Agnis Andžāns, Julita Kluša

1994./95. m.g. matemātikas olimpiāžu uzdevumi ar atrisinājumiem

Rīga, 1997

Anotācija

Šajā izstrādnē apkopoti 1994./95. mācību gadā notikušo Latvijas mēroga matemātikas sacensību uzdevumi, starptautisko matemātikas olimpiāžu uzdevumi un to atrisinājumi 9.-12. klašu skolēniem.

Iesakām lasītājiem vispirms censties atrisināt uzdevumu pašiem. Tomēr vērts iepazīties arī ar te sniegtajiem atrisinājumiem - gan tāpēc, ka tie var saturēt jaunas, jums nezināmas idejas, gan tāpēc, ka, lasot tos, var atklāties nepilnības jūsu patstāvīgi veiktajos spriedumos.

SATURS

Ievads **3**

Uzdevumu sadalījums pa tēmām **4**

Uzdevumi **5**

Sagatavošanās olimpiāde (1.-20.) ____ 5

Latvijas 45. matemātikas olimpiādes 2. posms (21.-40.) ____ 6

Latvijas 45.matemātikas olimpiādes 3.posms (41.-60.) ____ 8

Latvijas 45.matemātikas olimpiādes 4.kārta (61.-65.) ____ 10

Latvijas 22. atklātā matemātikas olimpiāde (66.-85.) ____ 11

Latvijas izlases atlases sacensības 36. starptautiskajai matemātikas olimpiādei Kanādā (86.-91.) ____ 13

36. starptautiskās matemātikas olimpiādes uzdevumi (92.-97.) ____ 13

Komandu olimpiādes "Baltijas Ceļš - 94" uzdevumi (98.-117.) ____ 14

Atrisinājumi **16**

Sagatavošanās olimpiāde (1.-20.) ____ 16

Latvijas 45. matemātikas olimpiādes 2. posms (21.-40.) ____ 22

Latvijas 45.matemātikas olimpiādes 3.posms (41.-60.) ____ 29

Latvijas 45.matemātikas olimpiādes 4.kārta (61.-65.) ____ 38

Latvijas 22. atklātā matemātikas olimpiāde (66.-85.) ____ 40

Latvijas izlases atlases sacensības 36. starptautiskajai matemātikas olimpiādei Kanādā (86.-91.) ____ 53

36. starptautiskās matemātikas olimpiādes uzdevumi (92.-97.) ____ 56

Komandu olimpiādes "Baltijas Ceļš - 94" uzdevumi (98.-117.) ____ 61

IEVADS

Vispārējā izglītībā matemātikas funkcijas ir ļoti daudzveidīgas. Tā ir priekšmets, kura ietvaros skolēni apgūst formālās spriešanas metodes; mācoties matemātiku, izveidojas jēdziens par pierādījumu un attīstās iekšēja vajadzība pēc tā; matemātika ir neaizstājams instruments citu priekšmetu (fizika, astronomija, informātika) apguvē. Līdzās tradicionālajām izziņas metodēm (racionālā un empīriskā) 20.gs. attīstījusies trešā - modelēšanas metode, kas pagaidām savas spilgtākās izpausmes radusi matemātikā, datorikā un to pielietojumos dabaszinātnēs un ekonomikā.

Tas nosaka matemātikas svarīgo lomu vispārējā izglītībā un skolēnu noturīgo interesi par to.

Latvijas Republikas IZM apstiprinātajā matemātikas profilkursa programmā ietvertas gan tēmas, kas jau ilgi un ar panākumiem tiek mācītas mūsu skolā, gan tēmas, kuru nozīmība apzināta tikai pēdējo gadu laikā. Visu šo tēmu vienojošais elements ir kopējās matemātiskās idejas, kas izpaužas gan algebrā un informātikā, gan kombinatorikā un varbūtību teorijā, gan modernajās diskrētās matemātikas nozarēs. Matemātikas (un līdz ar to visu to zinātņu nozaru, kuras būtiski balstās uz matemātiku) vienotības apzināšanās ir viens no svarīgākajiem matemātiskās izglītības virsuzdevumiem.

Skolas līmenī matemātikas vienotība visspilgtāk izpaužas matemātikas uzdevumos. Katra uzdevuma atrisināšana ir mazs atklājums; lietojot šī atklājuma procesā visdažādāko matemātikas nozaru metodes, skolēns savā tiešajā darbā izjūt minēto vienotību un mācās to izmantot.

Šī un daudzu citu iemeslu pēc interesantu visdažādākās grūtību pakāpes uzdevumu risināšana ir skolas matemātikas kursa galvenā sastāvdaļa. Tomēr pieeja šādiem uzdevumiem (un jo vairāk to atrisinājumiem, kurus patstāvīgi atrast ļoti bieži nemaz nav viegli) Latvijā šodien ir stipri apgrūtināta sakarā ar piemērotas periodikas un grāmatu trūkumu latviešu valodā; savukārt atbilstošie ārzemju izdevumi ir dārgi un sarežģīti iegūstami.

Ar šo darbu mēs cenšamies risināt (ne atrisināt) minēto problēmu. Tajā apkopoti uzdevumi, kas 1994./95. mācību gadā izmantoti matemātikas olimpiādēs 9.-12. klašu grupās. Tā kā olimpiāžu uzdevumu komplektu sastādītājiem tiek izvirzītas augstas prasības (dažāda grūtības pakāpe; dažādas tēmas; dažādas risināšanas metodes; oriģinalitāte; negaidītas idejas; gan diskrētās, gan nepārtrauktās matemātikas “pārstāvniecība” utt.), tad katras profilkursa tēmas mācīšanai skolotājs varēs atrast gan vieglākus, gan grūtākus uzdevumus. Savukārt skolēns gūs iespēju iepazīties ar metodēm un idejām, kas netiek uzsvērtas tradicionālajā kursā, un salīdzināt savu varēšanu ar prasībām, kādas izvirza labākajiem jaunajiem matemātiķiem Latvijā, Baltijas reģionā un arī visā pasaulē.

Lasītāju ērtības labad visiem uzdevumiem doti pietiekami sīki atrisinājumi un uzdevumu klasifikācija atbilstoši tēmām.

Autori

UZDEVUMU SADALĪJUMS PA TĒMĀM

Skolotāju un skolēnu ērtībām tālāk tiek dots uzdevumu sadalījums pa tēmām. Daži uzdevumi iekļauti vairākās tēmās. Protams, kā katra klasifikācija, arī šī ir nosacīta; jauns, negaidīts kāda uzdevuma atrisinājums var izsaukt šī uzdevuma iekļaušanu arī citās nodaļās.

ALGEBRA

Algebriskie pārveidojumi:	1., 5.
Vienādojumi un to sistēmas:	6., 11., 21., 26., 46., 56., 66., 71., 81.
Nevienādības un ekstrēmi:	9., 13., 16., 18., 32., 36., 41., 54., 63., 65., 76., 87., 95., 99., 114.
Funkcionālvienādojumi:	61., 90.
Polinomu īpašības:	83., 102.

ĢEOMETRIJA

Laukumi:	4., 43., 48., 52., 53., 68., 75., 85.
Ar riņķi saistīti leņķi:	8., 27., 34., 44., 64., 70., 73., 91.
Nevienādības:	14., 30., 68., 96., 111.
Metriskās sakarības starp nogriežņiem:	17., 22., 38.
Konstrukcijas:	24., 33., 58., 78.
Kombinatoriskā ģeometrija:	76., 81., 94.
Ģeometriskie pārveidojumi:	79.
Līdzība:	93., 108.
Incidence:	70., 73., 109.

SKAITĻU TEORIJA

Dalāmība:	12., 25., 28., 31., 37., 42., 47., 51., 57., 62., 67., 102., 103., 104., 112.
Vienādojumi veselos skaitļos:	3., 7., 77., 86., 98., 101., 105.
Cipari skaitļa pierakstā:	72., 84.

KOMBINATORIKA

Skaitīšana:	97., 107.
Grafi:	19., 35., 40., 49., 55., 59., 80., 88., 116.
Matemātiskās indukcijas metode:	5., 35., 40., 50., 55., 60., 61., 69., 107.
Invariantu metode:	52., 81., 115.
Ekstremālā elementa metode:	44., 49.
Interpretāciju metode:	100., 115.
Dirihlē princips un vidējās vērtības metode:	2., 10., 15., 20., 23., 29., 39., 45., 50., 65., 67., 74., 76., 89., 110., 113., 117.

UZDEVUMI

SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE (1.-20.)

9. klase (1.-5.)

1. Dots, ka $a + b = 1$.
Pierādīt, ka $a^3 + b^3 + 3ab = 1$.
2. Plaknē uzzīmētas 10 riņķa līnijas.
Pierādīt, ka starp tām var atrast divas, kas pieskaras vienādam skaitam pārējo.
3. Vai eksistē 4 dažādi naturāli skaitļi, kuru summa vienāda ar to reizinājumu?
4. Katra no izliekta četrstūra diagonālēm sadala to divos trijstūros ar vienādiem laukumiem. Pierādīt, ka šis četrstūris ir paralelograms.
5. Pierādīt, ka skaitlis

$$(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) + 1$$

ir divnieka pakāpe ar naturālu kāpinātāju.

10. klase (6.-10.)

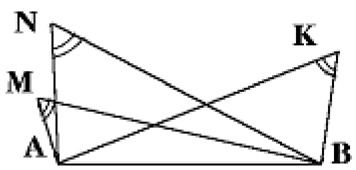
6. Zināms, ka katram no vienādojumiem

$$x^2 + 2ax + b^2 = 0 \text{ un } x^2 + 2bx + a^2 = 0$$

eksistē atrisinājums. Vai noteikti $a = b$?
7. Kādiem naturāliem n skaitlis

$$2^n+2$$

ir naturāla skaitļa kvadrāts?
8. Dots, ka $\angle AMB = \angle ANB = \angle AKB$ (*sk.1.zīm.*)

1.zīm.


Pierādīt, ka šo triju vienādo leņķu bisektrises krustojas vienā punktā.
9. Dots, ka a, b, c - pozitīvi skaitļi un $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2$.
Kas lielāks: $a^3 + b^3 + c^3$ vai $a^4 + b^4 + c^4$? (Zināms, ka šie lielumi nav vienādi.)
10. No regulāra 20 - stūra virsotnēm deviņas nokrāsotas baltas.
Pierādīt, ka var atrast vienādsānu trijstūri, kura visas virsotnes ir baltas.

11.klase (11.-15.)

11. Atrisināt vienādojumu

$$|x - 1| + |x - 3| + |x - 5| = 3$$

12. Dots, ka a,b,c ir naturāli skaitļi un reizinājums abc dalās ar 3, bet nedalās ar 9.
Pierādīt, ka $a^2 + b^2 + c^2$ nedalās ar 3.
13. Pierādīt, ka patvaļīgiem skaitļiem a un b pastāv nevienādība

$$a^2 + b^2 + 2 > a + b + ab.$$

14. Izliekta četrstūra abu diagonāļu garumi ir 20.

Pierādīt, ka vismaz viena no tā malām garāka par 14.

15. No regulāra 13-stūra virsotnēm sešas nokrāsotas melnas.

Pierādīt: var atrast trapeci, kam visas virsotnes ir melnas.

12.klase (16.-20.)

16. Vai visi skaitļi $\log_a b$, $\log_b c$, $\log_c a$ var būt negatīvi?

17. Izliekts četrstūris ABCD ar perpendikulārām diagonālēm ievilkts riņķa līnijā ar rādiusu R. Pierādīt, ka $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 8R^2$.

18. Naturāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ visi ir dažādi, nepāra un nedalās ne ar vienu pirmskaitli, kas lielāks par 5. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} < 2.$$

19. Volejbola turnīrā piedalās 9 komandas. Katra spēlē ar katru vienu reizi; neizšķirtu nav.

Pierādīt: ir iespējama situācija, ka turnīra beigās katrām divām komandām var atrast trešo, kas tās abas uzvarējusi.

20. Riņķis pilnībā pārklāts ar vairākām lentām; par lentu sauc joslu starp divām paralēlām taisnēm.

Pierādīt, ka lentu platumu summa nav mazāka par riņķa diametru.

LATVIJAS 45. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 2. POSMS (21.-40.)

9.klase (21.-25.)

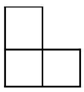
21. Dots, ka katram no vienādojumiem $x^2 + px + q = 0$ un $x^2 + ax + b = 0$ ir saknes.

Pierādīt, ka arī vienādojumam $x^2 + apx + bq = 0$ ir sakne. Visi koeficienti ir pozitīvi.

22. Trijstūra malu garumi ir a, b, c ($a > b > c$); viens no tā leņķiem ir 60^o liels.

Pierādīt, ka eksistē trijstūris, kura malu garumi ir a, b, $a - c$ un viens no leņķiem arī ir 60^o liels.

23. Kvadrāts sastāv no 6x6 rūtiņām. Kādu mazāko daudzumu tādu "stūrīšu", kāds redzams *2.zīm.*, var no tā izgriezt, lai no atlikušās kvadrāta daļas vairs nevarētu izgriezt nevienu stūrīti?



2. zīm.

24. Par trisektoru sauc ierīci, kas jebkuru nogriezni ļauj sadalīt 3 vienādās daļās. Kā, izmantojot lineālu un trisektoru, bet neizmantojot cirkuli, var atrast nogriežņa viduspunktu?

25. Pierādīt, ka katram naturālam n reizinājums

$$n \cdot (13n + 1) \cdot (19n + 2) \text{ dalās}$$

a) ar 2,

b) ar 6

10.klase (26.-30.)

26. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

27. Daudzstūris ievilkts riņķī. Visi tā leņķi savā starpā vienādi, bet starp tā malām ir arī dažādas. Pierādīt, ka daudzstūrim ir pāra skaits virsotņu.

28. Dots, ka x; y; z; t ir nepāra skaitļi. Pierādīt, ka reizinājums

(x - y)(x - z)(x - t)(y - z)(y - t)(z - t) dalās ar

a) 64
b) 256
c) 768

29. Rindā nostādīti 10 zēni un 10 meitenes. Divus bērnus var mainīt vietām tad, ja starp tiem stāv ne vairāk kā 9 citi.

a) pierādīt, ka ar 10 maiņām noteikti pietiek, lai panāktu, ka vispirms stāv 10 zēni, bet pēc tam - 10 meitenes.
b) pierādīt: sākuma situācija var būt tāda, ka ar 9 maiņām to panākt nevar.

30. Dotā trijstūra malu garumi ir a, b, c. Pierādīt nevienādību

$$(a + b + c)^2 < 4(ab + ac + bc).$$

11.klase (31.-35.)

31. Dots, ka a un b - naturāli skaitļi un gan 3a + 4b, gan 2a + 3b dalās ar 7. Pierādīt, ka gan a, gan b dalās ar 7.

32. Uz tāfeles uzrakstīja 2 naturālus skaitļus (varbūt vienādus). Pēc tam uzrakstīja trešo, ceturto, … skaitli pēc šāda likuma: katrs nākošais skaitlis vienāds ar abu iepriekšējo summu.

