

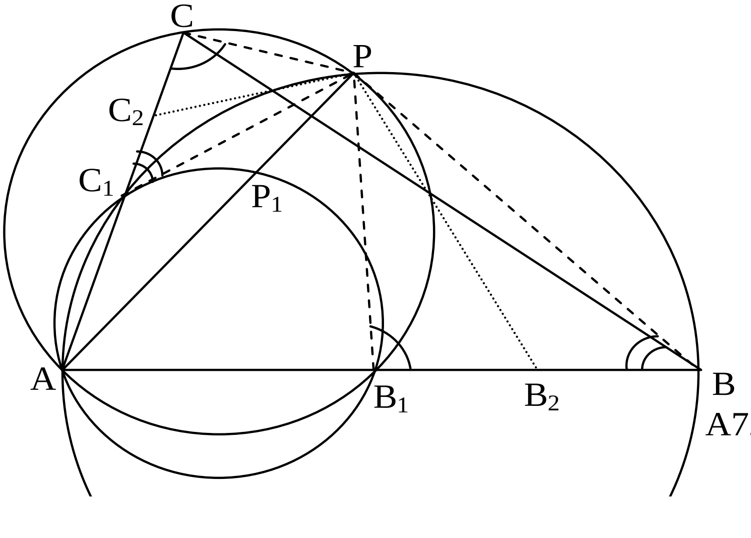
BW.Ģ. Ģeometrija

BW.Ģ.1. <u>Atbilde</u>: 150.

<u>Risinājums</u>. Apzīmēsim trijstūra malas ar a, b, c un augstumus ar h_a, h_b, h_c. Tad zinām, ka h_a=12, h_b=15 un h_c=20. Ir labi zināma attiecība $a : b = h_b : h_a$, no kā iegūstam $b = \frac{h_a}{h_b} a = \frac{12}{15} a = \frac{4}{5} a$, analogi $c = \frac{h_a}{h_c} a = \frac{12}{20} a = \frac{3}{5} a$. Tādējādi puse no trijstūra perimetra ir $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \; = \frac{1}{2}\left(a + \frac{4}{5}a + \frac{3}{5}a\right) = \frac{6}{5}a$.

Trijstūra laukumu Δ varam aprēķināt $\Delta = \frac{1}{2} a h_a = \; = \frac{1}{2} a \cdot 12 = 6a$, kā arī lietojot Hērona formulu: $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$ $= \sqrt{\frac{6}{5}a \cdot \frac{1}{5}a \cdot \frac{2}{5}a \cdot \frac{3}{5}a} = \frac{6}{25}a^2$. No abiem laukuma aprēķiniem $6a = \frac{6}{25}a^2$ un no tā iegūstam, ka $a = 25$ ($b = 20$, $c = 15$). No tā savukārt Δ=150.

BW.Ģ.2. Tā kā $\angle PBB_1 = \angle PBA = 180° - \angle PC_1A = \angle PC_1C$ un $\angle PCC_1 = \angle PCA =$ $= 180° - \angle PB_1A = \angle PB_1B$, tad ΔPBB_1 un ΔPC_1C ir līdzīgi trijstūri. Pieņemsim, ka B_2 un C_2 ir attiecīgi BB_1 un CC_1 viduspunkti. No tā seko $\angle BPB_2 = \angle C_1PC_2$ un no tā savukārt $\angle B_2PC_2 = \angle BPC_1 = 180° - \angle BAC$, kas nozīmē, ka AB_2PC_2 ir ievilkts riņķa līnijā. Izmantojot līdzību, ir skaidrs, ka $\frac{AP}{AP_1} = \frac{AB_2}{AB_1} = \frac{AC_2}{AC_1} = \frac{3}{2}$.



A72. zīm.