(Piemēram, sākot ar 1 un 1, uz tāfeles tālāk pakāpeniski parādītos 2; 3; 5; 8; …).

Zināms, ka kādreiz uz tāfeles parādījās 81. Kāds lielākais daudzums skaitļu varēja tikt uzrakstīts pirms tam?

33. Uzzīmēt kaut vienu 9-stūri ar īpašību: katra no deviņām taisnēm, kas satur kādu no 9-stūra malām, krusto 9-stūra iekšpusi.

34. Divas riņķa līnijas krustojas punktos M un N. Uz vienas no tām ārpus otras ņemts punkts K. Taisnes KM un KN krusto otru riņķa līniju atbilstoši punktos A un B tā, ka M atrodas starp A un K, bet N - starp B un K. Pierādīt, ka taisne AB paralēla pirmās riņķa līnijas pieskarei punktā K.

35. Kādā valstī ir n pilsētas ($n \geq 2$). Katras divas no tām savieno tieši viens vienvirziena ceļš. Ceļu krustojumu ārpus pilsētām nav (izmantoti viadukti). Pierādīt, ka atradīsies tāda pilsēta, no kuras var pakāpeniski apceļot visas pārējās pilsētas, braucot tikai pa ceļiem un katrā pilsētā nonākot tieši vienu reizi (beigās <u>nav</u> jāatgriežas sākuma pilsētā).

12.klase (36.-40.)

36. Vai var atrast tādu x, ka

$$\text{ctg}x < \sin x < \cos x < \text{tg}x \text{ ?}$$

37. Dots, ka n - pirmskaitlis, n>5. Pierādīt, ka

$$n^4 - 5n^2 + 4 \text{ dalās ar } 45.$$

38. Divas riņķa līnijas krustojas punktos M un N. Tām novilktas kopējās ārējās pieskares; pieskaršanās punkti ir trapeces virsotnes.

Pierādīt, ka M un N atrodas uz šīs trapeces viduslīnijas.

39. Kuba šķautnes garums ir 1. Tā iekšpusē atrodas 9 figūras, kuru tilpumu summa pārsniedz 8.

Pierādīt, ka ir tāds punkts, kas vienlaicīgi pieder visām figūrām.

40. Kādā valstī ir n pilsētas ($n \geq 2$). Katras divas no tām savieno abpusēja aviolīnija (bez nolaišanās citās pilsētās). Katra aviolīnija pieder vienai no divām kompānijām.

Pierādīt: vismaz ar vienas kompānijas aviolīnijām (neizmantojot otras pakalpojumus) var no katras pilsētas nokļūt katrā citā (varbūt pārsēžoties).

LATVIJAS 45.MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3.POSMS (41.-60.)

9.klase (41.-45.)

41. Dots, ka $x^3 > 2$. Pierādīt, ka

a) $x^6 > 4$
b) $x^7 > 5$

42. Dots, ka x un y - naturāli skaitļi un x + y = 1995.

Pierādīt, ka $x \cdot y$ nedalās ar 1995.

43. Divu koncentrisku riņķa līniju rādiusi ir R un r (R > r). Taisnstūra ABCD virsotnes A un B atrodas uz lielākās riņķa līnijas, C un D - uz mazākās.

a) Kāds ir lielākais iespējamais taisnstūra ABCD laukums?
b) Atrast, kādi šajā gadījumā ir tā malu garumi!

44. Plaknē doti 1995 sarkani punkti; nekādi 3 no tiem neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka var novilkt riņķa līniju, kura iet caur vismaz 3 sarkaniem punktiem un kuras iekšpusē sarkano punktu nav.

45. Katrs klases skolēns apmeklē divus pulciņus. Katriem diviem skolēniem var atrast vismaz vienu pulciņu, kuru viņi abi apmeklē. Pierādīt, ka ir pulciņš, kuru apmeklē vismaz divas trešdaļas visu klases skolēnu.

10.klase (46.-50.)

46. Dots, ka vienādojuma $x^2 + px + 1 = 0$ saknes ir α un β, vienādojuma $x^2 + qx + 1 = 0$ saknes ir γ un δ.

Pierādīt, ka $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)=(q-p)^2$

47. Neviens no četriem naturāliem skaitļiem a; b; c; d nedalās ar 5.

Pierādīt, ka izteiksmē $\pm\ a\ \pm\ b\ \pm\ c\ \pm\ d$ var tā izvēlēties “+” un “-“ zīmes skaitļu priekšā, lai iegūtās izteiksmes vērtība dalītos ar 5.

48. Izliekta daudzstūra laukums ir L un perimetrs P. Tā iekšpusē atrodas riņķis ar rādiusu R.

Pierādīt, ka $R \le \frac{2L}{P}$.

49. Turnīrā piedalījās n dalībnieki ($n \ge 2$). Katrs spēlēja ar katru citu vienu reizi; neizšķirtu nav. Par laureātu sauc katru dalībnieku A, kam izpildās sekojoša īpašība: ja A zaudējis kādam dalībniekam B, tad eksistē tāds trešais dalībnieks C, ka A uzvarējis pret C un C uzvarējis pret B. Zināms, ka turnīrā ir tikai viens laureāts.

Pierādīt, ka viņš uzvarējis visus pārējos dalībniekus.

50. Aplūkosim visas ciparu virknes garumā n, kas sastāv tikai no nullēm un vieniniekiem (pieļaujamas arī virknes, kurās visi cipari vienādi).

Kādu lielāko daudzumu šādu virkņu var izvēlēties, lai katras divas izvēlētās virknes atšķirtos viena no otras vismaz divās pozīcijās?

(Saka, ka divas virknes atšķiras i-jā pozīcijā, ja vienā no tām i-tais cipars ir 0, bet otrā i-tais cipars ir 1).

11.klase (51.-55.)

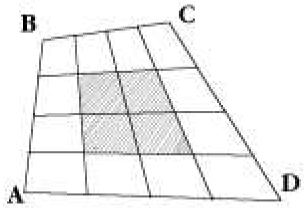
51. Atrast kaut vienu tādu naturālu skaitli A, kas vienlaicīgi apmierina šādas trīs īpašības:

a) pareizinot A ar 2, iegūst naturāla skaitļa kvadrātu,
b) pareizinot A ar 3, iegūst naturāla skaitļa kubu,
c) pareizinot A ar 5, iegūst naturāla skaitļa piekto pakāpi.

52. Uz n kartītēm uzrakstīts pa vienam pozitīvam skaitlim (starp tiem var būt arī vienādi). Ar b_k ($k = 1; 2; 3; \dots$) apzīmēsim to kartīšu skaitu, uz kurām uzrakstītie skaitļi nav mazāki par k.

Pierādīt, ka visu uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summa nav mazāka par $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$(saskaitām visus b_i, kas nav 0). Kad pastāv vienādība?

53. Izliektā četrstūrī ABCD katra mala sadalīta 4 vienādās daļās, un dalījuma punkti savienoti ar taisnes nogriežņiem (skat. *3. zīm.*).



3.zīm.

Pierādīt, ka iesvītroto 4 rūtiņu kopējais laukums ir $\frac{1}{4}$ no ABCD laukuma.

54. Dots, ka saskaitot jebkurus divus no skaitļiem $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5$, rezultāts nav negatīvs.

Pierādīt: ja $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$ un $x_1; x_2; x_3; x_4; x_5$ nav negatīvi, tad

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 \ge a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 + a_5x_5^2.$$

55. Izliektā n-stūrī jānovelk n-3 diagonāles tā, lai tas sadalītos n-2 trijstūros un lai nekādām divām novilktajām diagonālēm nebūtu citu kopēju punktu, izņemot varbūt galus. Bez tam nepieciešams, lai iegūto nogriežņu sistēmu (n-stūra malas un novilktās diagonāles) varētu uzzīmēt kā slēgtu lauztu līniju ar vienu vilcienu, neatraujot zīmuli no papīra un nevienu nogriezni nenovelkot vairāk par vienu reizi.

Vai to var izdarīt, ja

a) n = 1994,
b) n = 1995 ?

12.klase (56.-60.)

56. Atrisināt vienādojumu

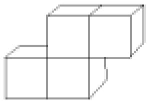
$$4\sin x\cdot\cos x = \mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x.$$

57. Pierādīt, ka katram naturālam n

a) $1^3+2^3+\ldots+n^5$ dalās ar $1+2+\ldots+n$,

b) $1^5+2^5+\ldots+n^5$ dalās ar $1+2+\ldots+n$,

58. Figūra CIBA sastāv no 4 vienādiem kubiņiem; daži no tiem saskaras pa skaldnēm (*sk. 4.zīm.*)



4.zīm.

a) pierādīt, ka no figūrām CIBA var salikt paralēlskaldni,

b) vai no figūrām CIBA var salikt kubu (vienalga kādu) ?

59. Konferencē piedalās 25 zinātnieki; daži no tiem ir pazīstami savā starpā. (Uzskatām: ja A pazīst B, tad B pazīst A.) Neviens zinātnieks nepazīst visus pārējos; ja divi zinātnieki viens otru nepazīst, tad tiem ir vismaz viens kopīgs paziņa.

Pierādīt: ja katram zinātniekam aprēķina viņa paziņu skaitu un iegūtos skaitļus saskaita, tad summa nav mazāka par 72.

60. Ar a_n apzīmējam to dažādo veidu skaitu, kuros n var izsacīt kā tādu saskaitāmo summu, kas nepieņem citas vērtības kā 1; 3; 4. Pieļaujamas arī summas, kas sastāv no viena saskaitāmā. Veidus, kas atšķiras tikai ar saskaitāmo kārtību, uzskatām par dažādiem.

Piemēram, $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_3 = 2$; $a_4 = 4$

Pierādīt: ja n-pāra skaitlis, tad a_n ir naturāla skaitļa kvadrāts.

LATVIJAS 45.MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 4.KĀRTA (61.-65.)

61. Funkcijas f(n) arguments var pieņemt vērtības 1; 2; 3; … . Zināms, ka

1) katram naturālam n $f(f(n)) = 4n - 3$,

2) $f(2^k) = 2^{k+1} - 1$, ja $k = 0; 1; 2; \ldots$.

Aprēķināt f(8065).

62. Naturālu skaitli sauksim par baltu, ja tas dod atlikumu 1, dalot ar 4, un par melnu, ja tas dod atlikumu 3, dalot ar 4.

Pierādīt, ka katram naturālam n balto dalītāju nav mazāk nekā melno.

63. Dots, ka $0 < x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{n-1} \le x_n$, $n \ge 3$. Pierādīt, ka

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1} \ge \frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\ldots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_1}{x_n}.$$

64. Trijstūra leņķu lielumi ir $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$ un $\frac{4\pi}{7}$.

Pierādīt, ka tā malu viduspunkti un augstumu pamati ir regulāra septiņstūra virsotnes.

65. Vai no naturāliem skaitļiem, kas mazāki par 100, var izvēlēties n skaitļus tā, lai visas izvēlēto skaitļu summas pa 1, pa 2, …, pa n būtu dažādas?

Atrisināt uzdevumu, ja

a) n=10,

b) n=8,

c) n=9.

LATVIJAS 22. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE (66.-85.)

9.klase (66.-70.)

66. Vienādojumiem $x^2 + 2ax + b^2 = 0$ un $x^2 + 2bx + c^2 = 0$ katram ir divas dažādas saknes. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 + 2cx + a^2 = 0$ sakņu nav.

67. Apskatām naturālus skaitļus no 1 līdz 1995 ieskaitot. Izvēlamies no tiem kaut kādus 998 skaitļus.

Pierādīt, ka starp izvēlētajiem noteikti ir divi tādi, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

68. Trijstūra malu garumi ir a; b; c; pie tam $a \leq b \leq c$; tā laukums ir 2. Pierādīt, ka $b \geq 2$.

69. Naturālu skaitli sauc par līdzsvarotu, ja kāds tā sākuma fragments vienāds ar kādu beigu fragmentu. Piemēram, līdzsvaroti ir skaitļi <u>31</u><u>31</u>; <u>23</u>0<u>23</u>; <u>4</u>563<u>4</u>.

Pierādīt, ka eksistē skaitlis, kurš kļūst līdzsvarots, ja tam galā pieraksta

a) jebkuru no cipariem 1; 2; 3,
b) jebkuru no cipariem 1; 2; 3; 4; 5,
c) jebkuru nenulles ciparu.

70. Uz trijstūra ABC malām AB, AC, BC ņemti attiecīgi punkti M, N, K.

Pierādīt, ka riņķa līnijas, kas apvilktas ap trijstūriem AMN, BMK, CNK, krustojas vienā punktā.

10.klase (71.-75.)

71. Divi krēgi, trīs terbuki un pieci dilleri kopā maksā 53 santīmus, bet trīs krēgi, pieci terbuki un deviņi dilleri kopā maksā 91 santīmu.

Cik kopā maksā viens krēgs, viens terbuks un viens dillers?

72. Naturāla skaitļa x ciparu summu apzīmēsim ar S(x). Pierādīt, ka

a) katram naturālam n pastāv nevienādība

$$S(8n) \geq \frac{1}{8}\cdot S(n),$$

b) bezgalīgi daudziem naturāliem n pastāv vienādība

$$S(8n) = \frac{1}{8}\cdot S(n).$$

73. Uz šaurleņķu trijstūra ABC malām kā pamatiem ārpus ABC konstruēti regulāri trijstūri. Pierādīt, ka šiem regulārajiem trijstūriem apvilktās riņķa līnijas krustojas vienā punktā.

74. Dotas 5 bezgalīgas augošas aritmētiskās progresijas, kas sastāv no naturāliem skaitļiem. To diferences ir a; b; c; d; e, pie tam pastāv nevienādība

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}<1.$$

Pierādīt: eksistē naturāls skaitlis, kas nepieder nevienai no šīm progresijām.

75. Caur trijstūra ABC virsotnēm vilktas savstarpēji paralēlas taisnes līdz krustpunktiem ar pretējām malām vai to pagarinājumiem.

Pierādīt, ka tā trijstūra laukums, kura virsotnes ir šie krustpunkti, ir divas reizes lielāks par ABC laukumu.

11.klase (76.-80.)

76. Pierādīt: neatkarīgi no tā, kādi ir skaitļi a_1; b_1; c_1; a_2; b_2; c_2; a_3; b_3; c_3; (zināms, ka neviens no tiem nav 0), sistēmā

$$\begin{cases} a_1x + b_1y * c_1 \\ a_2x + b_2y * c_2 \\ a_3x + b_3y * c_3 \end{cases}$$

katras zvaigznītes vietā var ievietot “<” vai “>” tā, lai iegūtajai nevienādību sistēmai nebūtu atrisinājuma.

77. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$x(x+1)=y^7$$

78. Telpā doti 4 punkti, kas visi neatrodas vienā plaknē.

Cik ir tādu paralēlskaldņu, kam šie 4 punkti ir virsotnes?

79. Uz izliekta četrstūra ABCD malām AB, BC, CD, DA atrodas attiecīgi punkti M, N, P, Q. Zināms, ka MNPQ ir kvadrāts un MB = NC = PD = QA.

Pierādīt, ka ABCD ir kvadrāts.

80. Kvadrātiska tabula sastāv no nxn rūtiņām, $n \geq 2$. Katrā rūtiņā ierakstīts kaut kāds burts. Zināms, ka katras divas rindiņas atšķiras viena no otras vismaz vienā vietā.

Pierādīt: var izsvītrot vienu kolonnu tā, ka palikušajā tabulā katras divas rindiņas joprojām atšķirsies viena no otras vismaz vienā vietā.

12.klase (81.-85.)

81. Atrisināt vienādojumu

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = 1.$$

82. Izliektam daudzskaldnim visas skaldnes ir trijstūri.

Cik tam var būt skaldņu?

83. Vai eksistē divu argumentu polinoms P(x,y), kam vienlaicīgi piemīt sekojošas divas īpašības:

a) katriem x un y $P(x,y) > 0$
b) lai arī kāds būtu pozitīvs skaitlis c, eksistē tādi x un y, ka $P(x,y) = c$.

84. Ar S(x) apzīmēsim naturāla skaitļa ciparu summu. Pieņemsim, ka A - kaut kāds fiksēts skaitlis.

Pierādīt, ka ir tikai galīgs skaits tādu naturālu n, ka $S(2^n) < A$.

85. Četru vienādu riņķa līniju centri atrodas kvadrāta virsotnēs.

Kā jāizvēlas punkti A, B, C, D, lai katrs no tiem piederētu savai riņķa līnijai un četrstūra ABCD laukums būtu maksimāli liels?

LATVIJAS IZLASES ATLASES SACENSĪBAS 36. STARPTAUTISKAJAI MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDEI KANĀDĀ (86.-91.)

1. diena (86.-88.)

86. Pierādīt, ka vienādojumam

$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_6)(x_6 - x_7)(x_7 - x_1) =$$
$$= (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_5)(x_4 - x_6)(x_5 - x_7)(x_6 - x_1)(x_7 - x_2)$$

eksistē atrisinājums naturālos skaitļos, kuram visi x_i, $1 \le i \le 7$, ir dažādi.

87. Skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pieder intervālam $[a;b]$, kur $a > 0$. Apzīmēsim

$$S_1 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \quad S_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}$$

Pierādīt, ka $S_2 \le \frac{(a+b)^2}{4ab} \cdot S_1^2$. Kad pastāv vienādība?

88. Konditoru kursos katru dienu viena daļa dalībnieku gatavo cepumus, kurus pārējie dalībnieki degustē. Neviens konditors negatavo cepumus un nedegustē tos vienā un tai pašā dienā. Pavisam kursos piedalās 21 dalībnieks. Kāds mazākais dienu skaits pietiekams, lai katrs konditors paspētu nogaršot katra cita gatavotos cepumus?

2. diena (89.-91.)

89. Riņķa līnija sadalīta 200 vienādos lokos. Dalījuma punktos ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 99. Pierādīt, ka var atrast tādas vienādas un paralēlas hordas, kas savieno dalījuma punktus, kuru galos ierakstīto skaitļu summas ir vienādas.

90. Atrast visus tādus polinomus f(x), kam eksistē polinoms p(t) ar īpašību: visiem x $f(x^2)=p(f(x))$. Apskatām tikai polinomus, kuru pakāpe ir vismaz 1.

91. Riņķī ievilkts sešstūris ABCDEF, pie tam AB = CD = EF.

Pierādīt, ka tā trijstūra augstumu krustpunkts, kura virsotnes ir attiecīgi AC un BD, CE un DF, EA un BF krustpunkti, sakrīt ar riņķa centru.

36. STARPTAUTISKĀS MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES UZDEVUMI (92.-97.)

1. diena(92.-94.)

92. Punkti A, B, C, D šajā secībā atrodas uz taisnes. Riņķa līnijas, kuru diametri ir AC un BD, krustojas punktos X un Y. Taisne XY krusto BC punktā Z. Uz taisnes XY atzīmēts punkts P, kas atšķiras no Z. Taisne CP krusto riņķa līniju ar diametru AC punktos C un M, taisne BP krusto riņķa līniju ar diametru BD punktos B un N. Pierādīt, ka taisnes AM, DN un XY iet caur vienu punktu.

93. Dots, ka a, b, c ir pozitīvi skaitļi, kuru reizinājums ir 1. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}.$$

94. Kādiem naturāliem n, n > 3, plaknē var atrast n punktus $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un reālus skaitļus $r_1, r_2, \ldots, r_n$ tā, lai vienlaicīgi

a) nekādi trīs no punktiem $A_1, A_2, \ldots, A_n$ neatrastos uz vienas taisnes,
b) katriem i, j, k, kur $1 \le i < j < k \le n$, trijstūra $A_iA_jA_k$ laukums būtu $r_i + r_j + r_k$.

2.diena (95.-97.)

95. Pozitīvu reālu skaitļu virknē $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ pastāv sekojošas sakarības:

a) $x_0 = x_{1995}$
b) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$, ja i = 1; 2; …; 1995.

Atrast lielāko iespējamo x_0 vērtību.

96. Dots, ka ABCDEF ir izliekts sešstūris, pie tam AB = BC = CD, DE = EF = FA un $\angle BCD = \angle EFA = 60^0$. Punkti G un H atrodas sešstūra iekšpusē, pie tam $\angle AGB = \angle DHE = 120^0$.

Pierādīt, ka $AG + GB + GH + DH + HE \ge CF$.

97. Dots, ka p ir nepāra pirmskaitlis. Cik ir tādu kopas {1; 2; 3; …; 2p-1; 2p} apakškopu, kam ir tieši p elementi un kuru elementu summa dalās ar p ?

KOMANDU OLIMPIĀDES “BALTIJAS CEĻŠ - 94” UZDEVUMI (98.-117.)

98. Apzīmēsim izteiksmi a + b - ab ar $a \circ b$. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu

$$(x \circ y) \circ z + (y \circ z) \circ x + (z \circ x) \circ y = 0.$$

99. Skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_9$ nav negatīvi, pie tam $a_1 = a_9 = 0$. Vismaz viens no šiem 9 skaitļiem nav 0.

Pierādīt, ka kādam i, $2 \le i \le 8$, pastāv nevienādība $a_{i-1} + a_{i+1} < 2a_i$.

Vai apgalvojums paliek spēkā, ja koeficientu 2 aizstāj ar 1,9?

100. Kāda ir lielākā izteiksmes

$$xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \text{ vērtība?}$$

101. Vai ir tāds vesels skaitlis n, ka

$$\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} \text{ ir racionāls skaitlis?}$$

102. Zināms, ka p(x) ir polinoms ar veseliem koeficientiem. Gan vienādojumam p(x) = 1, gan vienādojumam p(x) = 3 eksistē veselas saknes.

Vai vienādojumam p(x) = 2 var būt divas dažādas veselas saknes?

103. Dots, ka p un q - pozitīvi veseli skaitļi un daļa $\frac{p}{q}$ nav saīsināma, pie tam q- nepāra skaitlis.

Pierādīt, ka var atrast tādus naturālus skaitļus n un k, ka $\frac{p}{q} = \frac{n}{2^k - 1}$.

104. Dots, ka p>2, p - pirmskaitlis un

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^3} = \frac{m}{n}, \text{ kur } m, n \in N.$$

Pierādīt, ka m dalās ar p.

105. Dots, ka $a \ge 5$, $a \in N$. Pierādīt, ka eksistē tādi naturāli skaitļi b un c, ka $c \ge b \ge a$ un a, b, c ir kāda taisnleņķa trijstūra malu garumi.

106. Kādiem pozitīviem veseliem skaitļiem a un b skaitlis $2^a + 3^b$ ir vesela skaitļa kvadrāts?

107. Cik ir naturālu skaitļu, kas vienlaicīgi apmierina sekojošas prasības:

a) visi cipari ir no kopas {1; 2; 3; 4; 5},
b) katri divi blakus cipari atšķiras par 1,
c) skaitlim ir tieši 1994 cipari ?

108. Dots, ka NS un EW ir riņķa līnijas C perpendikulāri diametri. Taisne *l* pieskaras C punktā S. Punkti A un B pieder C un ir savstarpēji simetriski attiecībā pret EW. Taisnes *l* krustpunktus ar NA resp. NB apzīmēsim ar A_1 resp. B_1. Pierādīt, ka $SA_1 \cdot SB_1 = SN^2$.

109. Trijstūrī $A_1A_2A_3$ ievilktā riņķa līnija pieskaras malām A_2A_3, A_3A_1 un A_1A_2 attiecīgi punktos S_1, S_2, S_3. Trijstūros $A_1S_2S_3$, $A_2S_3S_1$, $A_3S_1S_2$ ievilkto riņķa līniju centrus apzīmēsim attiecīgi ar O_1, O_2, O_3. Pierādīt, ka taisnes O_1S_1, O_2S_2 un O_3S_3 krustojas vienā punktā.

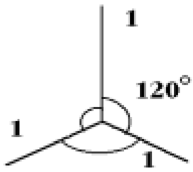
110. Atrast mazāko iespējamo a vērtību, ja kvadrātā ar malas garumu a var ievietot piecus riņķus ar rādiusiem 1, kam nav kopēju iekšēju punktu.

111. Trijstūra malu garumi ir a, b, c; tām pretējo leņķu lielumi ir α, β, γ. Pierādīt, ka

$$a\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+b\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)+c\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\geq 2\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right).$$

112. Vai eksistē tāds trijstūris, kura perimetrs ir 1995 un visu malu un augstumu garumi ir veseli skaitļi?

113. Brīnumsalā dzīvo Eži. Katrs Ezis sastāv no trim nogriežņiem ar garumu 1, kas savienoti ar galapunktiem un pa pāriem veido 120^0 leņķus (*sk. 5.zīm.*)



5.zīm.

Visi Eži atrodas plaknē un nepieskaras viens otram. Pierādīt, ka Ežu ir tikai galīgs skaits.

114. Kādā karaļvalstī valdnieks nolēmis uz 13 neapdzīvotām salām uzcelt 25 pilsētas tā, lai uz katras salas atrastos vismaz viena pilsēta. Starp katrām divām jaunceltajām pilsētām, kas atrodas uz dažādām salām, jānodibina kuģīšu satiksme. Kāds ir mazākais iespējamais jauno satiksmes līniju skaits, ja katra no tām savieno divas pilsētas, neiegriežoties citās ?

115. Plaknē dotas n taisnes, n>2. Nekādas divas no tām nav paralēlas un nekādas trīs neiet caur vienu punktu. Katram krustpunktam tiek pierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz n-1 ieskaitot. Kādām n vērtībām iespējams panākt, lai uz katras taisnes atrastos visi naturālie skaitļi no 1 līdz n-1?

116. Brīnumsalas izlūkdienests nosūtījis uz Tartu 16 spiegus. Katrs no tiem izseko dažus savus kolēģus. Ir zināms, ka nekādi divi spiegi neizseko viens otru. Katrus desmit spiegus var nostādīt pa apli tā, ka katrs no viņiem izseko savu kaimiņu pa labi.

Pierādīt, ka arī katrus 11 spiegus var nostādīt pa apli tā, lai katrs no viņiem izsekotu savu kaimiņu pa labi.

117. Vienādmalu trijstūris sadalīts 9 000 000 vienādos vienādmalu trijstūrīšos, novelkot taisnes paralēli tā malām. Katra no mazo trijstūrīšu virsotnēm nokrāsota vienā no trim krāsām. Pierādīt, ka var atrast trīs punktus, kas nokrāsoti vienā un tai pašā krāsā un ir tādas trijstūra virsotnes, kura malas paralēlas sākotnējā trijstūra malām.

ATRISINĀJUMI

SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE (1.-20.)

1. Pierādāmās vienādības kreiso pusi pārveido, izmantojot vispirms kubu summas formulu un tad doto sakarību a + b = 1:

$$a^3 + b^3 + 3ab = (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab = a^2 - ab + b^2 + 3ab \quad (*)$$

Pēc līdzīgo locekļu savilkšanas, izmantojot summas kvadrāta formulu un vēlreiz sakarību a + b = 1, iegūst vajadzīgo:

$$(*) = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = 1.$$

2. Mazākais pieskaršanos skaits vienai riņķa līnijai ir 0, lielākais - 9. Pieņemsim, ka nav tādu divu riņķa līniju, kas pieskartos vienādam skaitam pārējo, t.i., katra no 10 riņķa līnijām pieskaras atšķirīgam skaitam pārējo. Tādā gadījumā būtu jārealizējas reizē visām vērtībām 0; 1; …; 9. Tā nevar būt - ja kāda riņķa līnija nepieskaras nevienai, tad nav nevienas, kas pieskartos visām. Tātad 10 riņķa līnijām ir augstākais 9 dažādi pieskaršanos skaiti. Tāpēc divi no šiem skaitiem ir vienādi.

3. Nē. Aplūkosim patvaļīgus četrus dažādus naturālus skaitļus a, b, c, d. Tā kā tie ir dažādi, tad apzīmējumus izvēlamies tā, lai a < b < c < d. Tā kā pieņemam, ka d - vislielākais no šiem četriem skaitļiem, tad summa

$$a + b + c + d < d + d + d + d = 4d \qquad (1)$$

Tā kā $a \geq 1$ un visi aplūkotie skaitļi naturāli, tad $b \geq 2$, $c \geq 3$; tāpēc reizinājums

$$abcd \geq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot d = 6d \qquad (2)$$

No (1) un no (2) seko, ka

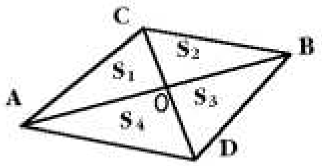
$$a + b + c + d < 4d < 6d \leq abcd,$$

t.i., šo skaitļu summa vienmēr būs mazāka par reizinājumu.

4. Dots: $S_1+S_2= S_3+S_4$ (1)

$S_1+S_4= S_2+S_3$ (2)

(*sk. 6.zīm.*)



6.zīm.

Atņemot vienādības (1) - (2), iegūst

$$(S_1 + S_2) - (S_1 + S_4) = (S_3 + S_4) - (S_2 + S_3),$$

tādējādi $S_2 - S_4 = S_4 - S_2$ un pēc vienādo locekļu pārnešanas vienā pusē var secināt, ka

$$S_2 = S_4 \qquad (3)$$

Savukārt saskaitot (1) un (2), iegūst

$$(S_1 + S_2) + (S_1 + S_4) = (S_3 + S_4) + (S_2 + S_3)$$
$$2S_1 + S_2 + S_4 = 2S_3 + S_2 + S_4$$
$$2S_1 = 2S_3$$
$$S_1 = S_3 \qquad (4)$$

Aplūko ΔACO un ΔBCO. Tiem abiem ir kopīgs augstums no virsotnes C - vienā gadījumā pret pamatu AO, otrā - pret BO. Līdzīgi, aplūkojot ΔADO un ΔBDO, var secināt, ka tiem ir kopīgs augstums no virsotnes D attiecīgi pret tiem pašiem pamatiem AO un BO. Trijstūriem ar vienādiem augstumiem laukumi attiecas kā pamati, tāpēc

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AO}{OB} = \frac{S_4}{S_3}; \text{ no šejienes } S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4.$$

Izmantojot sakarības (3) un (4), no pēdējās vienādības seko:

$$S_1^2 = S_2^2, \text{ tādējādi } S_1 = S_2 \; (= S_3 = S_4).$$

Līdz ar to arī $\frac{AO}{OB} = \frac{S_1}{S_2} = 1$ jeb AO = OB.