BW.Ģ.3. Uz malas BC atliekam tādu punktu G, ka izpildās $BG \cdot BC = BD \cdot BA$. (Šāds punkts noteikti eksistē, jo $BD \cdot BA < BC^2$.) Punkti A, D, G, C tad atrodas uz vienas riņķa līnijas. Iegūstam $CE \cdot CA = BC^2 - BD \cdot BA = BC \cdot (BG + CG) - BC \cdot BG = CB \cdot CG$, no kā izriet, ka punkti A, B, G, E arī atrodas uz vienas riņķa līnijas. Tad mēs redzam, ka $\angle DAG = \angle DCG$ un $\angle EAG = \angle EBG$, kas parāda, ka $\angle DAE + \angle DFE = \angle DAG + \angle EAG + \angle BFC = \angle DCG + \angle EBG + \angle BFC$. Bet leņķu summa labajā pusē ir trijstūra BFC iekšējo leņķu summa. Tāpēc $\angle DAE + \angle DFE = 180°$, no kā seko prasītais.

BW.Ģ.4. Izvēlamies tādus ziemeļpolu un dienvidpolu, ka nekādi divi no dotajiem punktiem neatrodas uz vienas paralēles un neviens punkts nesakrīt ne ar vienu no poliem. Novelkam paralēles caur katru no punktiem. Sadalām katru no šīm paralēlēm 2006 vienādos lokos tā, ka neviens punkts nav neviena loka galapunkts. Ar jēdzienu „savienot divus punktus" sapratīsim novilkt īsāko lielā riņķa loku starp punktiem, ar kuriem nupat sadalījām paralēles. Šos punktus nosauksim $A_{i,j}$ tā, ka i apzīmē paralēles numuru, skaitot no ziemeļiem uz dienvidiem ($i = 1,2,...,2006$), un $A_{i,1}$, $A_{i,2}$, ..., $A_{i,2006}$ ir i-tās paralēles dalījuma punkti, kuri ir sanumurēti tā, lai dotais punkts uz paralēles atrastos starp $A_{i,i}$ un $A_{i,i+1}$. Veidosim līnijas, pakāpeniski savienojot punktus:

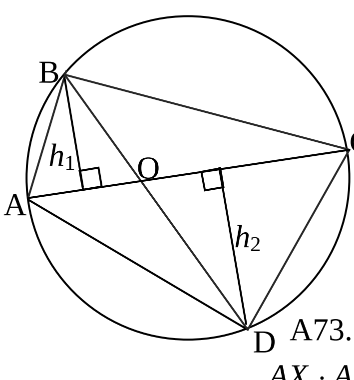
$$N - A_{1,1} - A_{2,1} - A_{3,1} - ... - A_{2006,1} - S$$
$$N - A_{1,2} - A_{2,2} - A_{3,2} - ... - A_{2006,2} - S$$
$$...$$
$$N - A_{1,2006} - A_{2,2006} - A_{3,2006} - ... - A_{2006,2006} - S$$

Šīs līnijas sadala lodes virsmu 2006 vienādās daļās, katrā no kurām ir tieši viens dotais punkts.

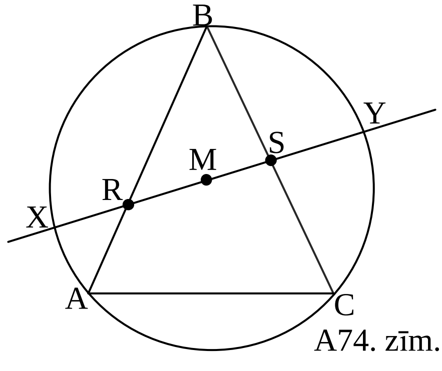
BW.Ģ.5. Pierādījumā izmantosim lemmu.

Lemma. Ja riņķa līnijā ievilkta četrstūra $ABCD$ diagonāles krustojas punktā O, tad $\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{BO}{OD}$. (Skat. A73. zīm.)

Tiešām, $\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin(B)}{\frac{1}{2} AD \cdot DC \cdot \sin(D)} = \frac{S(ABC)}{S(ADC)} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{BO}{OD}$.



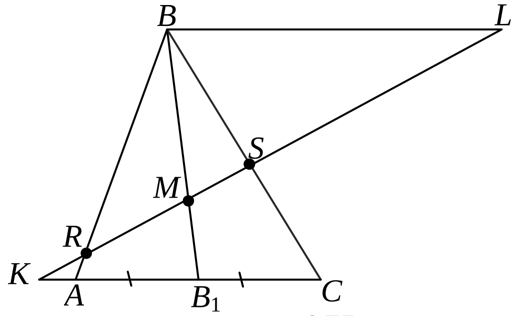
A73. zīm.