Līdzīgi pierāda, ka arī otra diagonāle dalās krustpunktā O uz pusēm. Pēc teorēmas par četrstūra diagonāļu dalīšanos uz pusēm seko, ka aplūkotais četrstūris ir paralelograms.

5. Aplūko divus iespējamos atrisinājumus.

I. Pareizinām pirmo saskaitāmo ar vieninieku formā (2-1) (no kreisās puses) un vairākas reizes pielietojam formulu $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$.

Tādējādi dotā izteiksme pārveidojas sekojoši:

$$\begin{gathered}(2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) + 1 = \\ = (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) + 1 = \\ = (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) + 1 = \\ = (2^8 - 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) + 1 = \\ = (2^{16} - 1)(2^{16} + 1) + 1 = \\ = 2^{32} - 1 + 1 = 2^{32}\end{gathered}$$

Tādējādi šis skaitlis patiešām ir divnieka pakāpe ar naturālu kāpinātāju.

II. Dotajā reizinājumā $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$ pakāpeniski ver vaļā iekavas un vēro, kādus saskaitāmos iegūst.

Ja no visām iekavām kā reizinātājus izvēlas vieniniekus, tad iegūtais saskaitāmais ir

$$1\ (= 1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1) = 2^0.$$

Ja no pirmajām iekavām ņem 2, bet no pārējām 1, tad iegūtais reizinājums ir

$$2\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1 = 2^1.$$

Tālāk var ievērot, ka, ņemot no otrajām iekavām 2^2, bet no pārējām 1, iegūst saskaitāmo $1\cdot2^2\cdot1\cdot1\cdot1 = 2^2$, savukārt, no pirmajām iekavām ņemot 2, no otrajām 2^2 un no pārējām ņemot 1, iegūst 2^3. Turpinot tālāk līdzīgā veidā, iegūst arī tālākās 2 pakāpes līdz 2^{31} (ieskaitot). Pēdējo iegūst, no visām iekavām izvēloties 2 nenulles pakāpes (1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31).

Tā kā iegūtā summa

$$1+2+2^2+\ldots+2^{30}+2^{31}$$

satur ģeometriskās progresijas ar kvocientu q = 2 locekļus, tad to var aprēķināt ar ģeometriskās progresijas summas formulu:

$$S_{32} = 1\cdot\frac{2^{32}-1}{2-1} = 2^{32} - 1$$

Tā kā uzdevumā dotajam skaitlim pie reizinājuma pieskaitīts 1, tad šis skaitlis ir

$$2^{32}-1+1=2^{32}.$$

Tiešām divnieka pakāpe ar naturālu kāpinātāju.

6. Lai patvaļīgam vienādojumam formā

$$x^2 + 2kx + c = 0$$

būtu atrisinājums, vienīgais nosacījums ir - tā diskriminantam jābūt nenegatīvam, šajā gadījumā jābūt $k^2- c \geq 0$.

Aplūkojot uzdevumā dotos vienādojumus, jābūt

$$a^2 - b^2 \geq 0 \text{ un } b^2 - a^2 \geq 0.$$

Bet tas iespējams arī, piemēram, pie a =1, b = - 1, tātad ne obligāti vajag a = b.

7. Jebkuru naturālu skaitli, kas lielāks par 1, var sadalīt pirmskaitļu pakāpju reizinājumā $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$. Lai skaitlis būtu kāda skaitļa kvadrāts, ir nepieciešami un pietiekami, ka pirmskaitļu kāpinātāji ir pāra skaitļi. Tādā gadījumā skaitli

$$p_1^{2\alpha_1}\cdot p_2^{2\alpha_2}\cdot p_3^{2\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{2\alpha_n}$$

var uzrakstīt formā $(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n})^2$ - kā naturāla skaitļa kvadrātu. Skaitlis $2^n + 2$ dalās ar 2. Tādējādi, lai dotais skaitlis būtu kāda skaitļa kvadrāts, tam jādalās vismaz ar $2^2=4$. Ja n $\geq$ 2, tas nedalās ar 4 (pirmais saskaitāmais dalās ar 4, otrais nē), tātad nav kvadrāts. Vērtība n = 1 der: $2^1 + 2 = 4 = 2^2$.

8. No teorēmas par to punktu ģeometrisko vietu, no kuriem dotu nogriezni redz fiksētā leņķī, seko: ap AMNKB var apvilkt riņķa līniju. Tātad bisektrises krustojas ap AMNKB apvilktās riņķa līnijas loka AB viduspunktā.

9. Lai noskaidrotu, kurš no skaitļiem lielāks, aplūko šo skaitļu starpību

$$(a^4 + b^4 + c^4) - (a^3 + b^3 + c^3).$$

Izmantojot doto sakarību $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2$, vienu no šiem skaitļiem var starpībai pieskaitīt, otru atņemt, rezultātu neizmainot:

$$(a^4 + b^4 + c^4) - (a^3 + b^3 + c^3) =$$
$$= (a^4 + b^4 + c^4) - (a^3 + b^3 + c^3) - (a^2 + b^2 + c^2) + (a + b + c) = (*)$$

Tālāk sagrupē locekļus pēc mainīgajiem a, b un c un katru grupu sadala reizinātājos:

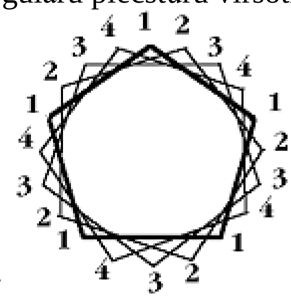
$$(*) = (a^4 - a^3 - a^2 + a) + (b^4 - b^3 - b^2 + b) + (c^4 - c^3 - c^2 + c) =$$
$$= a(a^3 - a^2 - a + 1) + b(b^3 - b^2 - b + 1) + c(c^3 - c^2 - c + 1) =$$
$$= a(a^2(a - 1) - (a - 1)) + b(b^2(b - 1) - (b - 1)) + c(c^2(c - 1) - (c - 1)) =$$
$$= a(a - 1)(a^2 - 1) + b(b - 1)(b^2 - 1) + c(c - 1)(c^2 - 1) = (**)$$

Tā kā ir svarīgi noskaidrot, vai iegūtā summa ir pozitīva vai negatīva, tās saskaitāmos pārveido tādā formā, lai par katru būtu viegli noteikt, vai tas ir pozitīvs vai negatīvs:

$$(**) = a(a - 1)(a - 1)(a + 1) + b(b - 1)(b - 1)(b + 1) + c(c - 1)(c - 1)(c + 1) =$$
$$= a(a + 1)(a - 1)^2 + b(b + 1)(b - 1)^2 + c(c + 1)(c - 1)^2.$$

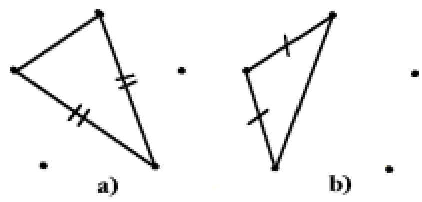
Tā kā a, b, c - pozitīvi, kā arī skaitļu kvadrāti ir nenegatīvi, tad katrs saskaitāmais kā nenegatīvu skaitļu reizinājums arī ir nenegatīvs. Līdz ar to visa summa ir nenegatīva. Tā kā bija zināms, ka interesējošie lielumi (kubu un ceturto pakāpju summas) nav vienādi, tad no $(a^4 + b^4 + c^4) - (a^3 + b^3 + c^3) \geq 0$ var secināt, ka kubu summa ir mazāka.

10. Visas 20-stūra virsotnes sadalām 4 regulāru piecstūru virsotņu komplektos (*sk. 7.zīm.*).



7.zīm.

Pieņem, ka katrs šāds piecstūris satur ne vairāk kā divas baltās virsotnes. Tad baltas būtu ne vairāk kā 4·2 = 8 virsotnes. Tā kā patiesībā tādas ir tieši 9, tad vismaz viens no aplūkotajiem piecstūriem satur ≥ 3 baltās virsotnes. Visbeidzot atliek ievērot: katras trīs no regulāra piecstūra virsotnēm veido vienādsānu trijstūri (visi iespējamie gadījumi aplūkoti *8.zīm. a)* un *b)* gadījumos.)



8.zīm.

11. Nav atrisinājuma. Pierādījumam aplūko summu |x-1| + |x-5|. Tā ir attālumu summa no punkta x līdz punktiem 1 un 3. Zināms, ka |AB| + |BC| $\geq$ |AC|. Tātad, ja ar B apzīmē x atrašanās vietu uz koordinātu ass, ar A - skaitļa 1, bet ar C - skaitļa 5 atrašanās vietu uz koordinātu ass, tad nevienādībā minētie nogriežņu garumi ir to galapunktu vērtību starpības moduļi. Tādējādi šo nevienādību var pierakstīt sekojošā veidā:

$$|x - 1| + |x - 5| \geq |1 - 5| = 4.$$

Tā kā $|x - 3| \geq 0$, tad uzdevumā dotā summa nevar būt < 4, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumu, ka $|x - 1| + |x - 3| + |x - 5| = 3$.

12. Tā kā naturālu skaitļu reizinājums abc dalās ar 3, bet nedalās ar 9, tad <u>tieši</u> viens no skaitļiem a, b, c dalās ar 3. Šī skaitļa kvadrāts $(3t)^2 = 9t^2$. Aplūko pārējos divus skaitļus. Atkarībā no atlikuma, kādu šie skaitļi dod, dalot ar 3, tie var būt tikai formā 3t + 1 vai 3t + 2, kur t - naturāls skaitlis. Aplūko šo skaitļu kvadrātus:

$$(3t + 1)^2 = 9t^2 + 6t + 1 = 3(3t^2 + 2) + 1 \text{ un}$$
$$(3t + 2)^2 = 9t^2 + 12t + 4 = 3(3t^2 + 4t + 1) + 1.$$

Tātad $a^2 + b^2 + c^2$ izsakāms formā

$$9t^2 + (3m + 1) + (3n + 1) = 3k + 2,\ k \in N,$$

tātad tiešām nedalās ar 3 bez atlikuma.

13. Pārnes visus nevienādības locekļus vienā pusē. Tādējādi jāpierāda, ka

$$a^2 + b^2 + 2 - a - b - ab > 0. \qquad (1)$$

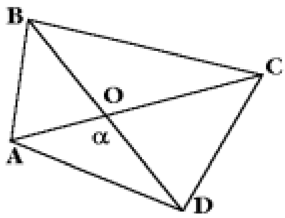
Nevienādības (1) kreiso pusi cenšas pārveidot tā, lai tā saturētu pilnu kvadrātu summu. To veic, katru no saskaitāmajiem uzrakstot kā divu (vai vairāku) vienādu saskaitāmo summu un pēc tam attiecīgi sagrupējot:

$$\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}2ab + \frac{1}{2}b^2\right) + \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}2a + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}2b + \frac{1}{2}\right) + 1 =$$
$$= \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2) + \frac{1}{2}(a^2 - 2a + 1) + \frac{1}{2}(b^2 - 2b + 1) + 1 =$$
$$= \frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{1}{2}(a - 1)^2 + \frac{1}{2}(b - 1)^2 + 1 > 0.$$

Tā kā skaitļu kvadrāti ir nenegatīvi, tad, ja to summai pieskaita 1, iegūtā izteiksme kļūst stingri pozitīva. Līdz ar to arī vajadzīgā nevienādība (1) ir pierādīta.

14. Dots: AC = AO + OC = 20,
BD = BO + OD = 20.

Jāpierāda: AB >14 vai BC > 14, vai CD > 14, vai DA > 14.



9.zīm.

Ja $\alpha \geq 90^0$, tad $AD^2 \geq AO^2 + OC^2$ un $BC^2 \geq BO^2 + OD^2$, tādējādi

$$AD^2 + BC^2 \geq AO^2 + OC^2 + BO^2 + OD^2 =$$
(no dotā)
$$= AO^2 + OD^2 + (20 - AO)^2 + (20 - OD)^2 =$$
$$= AO^2 + OD^2 - 2\cdot20\cdot AO + AO^2 + 20^2 - 2\cdot20\cdot OD + OD^2 + 20^2 =$$
$$= 2\cdot AO^2 - 40\cdot AO + 2\cdot OD^2 - 40\cdot OD + 800 =$$
$$= 2(AO^2 - 20\cdot AO + 100) + 2(OD^2 - 20\cdot OD + 100) + 400 =$$
$$= 2(AO-10)^2 + 2(OD-10)^2 + 400 \geq 400.$$

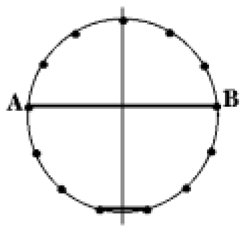
No tā, ka $AD^2 + BC^2 \geq 400$, seko $AD^2 \geq 200$ vai $BC^2 \geq 200$ (ja $AD^2 < 200$ un $BC^2 < 200$, tad $AD^2 + BC^2 < 400$), līdz ar to arī AD > 14 vai BC > 14, kas bija jāpierāda.

Ja $\alpha < 90^0$, tad aplūko tā blakusleņķi $\angle DOC = 180^0 - \alpha \geq 90^0$. Tālākais spriedums analogs iepriekšējam gadījumam, tikai attiecīgi par malām DC un AB.

15. Taisnes, kas savieno regulārā 13-stūra virsotnes, var iet dažādos virzienos. Visus virzienus var iegūt, aplūkojot nogriežņus, kas savieno katras 2 blakusvirsotnes kustības virzienā, tad iepriekšējā nogriežņa ar horizontāli veidotais leņķis no tam sekojošā nogriežņa veidotā leņķa atšķiras par $\frac{2\pi}{13}$. Tādējādi katru leņķi var izteikt formā $\frac{2\pi}{13}\cdot l$, kur l - naturāls skaitlis. Divi nogriežņi ir savstarpēji paralēli, ja to veidojošie leņķi atšķiras par $k\cdot\pi$, kur k - naturāls skaitlis. Tādējādi paralēli būs tie nogriežņi, kuru veidojošiem leņķiem $\frac{2\pi}{13}\cdot l_1$ un $\frac{2\pi}{13}\cdot l_2$ ir spēkā sakarība $\frac{2\pi}{13}\cdot l_1 = \frac{2\pi}{13}\cdot l_2 + k\pi$.

No šīs sakarības var iegūt $l_1 - l_2 = \frac{13}{2}\cdot k$, t.i., $l_1 - l_2$ var būt 13,26,… (ņem vērā to, ka l_1 un l_2 - veseli, tāpēc arī $l_1 - l_2$ ir vesels skaitlis). Bet tas nozīmē, ka aplūkotais nogrieznis ir "pārgājis" pats sevī, tātad starp 13 apskatītajiem nogriežņiem paralēlu nav.