A74. zīm.

No lemmas zinām, ka $\frac{AX \cdot AY}{BX \cdot BY} = \frac{AR}{RB}$ un $\frac{CX \cdot CY}{BX \cdot BY} = \frac{CS}{SB}$, tātad mums jāpierāda, ka $\frac{AR}{RB} + \frac{CS}{SB} = 1$.

Apskatīsim gadījumu, kad RS nav paralēls AC. Apzīmēsim ar K taisnes RS krustpunktu ar AC un ar L punktu, kurā RS krusto taisnei AC paralēlu taisni, kas iet caur B. (Skat. A74. zīm.) Tad $\frac{AR}{RB} = \frac{AK}{BL}$ un $\frac{CS}{SB} = \frac{CK}{BL}$; mums jāpierāda, ka $AK + CK = BL$. Redzam, ka $AK + CK = 2KB_1$ un $BL = \frac{BM}{MB_1} \cdot KB_1 = 2KB_1$, k.b.j.



A75. zīm.

Gadījumā, ja $RS \parallel AC$, pierādījums ir acīmredzams.

Ir arī daudzi citi risinājumi.

BW.S. Skaitļu teorija

BW.S.1. Atbilde: nē tādu skaitļu nav.

Risinājums. Pieņemsim, ka šādi skaitļi eksistē. Apskatīsim visu pēc atlikuma, dalot ar 4. Jebkura skaitļa kvadrāts, dalot ar 4, dod atlikumu 0 vai 1. Skaitlis 2006 ≡ 2 (mod 4), tātad reizinājums katriem diviem no iedomātajiem četriem skaitļiem dod atlikumu 2 (mod 4) vai 3 (mod 4). No šī iegūstam, ka vismaz trim no četriem iedomātajiem skaitļiem jābūt nepāra, jo divu pāra skaitļu reizinājums dod 0 (mod 4). Vismaz diviem no šiem skaitļiem atlikumi, dalot ar 4, sakrīt un to reizinājums dod atlikumu 1 ≡ (mod 4), kas rada pretrunu.

BW.S.2. Atbilde: n=1.

Risinājums. Vispirms ievērosim: ja $n^2|3^n + 1$, tad n jābūt nepāra skaitlim, jo pretējā gadījumā 3^n ir nepāra skaitļa kvadrāts. No tā izriet, ka $3^n + 1 \equiv 1 + 1 = 2 \pmod 4$. Tas nozīmē, ka $3^n + 1$ nevar dalīties ar n^2, kas, savukārt, šajā gadījumā dalās ar 4.

Pieņemsim, ka kādam $n > 1$ izpildās $n^2|3^n + 1$. Ar p apzīmēsim mazāko n pirmreizinātāju. Mēs jau parādījām, ka $p > 2$. Skaidrs arī, ka $p \neq 3$, jo $3^n + 1$ nedalīsies ar 3 nekādā gadījumā. Tātad $p \geq 5$. Tā kā $p|3^n + 1$, tad arī $p|3^{2n} - 1$. Ar k apzīmēsim mazāko pozitīvo veselo skaitli, kam izpildās $p|3^k - 1$. Tad mēs iegūstam, ka $k \mid 2n$, un pēc Fermā teorēmas $k| p - 1$. Skaitļiem $3^1 - 1$ un $3^2 - 1$ nav citu pirmreizinātāju kā 2, tātad no $p \geq 5$ izriet, ka $k \geq 3$. Tas nozīmē, ka $lkd\,(2n, p - 1) \geq k \geq 3$, un no tā izriet $lkd\,(n, p - 1) > 1$, kas ir pretrunā ar faktu, ka p ir n *mazākais* pirmreizinātājs. Tātad pieņēmums ir aplams un prasītais izpildās tikai pie $n = 1$.