Savienojot jebkuras 2 citas virsotnes (t.i., ne blakusvirsotnes), iegūtais nogrieznis būs paralēls kādam no blakusvirsotņu veidotajiem nogriežņiem (Aplūko simetriju pret asi, kas vilkta caur patvaļīgā nogriežņa viduspunktu un ir tam perpendikulāra. Tā kā regulārā daudzstūra virsotņu skaits ir nepāra, tad vienā pusē no šī nogriežņa (piem., sk. *10. zīm.* nogriezni AB) būs pāra skaits virsotņu, pie tam abās pusēs no ass - vienāds skaits (šajā gadījumā 3).



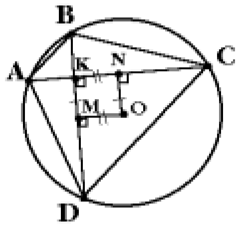
10.zīm.

To atbilstošo blakusvirsotņu, kas atrodas katra savā pusē asij, veidotais nogrieznis arī būs paralēls vilktajam patvaļīgajam.) Tātad jebkurš citādi vilkts nogrieznis jaunu virzienu neveidos. Tādējādi virzienu skaits vienāds ar malu skaitu - 13.

Savukārt, ja aplūko nogriežņu , kas savieno divus no melnajiem punktiem, skaitu, tas ir $\frac{6\cdot 5}{2}$ (katru no 6 punktiem var savienot ar 5 citiem, tātad var novilkt $6\cdot 5$ nogriežņus, pie tam AB = BA, tāpēc atšķirīgu nogriežņu skaits būs 2 reizes mazāks) = 15 > 13. **Tātad divi no šiem nogriežņiem ir paralēli**. Tā kā 13 - nepāra skaitlis, tad šīs hordas nav vienādas (pieņem, ka tās ir vienādas, tad tās uz aploces atšķeļ vienādu skaitu virsotņu (x); tā kā tās ir paralēlas, tad starp abām hordām abās pusēs arī ir vienāds skaits virsotņu (y); tādējādi pavisam uz aploces virsotņu skaits ir $2\cdot(x+y) + 4$ (aplūkoto hordu galapunkti) = 13. Tā ir pretruna, jo vienādības kreisajā pusē ir pāra skaitlis, bet labajā - nepāra. Tātad šīs hordas nevar būt vienādas.). Līdz ar to arī atbilstošais četrstūris ir trapece, nevis paralelograms (taisnstūris).

16. Nē. Lai tā būtu, tad $\log_a b = -k$, kur $k > 0$. Tādējādi $b = a^{-k} = \frac{1}{a^k}$. Ja $a > 1$, tad $a^k > 1$, līdz ar to $b < 1$. Savukārt, ja $a < 1$, tad $a^k < 1$, bet tāpēc $b > 1$. Tādējādi var apgalvot, ka a un b jāatrodas "dažādās pusēs" skaitlim 1, tāpat b un c (aplūkojot attiecīgi $\log_b c < 0$). Bet tad $\log_c a > 1$, jo gan a, gan c atrodas skaitļa 1 pretējā pusē attiecībā pret b, bet tas nozīmē, ka a un c atrodas "vienā pusē" skaitlim 1.

17. Dots: $AC \perp BD$. Diagonāļu krustpunktu apzīmē ar K. Četrstūrim apvilktās riņķa līnijas centru apzīmē ar O. Veic papildus konstrukciju- pret četrstūra diagonālēm AC un BD velk perpendikulus no riņķa līnijas centra O un krustpunktus apzīmē attiecīgi ar N un M. (*Sk. 11.zīm.*)



11.zīm.

No taisnleņķa trijstūriem Δ AKB, Δ BKC, Δ CKD un Δ DKA, izmantojot Pitagora teorēmu, izsaka četrstūra malu kvadrātu summu:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 =$$
$$= AK^2 + KB^2 + BK^2 + KC^2 + CK^2 + KD^2 + DK^2 + KA^2 =$$
$$= 2(AK^2 + BK^2 + CK^2 + DK^2) = (*).$$

Ja aplūko Δ AON un Δ CON, tie ir vienādi kā taisnleņķa trijstūri ar vienādām hipotenūzām (= R) un vienu no katetēm (ON), tādējādi arī AN = NC. Skaidrs, ka AN = NC arī tad, ja O atrodas uz AC (tad trijstūri AON un CON neveidojas, bet AN un NC ir rādiusi). Līdz ar to CK = CN + NK = AN + NK.

Analogi no Δ BOM un Δ DOM vienādības seko, ka

BM = MD, tādējādi DK = DM + MK = BM + MK.

Ievēro arī, ka AK = AN - KN un BK = BM - MK.

Tādējādi izteiksmi $(*)$ var pārveidot sekojoši:

$$(*) = 2(AN - KN)^2 + 2(BM - MK)^2 + 2(AN + NK)^2 + 2(BM + MK)^2 =$$
$$= 2(AN^2 - 2\cdot AN\cdot KN + KN^2 + AN^2 + 2\cdot AN\cdot KN + KN^2) +$$
$$+ 2(BM^2 - 2\cdot BM\cdot MK + MK^2 + BM^2 + 2\cdot BM\cdot MK + MK^2) = (**).$$

Savelkot līdzīgos locekļus, iegūst

$$(**) = 4\cdot AN^2 + 4\cdot KN^2 + 4\cdot BM^2 + 4\cdot MK^2.$$

Tā kā MKNO - taisnstūris (pēc konstrukcijas), tad KM = NO un KN = MO. Izmantojot šīs vienādības un attiecīgi pārgrupējot saskaitāmos, iegūst:

$$(**) = 4(AN^2 + NO^2) + 4(BM^2 + MO^2) = (***)$$

Izmantojot Pitagora teorēmu Δ ANO un Δ BMO, iegūst

$$(***) = 4\cdot AO^2 + 4\cdot BO^2 = 8\cdot R^2,$$

jo AO un BO - rādiusi.

18. Pēc dotā visi skaitļi a_i uzrakstāmi formā $a_i = 3^j\cdot 5^k$, kur j, k ir skaitļi 0, 1, 2, … <u>Visu bezgalīgi daudzo</u> šādu skaitļu apgriezto lielumu summa ir izsakāma šādā formā:

$$S = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...)(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + ...)$$

Par to visvieglāk pārliecināties, atverot iekavas un pakāpeniski sareizinot saskaitāmos savā starpā:

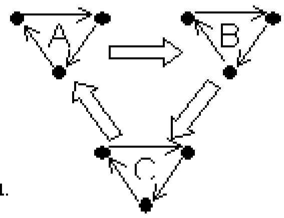
$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2\cdot 5} + \frac{1}{3^2\cdot 5^2} + \frac{1}{3\cdot 5^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{3^3} + ...$$

Aplūkojot katru reizinātāju kā bezgalīgas ģeometriskās progresijas locekļu summu, iegūstam

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2.$$

Ja jau **visu** tādu skaitļu summa < 2, tad, izmantojot doto, ka visi skaitļi dažādi, arī patvaļīgu n šādu locekļu summa būs < 2.

19. Skat., piemēram, shēmu *12.zīm.* ($x \to y$ nozīmē, ka x uzvar pret y).



12.zīm.

Visas A grupas komandas uzvarējušas pret visām B grupas komandām; līdzīgi B pret C un C pret A. Pārbaudē jāšķiro 2 gadījumi:

a) abas komandas pieder vienai no grupām A, B, C,

b) tās pieder dažādām grupām.

a) Ja abas komandas pieder grupai A, tad jebkura no grupas C komandām ir uzvarējusi tās abas. Analogi, ja abas komandas pieder grupai B, tad kā trešā komanda der jebkura no grupas A; ja abas ir no C, tad kā trešā der jebkura grupas B komanda.

b) Viena no komandām ir no grupas A, otra no B. Tad A grupā ir viena tāda komanda, kas uzvarējusi interesējošo A grupas komandu, pie tam, ņemot vērā, ka jebkura A komanda uzvarējusi katru no B komandām, šī pati komanda ir uzvarējusi arī interesējošo B komandu. Līdzīgi arī gadījumos, ja aplūkotās komandas ir no grupām B un C (tad kā trešo ņem atbilstošo no B) vai no grupām C un A (tad kā trešā der atbilstošā no C grupas).

20. Konstruēsim uz riņķa kā "ekvatoriālā šķēluma" sfēru ar rādiusu R. Caur "lentu" malām novelkam plaknes perpendikulāri šim šķēlumam.

Aplūkosim tās sfēras daļas, kas atrodas starp vienai lentai atbilstošajām plaknēm. Tās ir vai nu joslas uz sfēras virsmas, vai segmenti (ja viena no plaknēm pieskaras sfērai vai nešķeļ to).

Sfēras joslas augstums vienāds ar atbilstošās plaknes lentas platumu; sfēriskā segmenta augstums nepārsniedz atbilstošās plaknes lentas platumu. Tāpēc visu joslu un segmentu augstumu summa H nav lielāka par visu lentu platumu summu L: $L \geq H$.

Atcerēsimies: ja sfēras rādiuss ir R, bet joslas resp. segmenta augstums ir h, tad joslas resp. segmenta laukums ir $2\pi R \cdot h$. Tā kā lentas kopumā pārklāj riņķi, tad joslas un segmenti kopumā pārklāj sfēru; tāpēc joslu un segmentu laukumu summa nav mazāka par sfēras laukumu. Iegūstam $2\pi R \cdot H \geq 4\pi R^2$, no kurienes seko $H \geq 2R$. Tā kā $L \geq H$, no šejienes seko $L \geq 2R$, k.b.j.

LATVIJAS 45. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 2. POSMS (21.-40.)

21. Aplūkosim vienādojumu $x^2 + px + q = 0$ un $x^2 + ax + b = 0$ diskriminantus. Tā kā abiem vienādojumiem ir saknes, tad diskriminantiem jābūt nenegatīviem, t.i.,

$$D_1 = p^2 - 4q \geq 0 \quad \text{un} \quad D_2 = a^2 - 4b \geq 0.$$

No tā seko, ka $p^2 \geq 4q$ un $a^2 \geq 4b$ jeb

$$q \leq \frac{p^2}{4} \quad \text{un} \quad b \leq \frac{a^2}{4}. \qquad (1)$$

Aplūkosim arī vienādojuma $x^2+apx+bq=0$ diskriminantu $D_3 = (ap)^2 - 4bq$.

Lai pierādītu, ka arī šim vienādojumam ir saknes, jāpierāda, ka

$$D_3 \geq 0, \text{ t.i., } (ap)^2 - 4bq \geq 0 \quad \text{jeb} \quad (ap)^2 \geq 4bq, \quad \text{jeb} \quad \frac{(ap)^2}{4} \geq bq.$$

No (1) seko, ka b·q $\leq \frac{a^2}{4} \cdot \frac{p^2}{4} \leq \frac{(ap)^2}{4}$, k.b.j.

(Tā kā $\frac{a^2}{4} \cdot \frac{p^2}{4}$ ir pozitīvs skaitlis, tad, samazinot saucēju, daļas lielums nesamazinās.)

22. Vispirms noskaidrosim, pret kuru no malām atrodas 60^0 lielais leņķis.

Zināms, ka pret lielāko malu (pēc dotā tā ir mala a) atrodas lielākais leņķis. Pieņemsim, ka tas ir 60^0 leņķis. Bet tad pret malām b < a un c < a atrodas mazāki leņķi. Līdz ar to visu leņķu summa ir $60^0 + (<60^0) + (<60^0) < 180^0$, kas ir pretrunā ar trijstūra iekšējo leņķu summu.

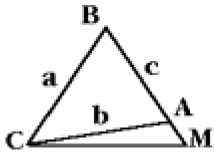
Ja pieņem, ka 60^0 ir mazākais no leņķiem, tad, līdzīgi spriežot kā iepriekš, iegūst, ka trijstūra visu iekšējo leņķu summa ir $60^0 + (>60^0) + (>60^0) > 180^0$, kas atkal ir pretruna.

Atliek pieņemt, ka 60^0 ir pēc lieluma vidējais no leņķiem un tātad atrodas pret malu b, kas pēc lieluma ir vidējā mala.

Lai iegūtu vajadzīgo trijstūri, vispirms pacentīsimies uzkonstruēt malu a-c. Acīmredzot to var panākt, ja uz malas ar garumu a atliek malu garumā c.

Šim nolūkam sākotnējā trijstūra (to apzīmēsim ar Δ ABC) malu c = BA pagarina līdz malai BM ar garumu a (*sk.13.zīm.*). Tādējādi iegūstam malas BA pagarinājumu AM = a - c.

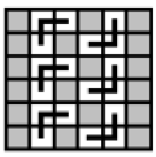
13.zīm.



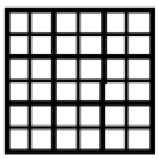
Aplūkojam Δ CBM. Tā $\angle$CBM = 60^0 pēc sākumā secinātā (atrodas pret malu b trijstūrī Δ ABC) un BC = BM = a, tad tas ir vienādmalu trijstūris (kā vienādsānu trijstūris ar virsotnes leņķi 60^0.) No tā savukārt var secināt, ka CM = a un $\angle$AMC = 60^0.

Tālāk aplūkojam Δ CAM. No tikko secinātā tam ir viens leņķis, kas ir 60^0 liels ($\angle$AMC), mala CM = a, mala AM = a - c pēc konstrukcijas un mala AC = b pēc dotā. Līdz ar to šis trijstūris Δ CAM ir meklētais.

23. Vispirms parādīsim, ka, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, pietiek izgriezt 6 stūrīšus (*sk.14.zīm.*).



14.zīm

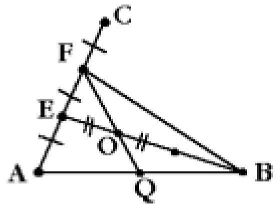


15.zīm.

Tagad pierādīsim, ka ar mazāku skaitu stūrīšu nepietiek. Pieņemsim no pretējā, ka pietiek jau ar 5 stūrīšiem. Tad izgriezto rūtiņu skaits būs 5·3 = 15, savukārt neizgriezta paliks vismaz 36 - 15 = 21 rūtiņa.

Aplūkosim *15. zīm.* treknāk iezīmētos kvadrātus. To skaits ir 9. Tā kā neizgriezto rūtiņu skaits ir 21, tad kādā no kvadrātiem būs vismaz 3 neizgrieztas rūtiņas (2·9 = 18 < 21). Bet tas nozīmē, ka šīs rūtiņas veido stūrīti, kuru var izgriezt. Tātad iegūta pretruna, un mazākais izgriežamo stūrīšu skaits ir 6, k.b.j.

24. Pieņemsim, ka jāsadala nogriezni AB (*sk. 16.zīm.*). Patvaļīgā virzienā novelkam nogriezni AC. Ar trisektoru to sadalām, iegūstot punktus E un F, kur AE = EF = FC. Tādējādi E ir AF viduspunkts.

16.zīm. 

Ar trisektoru sadalām nogriezni EB, tādējādi iegūstot punktu O, kam EO=$\frac{1}{3}$EB.