BW.S.3. Apzīmēsim ar b_n un c_n attiecīgi n un n^n pēdējos ciparus. Acīmredzami, ka tad, ja $b_n = 0,1,5,6$, tad attiecīgi $c_n = 0,1,5,6$ un $a_n = 0,1,5,6$. Ja $b_n = 9$, tad $n^n \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$ un no tā izriet, ka $a_n = 9$. Ja $b_n = 4$, tad $n^n \equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$ un no tā izriet, ka $c_n = 6$ un $a_n = 6$. Ja $b_n = 2,3,7,8$, tad n^m pēdējais cipars „iziet" attiecīgi ciklus $2-4-8-6$, $3-9-7-1$, $7-9-3-1$, $8-4-2-6$. Ja $b_n = 2$ vai $b_n = 8$, tad $n^n \equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ un $a_n = 6$. Atlikušajos gadījumos, kad $b_n = 3$ vai $b_n = 7$, ja $n \equiv \pm 1(\mathrm{mod}\,4)$, tad tāpat ir arī ar n^n. Ja $b_n = 3$, tad $n \equiv 3(\mathrm{mod}\,20)$ vai $n \equiv 13(\mathrm{mod}\,20)$ un $n^n \equiv 7(\mathrm{mod}\,20)$ vai $n^n \equiv 13(\mathrm{mod}\,20)$, tādēļ attiecīgi $a_n = 7$ vai $a_n = 3$. Ja $b_n = 7$, tad $n \equiv 7 \pmod{20}$ vai $n \equiv 17 \pmod{20}$ un $n^n \equiv 3 \pmod{20}$ vai $n^n \equiv 17 \pmod{20}$, tādēļ attiecīgi $a_n = 3$ vai $a_n = 7$. Visbeidzot secinām, ka virknei (a_n) ir šāds periods garumā 20: $1-6-7-6-5-6-3-6-9-0-1-6-3-6-5-6-7-6-9-0$.

BW.S.4. Atbilde: jā, viena šāda virkne sākas ar 1, 3, 5, 55, 561, 851, 63253, 110055, ...

Risinājums: Mēs parādīsim, ka tad, ja mums ir doti veseli pozitīvi skaitļi $a_1, ..., a_k$, tādi, ka katram $n \le k$ un $i \le k - n$ ir spēkā $n^2 \mid a_{i+1}+...+a_{i+n}$, tad ir iespējams izvēlēties tādu a_{k+1}, ka tas pats izpildās katram $n \le k+1$ un $i \le k+1-n$. No šī tieši izriet apstiprinoša atbilde uz uzdevuma jautājumu, jo var sākt konstruēt virkni no jebkura viena vesela pozitīva skaitļa.

Lai izpildītos vajadzīgais, pietiek, ja a_{k+1} izpildās īpašība:

$a_{k+1} \equiv -(a_{k-n+2} +...+ a_k) \pmod{n^2}$ katram $n \le k+1$. Aplūkosim šo $k+1$ kongruenču sistēmu.

Vispirms ievērosim, ka katram pirmskaitlim p un veselam pozitīvam l, kuriem $p^l \le k+1$, pastāv īpašība: ja izpildās kongruence pēc moduļa p^l, tad izpildās arī kongruence pēc moduļa $p^{2(l-1)}$. Lai par to pārliecinātos, sagrupēsim pēdējos p^l virknes $a_1, ..., a_{k+1}$ elementus p grupās pa p^{l-1} secīgiem elementiem katrā. Saskaņā ar $a_1, ..., a_k$ izvēli pirmajām p-1 grupām summas dalās ar $p^{2(l-1)}$. Pēc pieņēmuma visu p grupu elementu summa dalās ar p^{2l}. No tā izriet, ka atlikusī summa $a_{k-p^{l-1}+1} + ... + a_{k+1}$ arī dalās ar $p^{2(l-1)}$.

Otrkārt ievērosim, ka jebkuriem savstarpējiem pirmskaitļiem c un d, tādiem, ka $cd \le k+1$, pastāv īpašība: ja izpildās kongruences pēc moduļiem c^2 un d^2, tad izpildās arī kongruence pēc moduļa $(cd)^2$. Lai par to pārliecinātos, sagrupēsim pēdējos cd virknes $a_1, ..., a_{k+1}$ elementus c secīgu elementu grupās skaitā d un d secīgu elementu grupās skaitā c. Atkal izmantojot $a_1, ..., a_k$ izvēli un pielietojot pieņēmumu, mēs iegūsim, ka virknes $a_1, ..., a_{k+1}$ pēdējo cd elementu summa dalās gan ar c^2, gan d^2. Tātad šī summa dalās arī ar $(cd)^2$.

Abi šie novērojumi ļauj mums pie $p^l > k+1$ apskatīt tikai kongruences pēc moduļa p^{2l}, kam iegūto sistēmu noteikti var atrisināt, pamatojoties uz Ķīniešu teorēmu par atlikumiem.

BW.S.5. Apzīmēsim šo skaitli ar N un pieņemsim pretējo, ka tā ciparu summa ir 76. Ievērosim ļoti būtisku faktu, proti, ka $3 \cdot 37 = 111$, no kā izriet, ka $27 \cdot 37 = 999$. Tātad mums ir līdzīga dalāmības pazīme kā dalāmībai ar 9: ja $x = a_n 10^{3n} + a_{n-1} 10^{3(n-1)} + ... + a_1 10^3 + a_0$, tad $x \equiv a_n + a_{n-1} + ... + a_0 \pmod{37}$. Citiem vārdiem sakot, ja ņemam skaitļa x ciparus grupās pa 3 un saskaitām šīs grupas, iegūstam skaitli, kas kongruents x pēc moduļa 37. No šī izriet, ka $A = 111\ 111\ 111\ 111$ dalās ar 37. Tātad arī skaitlis $N - A$ dalās ar 37, un, tā kā tas uzrakstāms ar cipariem 0, 4 un 8, tad tas dalās arī ar 4. Skaitļa $N - A$ ciparu summa ir $76 - 12 = 64$. Tātad $\frac{1}{4}(N - A)$ uzrakstāms, izmantojot ciparus 0, 1 un 2; tas dalās ar 37; tā ciparu summa ir 16. Lai pielietotu mūsu dalāmības pazīmi, saskaitām četras trīsciparu grupas, kas sastāv tikai no cipariem 0, 1 un 2. Pārnesumi neradīsies, un neviens summas S cipars nepārsniegs 8. Arī S dalās ar 37 un tās ciparu summa ir 16. Tā kā $S \equiv 16 \equiv 1 \pmod 3$ un $37 \equiv 1 \pmod 3$, tad arī $S/37 \equiv 1 \pmod 3$. No tā zinām, ka $S = 37(3k+1)$, jeb S ir kāds no skaitļiem 037, 148, 259, 370, 481, 592, 703, 814, 925; taču katrs no šiem vai nu satur ciparu 9, vai tā ciparu summa nav 16.

Uzdevumu sadalījums pa tēmām

Lai apzinātu uzdevumu tematiku, tie tālāk sadalīti 5 grupās: algebra, ģeometrija, skaitļu teorija, kombinatorika un algoritmika.

Katra no šīm grupām sadalīta vēl sīkākās apakšgrupās.

Dotais sadalījums ir nosacīts, jo daudzi uzdevumi risināmi ar vairākām metodēm. Tā kā izstrādne paredzēta 9. – 12. klašu skolēniem, tad metodes izvēle atkarīga no skolēna vecuma un tajā brīdī viņam pieejamām zināšanām.

Algebra

Funkcijas, virknes: S.11.1., R.11.3., R.11.5., R.12.1., V.11.2., V.11.5., IMO.1., BW.A.1.
Nevienādības: S.12.4., R.9.2., A.10.2., VP.1.1., AB.A.2., AB.A.4., BW.A.2., BW.A.4.
Funkcionālvienādojumi: S.11.4., AB.A.5., BW.A.5.
Vienādojumi, vienādojumu sistēmas: S.9.1., S.10.1., R.10.5., V.9.2., V.12.1., V.12.3., A.12.2., AB.A.3.
Polinomi: S.10.5., A.12.2., IMO.6., BW.A.3.
Pārveidojumi: S.10.5., V.9.1., V.10.3., A.9.3., A.11.2., AB.A.1., BW.A.3.