Aplūkojam ΔAFB. EB ir šī trijstūra mediāna, tādēļ O ir ΔAFB mediānu krustpunkts (pēc teorēmas, ka mediānas to krustpunktā dalās attiecībā 1:2). Līdz ar to nogrieznis FQ, ko iegūst, velkot staru FO līdz krustpunktam ar nogriezni AB, arī ir trijstūra mediāna, tātad krusto nogriezni AB tā viduspunktā.

Sākotnēji izvēlētā nogriežņa AB viduspunkts - Q - atrasts.

25. Doto reizinājumu cenšamies pārveidot kā vairāku reizinājumu summu tā, lai par katru no saskaitāmajiem būtu vieglāk noteikt, ka tas dalās ar 2 un arī ar 6.

a) Reizinātāju (13n+1) sadala kā summu 12n + (n+1). Tādējādi

$$n\cdot (13n+1)\cdot (19n+2) = n\cdot (n+1)\cdot (19n+2) + n\cdot 12n\cdot (19n+2). \quad (1)$$

Kā redzams. otrais saskaitāmais kā reizinātāju satur skaitli 12, tātad šis saskaitāmais dalās ar 2. Pirmais saskaitāmais kā reizinātājus satur divus secīgus skaitļus n un (n+1), tātad viens no tiem dalās ar 2, tādējādi arī pirmais saskaitāmais dalās ar 2 un visa summa arī dalās ar 2 katram naturālam n.

b) iepriekš aplūkotajā a) piemērā iegūtās summas (1) pirmo saskaitāmo sadala divos saskaitāmajos, ņemot vērā to, ka

$$19n + 2 = 18n + (n+2).$$

Tādējādi viss sākotnējais reizinājums pārveidojas sekojoši:

$$n\cdot(13n + 1)\cdot(19n + 2) = n\cdot(n + 1)(19n + 2) + n\cdot 12n\cdot(19n + 2) =$$
$$=n\cdot(n + 1)\cdot(n + 2) + n\cdot(n + 1)\cdot 18n + n\cdot 12n\cdot(19n + 2).$$

Iegūtās summas abi pēdējie saskaitāmie kā reizinātājus satur skaitļus 18 un 12, tātad tie dalās ar 6. Viens no trim secīgiem skaitļiem n; n+1; n+2 dalās ar 3, bez tam zināms, ka reizinājums n·(n+1)·(n+2) dalās arī ar 2, tātad tas dalās ar 6.

Ja katrs no saskaitāmajiem dalās ar 6, tad visa summa dalās ar 6. Tas nozīmē, ka dotais reizinājums patiešām dalās ar 6 katram naturālam n.

26. Vispirms vienādojumu sistēmas otro vienādojumu ceļ kvadrātā, tādējādi iegūst:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ (x+y)^2 = 9 \end{cases}$$

Pēc tam no otrā vienādojuma atņem pirmo (atsevišķi atņem vienādojumu kreisās puses, atsevišķi - labās):

$$(x + y)^2 - (x^2 + xy + y^2) = 9 - 7$$

Atverot iekavas:

$$x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - xy - y^2 = 9 - 7 = 2$$

un savelkot līdzīgos locekļus, iegūst sakarību

$$xy = 2$$

Tālāk risina sekojošu vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Tā kā šī ir divu mainīgo un divu vienādojumu - lineāra un otrās pakāpes - sistēma, tad tai iespējami ne vairāk kā divi dažādi atrisinājumi, kurus viegli uzminēt - (2;1) un (1;2).

Iegūtos atrisinājumus pārbauda, mainīgo x un y vērtības liekot sākotnējā vienādojumu sistēmā.

1) x = 2 un y = 1

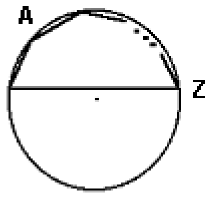
Tā kā $2^2 + 2 \cdot 1 + 1^2 = 7$ un $2 + 1 = 3$, tad atrisinājums (2;1) der.

2) x = 1 un y = 2

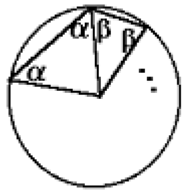
Tā kā arī $1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2 = 7$ un $1 + 2 = 3$, tad arī (1;2) der.

Tādējādi sākotnēji dotās vienādojumu sistēmas atrisinājumi ir (2;1) un (1;2).

27. Riņķa centrs atrodas daudzstūra iekšpusē; pretējā gadījumā (*17.zīm.*) $\angle A \geq 180^0$, bet $\angle Z < 180^0$ - pretruna ar nosacījumu, ka visiem leņķiem jābūt vienādiem).



17.zīm.



18.zīm.

Savienojot centru ar daudzstūra virsotnēm, tas sadalās vienādsānu trijstūros. Jāeksisē diviem blakus esošiem trijstūriem, kas nav vienādi, - pretējā gadījumā daudzstūra visas malas kā vienādu vienādsānu trijstūru pamati būtu vienādas, kas ir pretrunā uzdevuma nosacījumam, ka starp malām ir arī dažādas.

Dažādo trijstūru pamata leņķus apzīmē attiecīgi ar α un β (*18.zīm.*). Lai visi daudzstūra leņķi būtu vienādi (tātad $\alpha + \beta$), šādiem trijstūriem jāizvietojas pamīšus; tādējādi to ir pāra skaits.

28. a) Tā kā divu nepāra skaitļu starpība ir pāra skaitlis, tad dotajā reizinājumā visi reizinātāji ir pāra skaitļi. Tā kā reizinātāju skaits ir 6, tad viss reizinājums dalās ar $2^6 = 64$.

b) Tā kā dotie skaitļi x; y; z; t visi ir nepāra, tad, dalot tos ar 4, iespējami tikai divi gadījumi, proti, dalījums dod atlikumu 1 vai atlikumu 3. Aplūko, kādu atlikumu var dot divu tādu skaitļu starpība.

(1) Ja atņem divus tādus skaitļus, kurus, katru atsevišķi dalot ar 4, iegūst atlikumu 1 (tātad tos var izteikt formā 4k+1, kur k - vesels skaitlis), tad rezultātā iegūtais skaitlis dalās ar 4 bez atlikuma:

$$4k_1 + 1 - (4k_2 + 1) = 4(k_1 - k_2)$$

(2) Ja atņem divus tādus skaitļus, no kuriem pirmo var izteikt formā $4k_1 + 3$, bet otru - formā $4k_2 + 1$, tad rezultātā iegūtais skaitlis gan dalās ar 2, bet nedalās ar 4:

$$4k_1 + 3 - (4k_2 + 1) = 4(k_1 - k_2) + 2.$$

(3) To pašu var apgalvot, ja pirmo skaiti var uzrakstīt kā $4k_1+1$, bet otro kā $4k_2+3$:

$$4k_1 + 1 - (4k_2 + 3) = 4(k_1 - k_2) - 2.$$

(4) Ja, savukārt, gan mazinātājs, gan mazināmais, dalot ar 4, dod atlikumu 3, tad iegūtā starpība dalās ar 4 bez atlikuma:

$$4k_1 + 3 - (4k_2 + 3) = 4(k_1 - k_2).$$

Šķiro variantus atkarībā no tā, cik no dotajiem skaitļiem, dalot ar 4, dod atlikumu 1. Katrā variantā nosaka, cik no dotajā reizinājumā ietilpstošajām starpībām dalās ar 4 bez atlikuma (tātad atbilst gadījumiem (1) un (4)).

1) Ja, dalot ar 4, atlikumu 1 resp. 3 dod visi četri skaitļi x, y, z un t, tad visas (kopskaitā sešas) divu šādu skaitļu starpības dalās ar 4 bez atlikuma (gadījums (1) resp. (4)).

2) Ja trīs skaitļi dod atlikumu 1 (piemēram, x, y, z), bet viens skaitlis (šai gadījumā t), dalot ar 4, dod atlikumu 3, tad visas tās (un tikai tās) starpības, kurās neietilpst t, dalās ar 4 bez atlikuma (gadījums (1)). Tādu starpību skaits ir <u>trīs</u>. Pārējās starpības, kurās t ietilpst, atbilst gadījumam (2) vai (3).

3) Ja divus skaitļus var izteikt formā $4k_1+1$ (piemēram, x un y), bet divus pārējos - formā $4k_2 + 3$ (z un t), tad <u>divas</u> starpības dalīsies ar 4 bez atlikuma (gadījums (1), ja x-y, un (4), ja z-t). Pārējās starpības atbildīs gadījumam (2) vai (3).

4) Ja formā $4k_1+1$ var izteikt tikai vienu skaitli (piem., x), bet formā $4k_2 + 3$ var izteikt 3 skaitļus (y, z, t), tad ar 4 bez atlikuma dalīsies <u>trīs</u> starpības - tās, kurās nav x (gadījums (4)). Pārējās starpības (ar x) atbildīs gadījumam (3), tātad nedalīsies ar 4 bez atlikuma.

Tādējādi visos variantos vismaz divas no reizinājumā ietilpstošajām starpībām dalās ar 4 bez atlikuma (sk. iepriekš pasvītrotos vārdus), pārējās četras starpības bez atlikuma dalās vismaz ar 2. Līdz ar to arī viss reizinājums dalās vismaz ar $4\cdot4\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 256$

c) Dalot ar 3, dotie skaitļi var dot tikai trīs dažādus atlikumus 0, 1 vai 2 - tātad starp visiem četriem skaitļiem x, y, z un t divi dod vienādus atlikumus (tos var izteikt formā $3k_1 + a$ un $3k_2 + a$). Aplūkojot šo divu skaitļu starpību $(3k_1 + a - (3k_2 + a) = 3(k_1 - k_2))$, var redzēt, ka tā dalās ar 3 bez atlikuma. Tādējādi vismaz viens dotās izteiksmes reizinātājs dalās ar 3 no tikko pierādītā, un viss reizinājums bez tam dalās ar 2^8 no b) pierādītā. Tā kā 2 un 3 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad dotais reizinājums noteikti dalās ar $2^8\cdot3 = 768$.

29. a) Pēc kārtas apskatām 1., 2., …, 10. vietu no sākuma. Ja k-jā vietā stāv meitene ($1 \le k \le 10$), tad kādā no vietām ar numuriem k + 1; k + 2; …; k + 10 stāv zēns (citādi meitenes stāvētu gan k-ajā, gan k + 1-ajā, …, gan k + 10-ajā vietā, līdz ar to viņu būtu vairāk par 10). Šo zēnu un k-to meiteni maina vietām (starp viņiem tiešām stāv ne vairāk kā 9 citi). Ja k-ajā vietā stāv zēns, tad tā arī atstāj. Līdz ar to pēc ne vairāk kā 10 maiņām pirmajās 10 vietās atradīsies tikai zēni, tādējādi tālākajās vietās - 10 meitenes.

b) Ja pirmajās 10 vietās stāv meitenes, vajag vismaz 10 maiņas, jo vienas maiņas rezultātā tiek "izlabota" augstākais viena "nepareizība", bet to šajā gadījumā pavisam ir 10.

30. Vispirms atver iekavas un visus saskaitāmos pārnes nevienādības labajā pusē, savelk līdzīgos locekļus:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc < 4ab + 4ac + 4bc$$

$$0 < 4ab + 4ac + 4bc - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \qquad \text{jeb}$$

$$4ab + 4ac + 4bc - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2ac - 2bc > 0$$

$$2ab + 2ac + 2bc - a^2 - b^2 - c^2 > 0$$

Pēc tam saskaitāmos pārgrupē sekojoši:

$$(ab + ac - a^2) + (bc + ba - b^2) + (ca + cb - c^2) > 0$$

(atverot iekavas un savelkot līdzīgos locekļus, var pārliecināties par ekvivalenci ar iepriekšējo nevienādību)

$$a(b + c - a) + b(c + a - b) + c(a + b - c) > 0 \qquad (1)$$

Tā kā trijstūrim jebkuru divu malu (piem., a un b) garumu summa lielāka par trešo malu (c), tad $a + b > c$ jeb $a + b - c > 0$ (tāpat $b + c - a > 0$ un $c + a - b > 0$).

Tā kā visi trijstūra malu garumi ir pozitīvi, tad iegūtajā summā (1) visi saskaitāmie ir pozitīvi, kas rada arī pozitīvu summu. Līdz ar to nevienādība ir spēkā.

31. Aplūko starpību $(3a + 4b) - (2a + 3b) = a + b$. Tā kā starpībā gan mazinātājs, gan mazināmais dalās ar 7 (pēc dotā), tad arī rezultāts $a + b$ dalās ar 7.

Pēc tam aplūko starpību $(2a + 3b) - 2(a + b) = b$. Tā kā mazināmais dalās ar 7 pēc dotā un $a + b$ dalās ar 7 pēc tikko pierādītā, tad arī rezultāts b dalās ar 7.

Tālāk izmanto pierādītos faktus, ka a+b dalās ar 7 un b dalās ar 7. Tādējādi arī a dalās ar 7.

32. Apzīmē skaitli, kas uzrakstīts tieši pirms 81, ar x. Tādējādi uzrakstītie skaitļi (atpakaļejošā secībā) ir

$$81;\ x;\ 81 - x;\ x - (81 - x) = 2x - 81;\ 81 - x - (2x - 81) = 162 - 3x;$$
$$2x - 81 - (162 - 3x) = 5x - 243;\ 162 - 3x - (5x - 243) = 405 - 8x;$$
$$5x - 243 - (405 - 8x) = 13x - 648$$

(ja līdz šai vietai vispār var nonākt, iegūstot naturālus skaitļus).

Tā kā visiem virknes locekļiem jābūt pozitīviem, tad arī

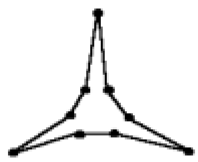
$$405 - 8x > 0 \text{ un } 13x - 648 > 0$$

No pirmās nevienādības seko, ka $x < 50\frac{5}{8}$, savukārt no otrās, ka $x > 49\frac{11}{13}$. Kā naturāls skaitlis x var pieņemt tikai vērtību 50. Aplūko šādas virknes vērtības atpakaļejošā secībā:

$$81,\ 50,\ 31,\ 19,\ 12,\ 7,\ 5,\ 2,\ 3,\ -1,\ \ldots\ .$$

Tā kā negatīvi skaitļi neder, tad meklētais skaitļu maksimums virknē, pirms parādās skaitlis 81, ir 8.

33. Skat., piem., *19.zīm.*



19.zīm.

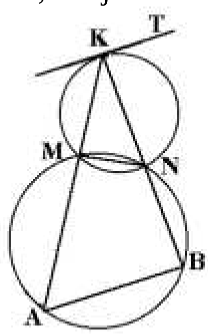
34. Skat. *20.zīm.* No teorēmām par ievilktu leņķi un hordas - pieskares leņķi

$$\angle TKN = \angle KMN \ (1);$$

tā kā AMNB - ievilkts četrstūris, tad tā pretējo leņķu summa ir 180^0; tādējādi $\angle NBA =$ $= 180^0 - \angle AMN$. Tā kā $\angle AMN$ un $\angle KMN$ ir blakusleņķi, tad $\angle KMN = 180^0 -$ $- \angle AMN$. Tādējādi

$$\angle KMN = \angle NBA \ (2).$$

No (1) un (2) seko, ka $\angle TKN = \angle NBA$, k.b.j.