Ģeometrija

Ar riņķa līniju saistīti leņķi: S.10.4., S.11.3., S.12.2., R.11.4., V.11.4., V.12.4., A.9.2., A.12.1., VP.2.3., IMO.2., AB.Ģ.4., BW.Ģ.2.
Vienādi trijstūri: S.9.3., S.12.2., R.12.4., V.9.3., VP.1.2., IMO.4., AB.Ģ.1.
Laukumi: S.10.3., V.10.4., A.10.4., IMO.4., BW.Ģ.1., BW.Ģ.5.
Metriskās sakarības: A.11.3., BW.Ģ.3.
Līdzība: R.9.3., R.10.4., V.12.4., AB.Ģ.2. BW.Ģ.2.
Koordinātu metode: IMO.6.
Nevienādības: A.11.1., VP.2.2., IMO.2., AB.Ģ.5.
Figūru sistēmas, piemēri: S.12.5., R.10.2., V.9.4., A.9.4., A.12.4., VP.3.1., BW.Ģ.4.
Dirihlē princips: V.11.3., AB.K.4., AB.Ģ.3.
Invariantu metode: S.12.5., V.12.2., A.9.4.
Ekstremālie elementi: A.10.5., VP.1.4.

Skaitļu teorija

Atlikumi, kongruences: S.10.2., V.10.1., VP.2.1., IMO.5., AB.S.5., BW.S.1., BW.S.3.
Pirmskaitļi, sadalījums pirmskaitļu reizinājumā: S.11.2., R.9.5., R.10.3., R.12.3., V.9.5., V.10.3., V.12.5., A.10.1., VP.1.3., VP.3.2, AB.S.1., BW.S.2., BW.S.4.
Dalāmības īpašības un pazīmes: R.9.1., V.11.1., A.9.1., IMO.5., AB.S.3.
Vienādojumi veselos skaitļos: S.9.2., S.12.3., R.11.1., AB.S.4.
Skaitļa pieraksts: R.9.1., V.11.1., AB.S.2., BW.S.5.

Kombinatorika

Dirihlē princips: R.11.2., V.9.5., V.10.5., AB.K.1.
Invariantu metode: S.9.5., R.12.5., V.10.2., A.9.5., A.11.5., A.12.3., BW.K.4.
Ekstremālā elementa metode: A.11.4.
Kombinatorikas struktūras: S.9.4., S.12.1., R.9.4., R.11.2., VP.1.5., IMO.3., AB.K.2., BW.K.1., BW.K.2., BW.K.5.

Algoritmika

Algoritma izstrāde: S.11.5., R.10.1., R.12.5., V.10.2., A.10.3., A.11.5., A.12.5., VP.3.3., IMO.3., AB.K.3., AB.K.5., BW.K.3.
Algoritma analīze: R.12.2.

Literatūra

Vairāki Latvijas olimpiāžu uzdevumi aizgūti no citiem avotiem:

Sanktpēterburgas matemātikas olimpiāde: S.9.3., S.11.4., R.12.4., AB.K.2., AB.S.1., AB.S.2.

Olimpiāde „Baltijas Ceļš”: S.10.5., S.12.4.

Irānas matemātikas olimpiāde: S.11.5., VP.1.2., VP.1.5., AB.K.5., AB.Ģ.3., AB.S.5.

Rumānijas matemātikas olimpiāde: V.10.3.

Maskavas matemātikas olimpiāde: V.11.2., A.10.4., A.11.3., A.12.4.

Čehijas matemātikas olimpiāde: V.11.5.

Vācijas matemātikas olimpiāde: V.12.4.

Slovēnijas matemātikas olimpiāde: A.11.4.

Ungārijas matemātikas olimpiāde: VP.3.2.

CRUX MATHEMATICORUM: AB.A.3.

Sērija „Laima” matemātikā

Redakcijas padome:	A. Andžāns, B. Johannessons, L. Ramāna, F. Bjernsdottira, A. Cibulis
Mākslinieciskā noformētāja:	D. Bonka

1991. gada augustā Islande bija pirmā valsts, kas atzina Latvijas neatkarības atjaunošanu. Tas Latvijas iedzīvotājos radīja dziļas simpātijas pret skaitliski mazo, bet dvēselē lielo islandiešu tautu.

Kopš tā laika mūsu tautu solidaritāte izpaudusies daudzējādā ziņā. Viena no tās izpausmēm ir projekts LAIMA (Latvijas un Islandes Matemātiskās izglītības projekts), kas apvieno abu valstu speciālistu pieredzi un pūliņus matemātikas olimpiāžu un matemātikas padziļinātas mācīšanas jomā, sagatavojot darbu sēriju par svarīgākajiem modernās elementārās matemātikas jautājumiem.

Islandē projekta galvenais atbalstītājs ir kompānijas TALNAKÕNNUN ģenerālmenedžeris Benedikts Johannessons. Nenovērtējams ir arī viņa finansiālais ieguldījums.

Sērijas „Laima” grāmatas

1. A. Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons. **Invariantu metodes elementi.** Rīga: LIIS, 1997.
2. A. Andžāns, P. Zariņš, B. Johannessons. **Leņķu ģeometrijas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1998.
3. A. Gailītis, A. Andžāns, I. Kudapa, L. Ramāna, B. Johannessons. **Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi.** Rīga: LIIS, 1999.
4. A. Andžāns, I. France, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-8. klasēm.** Rīga: LU, 2001.
5. A. Cibulis. **Pentamino. 1. daļa.** Rīga: LU, 2001.
6. A. Andžāns, J. Kluša. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1994./95.m.g.** Rīga: LU, 2001.
7. E. Fogels, E. Lejnieks. **Trijstūru ģeometrija.** Rīga: LU, 2001.
8. A. Andžāns, A. Ambainis, I. France. **Matemātikas sacensības 9.-12. klasēm 1993./94.m.g.** Rīga: LU, 2001.
9. A. Bērziņš. **Algebra.** Rīga: LU, 2001.
10. A. Andžāns, A. Čerāne, L. Ramāna. **Matemātikas sacensības 5.-9. klasēm 1999./2000.m.g.** Rīga: LU, 2001.
11. A. Cibulis. **Pentamino. 2. daļa.** Rīga: LU, 2001.
12. I. Saulīte. **Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai.** Rīga: LU, 2002.
13. A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš, B. Johannessons. **Algoritmisko uzdevumu krājums.** Rīga: LIIS, 2004.
14. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part I.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
15. A. Andžāns, B. Johannesson. **Dirichlet Principle. Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2005.
16. A. Andžāns, I. Bērziņa, B. Johannessons. **„Profesora Cipariņa kluba” uzdevumi un atrisinājumi 1999.-2006. gados.** Rīga: LU, 2006.
17. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 2. daļa.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
18. A. Andžāns, I. Bērziņa, D. Bonka, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: LU, 2006.
19. M. Lehtinen. **The Nordic Mathematical Competition 1987. – 2006. Problems and Solutions.** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
20. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do?** Rīga: Mācību grāmata, 2006.
21. A. Andžāns, L. Ramāna, B. Johannessons. **Vektori. 1. daļa.** Rīga: LU, 2006.
22. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 33. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 5. -9. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2007.
23. A. Cibulis. **Ekstrēmu uzdevumi. 1. daļa (2. izdevums).** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
24. R. Kašuba. **What to do when You don’t Know What to do? Part II.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
25. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
26. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2005./2006. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2007.
27. A. Andžāns, M. Daļecka, B. Johannesons. **Sagatavošanās olimpiāde matemātikā 4. – 9. klasēm.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2008.
28. A. Andžāns, Z. Škuškovnika, B. Johannessons. **Latvijas 26. – 32. Atklātās Matemātikas Olimpiādes. 9. – 12. klases.** Rīga: Biznesa augstskola Turība, 2008.

29. M. Lehtinen. **Events in Mathematics. Part 1.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
30. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
31. A. Andžāns, D. Mežecka, B. Johannessons. **Matemātikas olimpiādes „Rīga – Viļņa – Tallina”.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
32. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part I.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.
33. A. Andžāns, L. Freija, S. Zabarovska, B. Johannessons. **Matemātikas sacensības 9. - 12.klasēm 2006./2007. mācību gadā.** Rīga: Mācību grāmata, 2008.
34. R. Kašuba. **Once upon a time I saw a puzzle. Part II.** Rīga: Latvijas Universitāte, 2008.