20.zīm.

35. Izmanto matemātisko indukciju. To, ka eksistē ceļš no A uz B, apzīmējam ar $A \to B$.

<u>Bāze</u>. Aplūko gadījumu, kad ir tikai 2 pilsētas. Tā kā tās savieno tieši viens vienvirziena ceļš, tad tiešām atradīsies pilsēta, no kuras var apceļot "visas pārējās", t.i., otru pilsētu.

<u>Induktīvā pāreja</u>. Pieņemsim, ka k pilsētas sakārtotas prasītā maršrutā:

$$A_1 \to A_2 \to \ldots A_i \to A_{i+1} \to \ldots \to A_k.$$

Ņemam (k+1)-o pilsētu A_{k+1}.

Ja $A_{k+1} \to A_1$, pievienojam A_{k+1} virknes sākumā, līdz ar to prasītais maršruts izveidots. Pretējā gadījumā, acīmredzot,

$$A_1 \to A_{k+1} \ (1).$$

Aplūko šo gadījumu.

Ja kādam i ($1 \le i \le k$) $A_i \to A_{k+1}$ un $A_{k+1} \to A_{i+1}$, "iespraužam" A_{k+1} starp A_i un A_{i+1}. Līdz ar to vajadzīgais maršruts izveidots.

Ja šāda situācija nav spēkā nevienam i, tad nav tiesa arī, ka $A_1 \rightarrow A_{k+1}$ un $A_{k+1} \rightarrow A_2$.
No (1) seko, ka $A_{k+1} \leftarrow A_2$ (2). No (2), savukārt, seko, ka $A_{k+1} \leftarrow A_3$ (3), utt., no $A_{k+1} \leftarrow A_{k-1}$ seko, ka $A_{k+1} \leftarrow A_k$. Tādējādi A_{k+1} var pievienot virknes galā, tā iegūstot prasīto maršrutu.

36. Ja tg x > 0, tad arī ctg x = $\dfrac{1}{tg\ x}$ > 0. No dotā, ka ctg x < sin x < cos x (1), seko, ka arī sin x > 0 un cos x > 0. Tādā gadījumā $ctg\ x = \dfrac{cos\ x}{\sqrt{1-cos^2 x}} > cos\ x$, jo saucējs pieder pie intervāla [0,1[un skaitītājs pozitīvs. Bet tas ir pretrunā ar uzdevumā doto.

Ja tg x<0, tad no dotā seko, ka sin x < 0 un cos x < 0. Bet tā ir pretruna, jo seko, ka tg x=$\dfrac{sin\ x}{cos\ x}$ > 0.

Tātad tāda x, kas apmierinātu uzdevuma nosacījumus, nav.

37. Vispirms sākotnējo izteiksmi sadala reizinātājos, atrisinot vienādojumu

$$n^4 - 5n^2 + 4 = 0$$

un izteiksmi vienādības kreisajā pusē izsakot formā $(x - x_1)(x - x_2)$.
Ar x apzīmē n^2. Tādējādi jāatrisina vienādojums $x^2 - 5x + 4 = 0$. Pēc Vjeta teorēmas iegūst, ka $x_1 = 1$ un $x_2 = 4$. Tādējādi

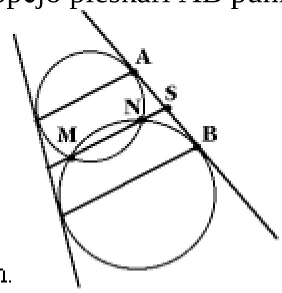
$$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$$

un, aizvietojot x ar n^2, iegūst:

$$n^4 - 5n^2 + 4 = (n^2 - 1)(n^2 - 4) = (n - 2)(n - 1)(n + 1)(n + 2).$$

Viens no 5 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem n - 2; n - 1; n; n + 1; n + 2 dalās ar 5. Tas nav n (pēc uzdevuma nosacījumiem), jo n - pirmskaitlis, kas lielāks par 5.
Līdzīgi var secināt, ka viens no skaitļiem n - 2; n - 1; n dalās ar 3 (apzīmēsim to ar t), pie tam tas nav n. Tātad t + 3 arī dalīsies ar 3, bet tas ir vai nu n + 1 (ja t = n - 2), vai n + 2 (ja t = n - 1). Tādējādi no interesējošiem 5 skaitļiem divi dalās ar 3. Līdz ar to interesējošais reizinājums dalās ar 5·3·3 jeb $n^4 - 5n^2 + 4$ dalās ar 45, k.b.j..

38. Pieņemsim, ka taisne MN krusto kopējo pieskari AB punktā S (*sk. 21.zīm.*).



21.zīm.

Tālāk izmanto teorēmu par sekanšu nogriežņu reizinājumu, no kuras seko, ka $SA^2 = SM \cdot SN$ un $SB^2 = SM \cdot SN$. Tātad SA = SB. Līdzīgi parāda, ka MN arī otru trapeces sānu malu krusto tās viduspunktā. Līdz ar to MN patiešām atrodas uz trapeces viduslīnijas.

39. Figūru tilpumus apzīmē ar $F_1, F_2, \ldots, F_9$. Zināms, ka $F_1 + \ldots + F_9 > 8$. Apskatām figūru papildinājumus $P_1, P_2, \ldots, P_9$. To tilpumu summa ir

$$(1 - F_1) + (1 - F_2) + \ldots + (1 - F_9) = 9 - (F_1 + \ldots + F_9) < 1.$$

Tādējādi jābūt tādam punktam, kas nepieder nevienam papildinājumam, t.i., pieder visām figūrām, k.b.j..

40. Izmanto matemātisko indukciju.

Bāze. Ja n=2, tad, acīmredzot, patiešām var uz abām pilsētām nokļūt ar vienas kompānijas aviolīnijām, jo katras divas pilsētas ar abpusēju aviolīniju ir savienotas.

Induktīvā pāreja. Pieņemsim, ka k pilsētām p_1, p_2, …, p_k der kompānija α. Ņemam vēl pilsētu p_{k+1}. Ja to kaut ar vienu no k iepriekšējām pilsētām savieno α reiss, tad mums der kompānija α. Ja p_{k+1} ar visām p_1, p_2, …, p_k savieno β reisi, tad der kompānija β - pirms došanās uz kādu pilsētu vispirms vienmēr jāiegriežas pilsētā p_{k+1}, no kuras tālāk ar tās pašas kompānijas β palīdzību var nokļūt jebkurā no pārējām pilsētām, arī uz izvēlēto.

Tādējādi nevienā gadījumā otras kompānijas pakalpojumi nebūs nepieciešami.

LATVIJAS 45.MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 3.POSMS (41.-60.)

41. Dotās nevienādības $x^3 > 2$ abas puses ir pozitīvas. Tāpēc, ceļot to pakāpē ar naturālu kāpinātāju, atkal iegūst patiesas nevienādības.

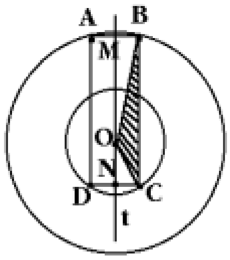
a) ceļot $x^3 > 2$ kvadrātā, iegūst $x^6 > 4$

b) pieņemsim no pretējā, ka $x^7 \le 5$. Tad ($x > 0$), ceļot šo nevienādību kubā, iegūst $x^{21} \le 125$. Bet, ceļot sākumā doto nevienādību septītajā pakāpē, iegūst $x^{21} > 128$. Tā ir pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs, un $x^7 > 5$

42. Ievērosim, ka $1995 = 3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}19$, kur 3; 5; 7; 19 - dažādi pirmskaitļi.

Pieņemsim no pretējā, ka $x{\cdot}y$ dalās ar 1995. Tad $x{\cdot}y$ dalās ar 3, tāpēc vai nu x, vai y dalās ar 3. Tā kā $x + y = 1995$, tad arī otrs no saskaitāmajiem x un y dalās ar 3. Līdzīgi pierāda, ka gan x, gan y dalās ar 5; 7; 19. Tātad gan x, gan y dalās ar $3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}19 = 1995$. Tātad $x \ge 1995$ un $y \ge 1995$ un $x + y \ge 2{\cdot}1995$. Tā ir pretruna ar nosacījumu $x + y = 1995$.

43. Novelkam caur kopīgo centru O taisni t, kas paralēla AD un BC un krusto malas AB un CD attiecīgi punktos M un N. Tā kā $t \perp CD$, tad M un N ir attiecīgi AB un CD viduspunkti.



22.zīm.

Tāpēc [ABCD] = 2[CNMB] = 4[COB].

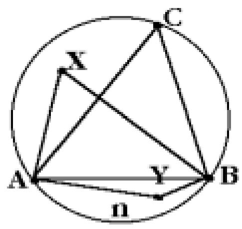
Bet $[COB] \le \frac{1}{2} OC{\cdot}OB = \frac{1}{2} R{\cdot}r$; maksimālais [COB] ir tad, kad $CO \perp BO$, un tad $[COB] = \frac{1}{2} R{\cdot}r$, bet $[ABCD] = 2R{\cdot}r$. Skaidrs, ka tad

$$BC = \sqrt{R^2 + r^2}, \text{ bet } AB = \frac{[ABCD]}{BC} = \frac{2R\cdot r}{\sqrt{R^2 + r^2}}.$$

Jānoskaidro, vai tāda situācija, kad $CO \perp BO$, noteikti iespējama. Parādīsim, ka tā ir.

Ja taisnstūris ABCD ir augsts un šaurs (t.i., AD un BC gandrīz atrodas uz taisnes t), tad $\angle BOC \approx 180^0$; katrā ziņā $\angle BOC > 90^0$. Ja taisnstūri pakāpeniski paplašinām un pazeminām, tad robežstāvoklī BC un AD pieskaras mazākajai riņķa līnijai; tad $\angle BOC < 90^0$. Starp šiem stāvokļiem jābūt tādam, kurā $\angle BOC = 90^0$.

44. Aplūkosim visus attālumus starp pa pāriem ņemtiem dotajiem punktiem un atradīsim starp tiem vismazāko. Pieņemsim, ka tas ir starp punktiem A un B. No visiem pārējiem dotajiem punktiem atradīsim to, no kura nogriezni AB redz vislielākajā leņķī; pieņemsim, ka tas ir C.



23.zīm.

Mēs apgalvojam, ka punktus A, B, C var ņemt par meklētajiem. Tiešām, saskaņā ar punktu A un B izvēli AB $\le$ AC un AB $\le$ BC; tā kā pret garāko malu atrodas lielākais leņķis, tad $\angle$ACB nav lielāks ne par vienu no abiem pārējiem, tātad $\angle$ACB $\le$ 60^0 un tāpēc $A\breve{n}B \le 120^0 < A\breve{C}B$. Ja novilktās riņķa līnijas iekšpusē būtu kāds dotais punkts X "virs" taisnes AB, tad saskaņā ar teorēmu par iekšējo leņķi $\angle$AXB > $\angle$ACB - pretruna; ja novilktās riņķa līnijas iekšpusē būtu kāds dotais punkts Y "zem" taisnes AB, tad $\angle$AYB > $\frac{1}{2}A\breve{C}B > \frac{1}{2}A\breve{n}B = \angle ACB$ - pretruna.

45. Ja ir tāds pulciņš, kuru apmeklē visi skolēni, viss kārtībā. Pieņemsim, ka tāda pulciņa nav. Izvēlamies vienu skolēnu α; pieņemsim, ka tas apmeklē pulciņus A un B. Jābūt kādam skolēnam β, kura pulciņu pāris nav (A,B); tā kā α un β jābūt kopīgam pulciņam, varam pieņemt, ka β apmeklē pulciņus A un C. Ir jābūt skolēnam γ, kas neapmeklē pulciņu A (citādi visi apmeklētu pulciņu A, bet tā būtu pretruna ar pasvītroto pieņēmumu); tā kā γ jābūt kopīgam pulciņam gan ar α, gan ar β, tad γ apmeklē (B,C).

Mēs apgalvojam, ka citu pulciņu nav. Tiešām, ja kāds apmeklētu pulciņu D un vēl kādu pulciņu X, tad pārim (D,X) nevar būt kopīgs pulciņš ar pāriem (A,B), (A,C) un (B,C) vienlaicīgi.

Tāpēc katrs skolēns apmeklē divus no trim pulciņiem A, B, C. Pieņemsim, ka skolēnu ir n un katrs uzraksta uz atsevišķām zīmītēm savu pulciņu nosaukumus; kopā ir n·2=2n zīmītes, kas sadalās pa 3 pulciņiem. Tāpēc vismaz viena pulciņa nosaukums uzrakstīts uz ne mazāk kā $\frac{1}{3}\cdot 2n = \frac{2}{3}n$ zīmītēm. Šis pulciņš arī ir meklējamais.

46. Izdarām pārveidojumus, apzīmējot doto izteiksmi ar S:

$$S=(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)=[\alpha\beta-(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2]\cdot[\alpha\beta-(\alpha+\beta)\delta+\delta^2]$$

Saskaņā ar Vjeta teorēmu $\alpha+\beta$ = - p un $\alpha\cdot\beta$ = 1. Tāpēc

$$S=[1-(-p)\cdot\gamma+\gamma^2]\cdot[1-(-p)\delta+\delta^2]=[\gamma^2+p\cdot\gamma+1]\cdot[\delta^2+p\delta+1]$$

Tālāk summas pārveido, pieskaitot un atņemot vienu un to pašu lielumu, tādējādi

$$S=[\gamma^2+q\cdot\gamma+1+p\cdot\gamma-q\cdot\gamma]\cdot[\delta^2+q\delta+1+p\delta-q\delta]$$

Tā kā γ un δ ir vienādojuma $x^2 + qx + 1 = 0$ saknes, tad

$$\gamma^2 + q\gamma + 1 = \delta^2 + q\delta + 1 = 0.$$

Tāpēc, aizstājot izteiksmē S attiecīgās summas ar 0, iegūst

$$S=[0+\gamma(p-q)]\cdot[0+\delta(p-q)]=\gamma\cdot\delta\cdot(q-p)^2.$$

Saskaņā ar Vjeta teorēmu $\gamma\cdot\delta$ = 1. Tāpēc S = $(q - p)^2$.

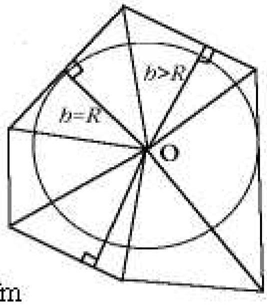
47. Saskaņā ar doto, katrs no skaitļiem a; b; c; d, dalot ar 5, dod vienu no reducētajiem atlikumiem 1; 2; -1; -2 (atlikumu 3 aizstājam ar -2, atlikumu 4 aizstājam ar -1). Pašu skaitļu kombinācijas vietā varam apskatīt reducēto atlikumu kombināciju. Tā kā (-1) var brīvi pārvērst par 1 (mainot zīmi) un (-2) - par 2, tad varam uzskatīt, ka katrs no skaitļiem a; b; c; d aizstāts ar 1 vai 2. Tālāk aplūkojam 5 iespējas:

a) visi 4 skaitļi aizstāti ar 1; veidojam + 1 - 1 + 1 - 1 = 0

b) ir 3 vieninieki un 1 divnieks, veidojam + 1 + 1 + 1 + 2 = 5
c) ir 2 vieninieki un 2 divnieki; veidojam + 1 - 1 + 2 - 2 = 0
d) ir 1 vieninieks un 3 divnieki; veidojam - 1 + 2 + 2 + 2 = 5
e) ir 4 divnieki; veidojam + 2 - 2 + 2 - 2 = 0

Tā kā aizstāšanas rezultātā dalīšanās ar 5 nemainās, uzdevums atrisināts.

48. Savienojam riņķa centru ar visām daudzstūra virsotnēm; katrā iegūtajā trijstūrī novelkam augstumu no centra O pret daudzstūra malu. Skaidrs, ka šī augstuma garums nav mazāks par R.



24.zīm

Tāpēc katra trijstūra laukums nav mazāks par $\frac{1}{2}a_i \cdot R$. Saskaitot visus šos laukumus, iegūstam

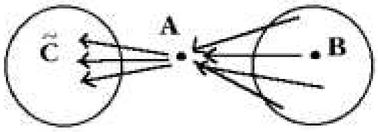
$$L \geq \frac{1}{2}a_1R + \frac{1}{2}a_2R + \ldots + \frac{1}{2}a_nR, \quad L \geq \frac{1}{2}(a_1 + \ldots + a_n)\cdot R, \quad L \geq \frac{1}{2}PR,$$

no kurienes $R \leq \frac{2L}{P}$.

49. Pieņemsim, ka vienīgais turnīra laureāts ir A. No pretējā pieņemsim, ka A zaudējis kādiem spēlētājiem; apzīmēsim tos ar $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Izvēlēsimies to no spēlētājiem $B_1, B_2, \ldots, B_k$, kas savstarpējās spēlēs guvis visvairāk uzvaru; apzīmēsim to ar B. Mēs apgalvojam, ka B arī ir laureāts.

Tiešām, visi spēlētāji iedalās 3 grupās:

1) A,
2) spēlētāji, kurus A uzvarējis (apzīmēsim to grupu ar $\tilde{C}$),
3) spēlētāji, kam A zaudējis ($B_1, B_2, \ldots, B_k$)



25.zīm

Lai pierādītu, ka B arī ir laureāts, jāpierāda: ja B zaudējis kādam B_i no $B_1, B_2, \ldots, B_k$, tad eksistē tāds B_j, ka $B \rightarrow B_j \rightarrow B_i$. Pieņemot pretējo, ka tāda B_j nav, iegūstam: visus tos B_j, kurus uzvarējis B, uzvarējis arī B_i. Tā kā B_i uzvarējis arī pret B, tad spēlētājam B_i grupas $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ "iekšējā turnīrā" ir vairāk uzvaru nekā B; tā ir pretruna ar B izvēli. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un A nevienam nav zaudējis.

50. Pavisam šo virknīšu ir 2^n. Skaidrs: ja n=1 (apskatām virknītes garumā 1), varam izvēlēties tikai vienu no tām. Turpmāk aplūkojam gadījumu, kad $n \geq 2$.

a) Sadalām katru virknīti divās daļās: pirmajā ciparā un "astē", kas sastāv no (n-1) cipariem. Dažādu astu pavisam ir 2^{n-1}. Ja izvēlēsimies vairāk par 2^{n-1} virknītēm, tad divām no tām būs vienādas astes; tāpēc tās atšķirsies tikai ar vienu - pirmo - ciparu. Tā nedrīkst būt. Tātad vairāk par 2^{n-1} virknītēm izvēlēties nevar.

b) Parādīsim, kā var izvēlēties 2^{n-1} virknes. Ar matemātisko indukciju pierādīsim apgalvojumu:

Katram $n \geq 2$ visas virknes garumā n var sadalīt divās daļās A_n un B_n tā, ka katra daļa sastāv no tieši 2^{n-1} virknēm un katrā daļā ietilpstošas jebkuras divas virknes atšķiras viena no otras vismaz 2 vietās.

Bāze, kad n = 2: $A_2 = \{00,11\}$; $B_2 = \{01,10\}$.

Induktīvā pāreja: ja A_k un B_k - prasītais sadalījums virknēm ar garumu k, aplūkosim sekojošas kopas:

$\mathbf{A_{K+1}}$ sastāv no visām A_k virknēm, kam priekšā pierakstīta 0, un visām B_k virknēm, kam priekšā pierakstīts 1;

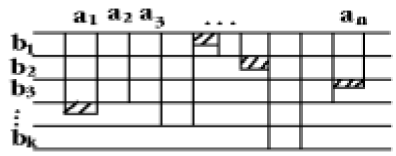
$\mathbf{B_{K+1}}$ sastāv no visām A_k virknēm, kam priekšā pierakstīts 1, un visām B_k virknēm, kam priekšā pierakstīta 0.

Skaidrs, ka, ja A_k un B_k kopā satur visas 2^k virknes garumā k, tad A_{k+1} un B_{k+1} kopā satur visas 2^k virknes garumā k, kam priekšā pierakstīta 0 vai 1, t.i., visas 2^{k+1} virknes garumā k+1. Katras divas A_{k+1} virknes, kas "radušās" abas no A_k, savā starpā atšķiras tajās (vismaz divās) vietās, kurās atšķiras to "astes" garumā k; ja viena A_{k+1} virkne radusies no A_k, bet otra no B_k, tad tās atšķiras ar pirmo ciparu un vēl vismaz vienā vietā "astēs" (jo neviena virkne garumā k nepieder gan A_k, gan B_k), tātad kopā vismaz 2 vietās.

Līdzīgi pierāda, ka arī katras divas B_{k+1} virknes atšķiras viena no otras vismaz divās vietās.

51. Piemēram, tāds ir skaitlis $2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$.

52. Atēlosim skaitļus uz kartītēm $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ar taisnstūriem; katrs taisnstūris sastāv no zināma skaita veselu kvadrātiņu (skaitļa a_i veselā daļa) un vēl varbūt kāda iesvītrotā taisnstūra (skaitļa a_i daļveida daļa), sk. *26.zīm.*

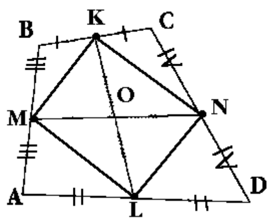


26.zīm.

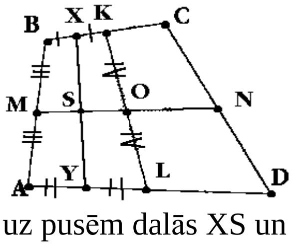
Acīmredzot, a_i ir i-tās kolonnas laukums, bet b_j ir vienības kvadrātiņu skaits j-jā joslā. Tāpēc $a_1 + \ldots + a_n \geq b_1 + b_2 + \ldots + b_k$, un vienādība pastāv tad un tikai tad, kad iesvītroto daļu nav, t.i., kad visi uz kartiņām uzrakstītie skaitļi ir naturāli. (Patiesībā vienmēr pastāv vienādība $b_1 + b_2 + \ldots + b_k = [a_1] + [a_2] + \ldots + [a_n]$).

53. Pierādīsim vispirms, ka katrs no novilktajiem nogriežņiem sadalās 4 vienādās daļās.

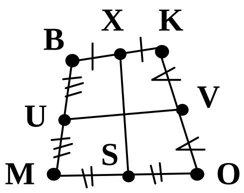
Tā kā MK||AC||LN un KN||BD||ML, tad MKNL - paralelograms. Tāpēc MN un KL krustpunktā dalās uz pusēm.



Tāds pats spriedums parāda, ka krustpunktā uz pusēm dalās XY un MO.



Tāpat izspriežam, ka krustpunktā uz pusēm dalās XS un UV (*sk. 27.zīm*).

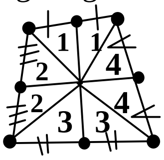


27. zīm.

Atkārtojot šos spriedumus visās vajadzīgajās vietās, iegūstam mūsu apgalvojumu.

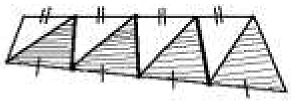
Lemma1. Katrā četru “rūtiņu” veidotā četrstūrī diagonāli pretējo rūtiņu laukumu summas ir vienādas.

Tas izriet no fakta, ka ar vienādiem cipariem (*28.zīm*) apzīmēto trijstūru laukumi ir vienādi (tiem ir vienādi pamati un kopīgs augstums.)



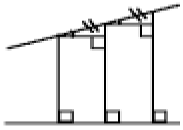
28. zīm.

Lemma2. Katrā “rūtiņu” rindā laukumi veido aritmētisko progresiju; tas pats ir arī katrā “rūtiņu kolonnā”.



29.zīm.

Iesvītroto trijstūru laukumi (*29.zīm.*) veido aritmētisko progresiju, jo pamati ir vienādi, bet augstumi veido aritmētisku progresiju (*30.zīm.*)



30.zīm.

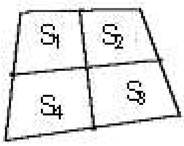
Tāpat arī neiesvītroto trijstūru laukumi veido aritmētisku progresiju. Saskaitot divas aritmētiskas progresijas, iegūst aritmētisku progresiju.

Lemma3. Visās kolonnās diferences ir vienādas, visās rindiņās - tāpat.

Tas seko no 1. lemmas:

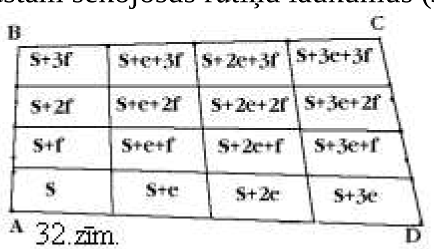
$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4, \text{ tāpēc } S_3 - S_2 = S_4 - S_1.$$

Līdz ar to blakus kolonnās diferences ir vienādas; tātad tās visas vienādas.



31.zīm.

Tagad apzīmēsim kreisās apakšējās rūtiņas laukumu ar S, rindiņu diferenci ar e, kolonnu diferenci ar f. Iegūstam sekojošus rūtiņu laukumus (*32.zīm.*)



32.zīm.

Visa četrstūra laukums ir 16S + 24e + 24f, bet četru vidējo rūtiņu kopējais laukums ir 4S + 6e + 6f, t.i., ceturtā daļa no ABCD laukuma, k.b.j..

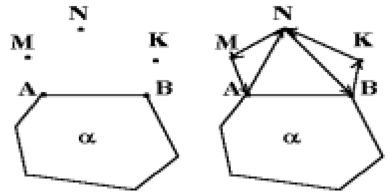
54. Ievērojam, ka

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_5x_5 = (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_5x_5)\cdot 1 =$$

$$= (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_5x_5)(x_1 + x_2 + \dots + x_5) =$$
$$= a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_5x_5^2 + (a_1 + a_2)x_1x_2 + (a_1 + a_3)x_1x_3 + \dots + (a_4 + a_5)x_4x_5 \geq$$
$$\geq a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_5x_5^2$$

saskaņā ar doto, ka $a_i + a_j \geq 0$, $x_i \geq 0$, $x_j \geq 0$.

55. Vispirms parādīsim, ka prasītais ir izdarāms, ja n dalās ar 3. Lietosim matemātisko indukciju:



33.zīm.

a) pie n=3 jāzīmē tikai trijstūra kontūra,

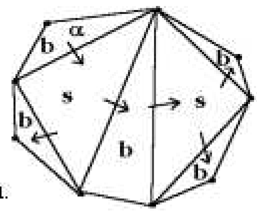
b) pieņemsim, ka pie n=3k ir uzzīmēta prasītā slēgtā lauztā līnija w, kas sadala n-stūri α un sākas un beidzas virsotnē A.

Skaidrs, ka līnija NMAwANBKN sadala prasītajā veidā (n+3)-stūri $\alpha \cup$ AMNKB (*33.zīm.*).

Tātad pie n = 1995 uzdevuma prasības ir izpildāmas.

Tagad pierādīsim, ka citiem n prasītais nav izpildāms. Tādējādi tas nebūtu izdarāms arī pie n = 1994.

Pieņemsim, ka prasītā slēgtā līnija novilkta. Uz brīdi pieņemsim, ka esam pierādījuši: iegūtos plaknes apgabalus (trijstūrus un bezgalīgo ārējo apgabalu) var katru nokrāsot baltu vai sarkanu tā, ka diviem vienādi nokrāsotiem apgabaliem nav kopīgas malas. Tad katrs nogrieznis ir viena balta un viena sarkana apgabala mala, tāpēc visu sarkano apgabalu malu kopskaits vienāds ar visu balto apgabalu malu kopskaitu. Bet visi apgabali, izņemot ārējo, ir ar 3 malām, turpretī ārējam apgabalam ir n malas. Iegūstam, ka n jādalās ar 3.



34.zīm.

Atliek pierādīt mūsu apgalvojumu par krāsojuma iespējamību.

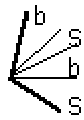
Iegūtajā triangulācijā eksistē trijstūris, kuram ir divas daudzstūra malas (zīmējumā Δ -is α); ja tāda nebūtu, tad daudzstūra malu skaits nepārsniegtu n-2, un tā ir pretruna.

Nokrāsosim šo trijstūri baltu, tam kaimiņos esošos - sarkanus, tiem kaimiņos esošos - baltus, utt. Skaidrs, ka šādā ceļā katriem diviem blakus esošiem trijstūriem ir dažādas krāsas (kaimiņos jeb blakus esošie trijstūri ir trijstūri ar kopīgu malu), jo katra diagonāle pārdala daudzstūri divās daļās, kurām citu kopīgu nogriežņu bez šīs diagonāles nav.

Lai krāsojums būtu pabeigts, jāpamato, ka visi "uz ārpusi" izejošie trijstūri būs vienā krāsā (tad ārējo apgabalu varēs nokrāsot pretējā krāsā).

Pieņemsim, ka eksistē divi "uz ārpusi" izejoši trijstūri pretējās krāsās. Tad eksistē arī divi šādi trijstūri ar kopēju virsotni. Tā kā starp trijstūriem krāsojuma pretrunu nav, tad šajā virsotnē starp tiem ir vēl pāra skaits citu trijstūru (lai varētu realizēties ķēdīte bsbs…bsbs trijstūru krāsām ap doto virsotni).

Tas nozīmē, ka no šīs virsotnes pavisam iziet nepāra skaits nogriežņu (*35.zīm.*).



35.zīm.

Bet tā nav taisnība: visi nogriežņi ir uzzīmēti, novelkot slēgtu lauztu līniju, kas katrā virsotnē tik pat reižu ieiet, cik no tās iziet; tāpēc katrā virsotnē "satiekas" pāra skaits nogriežņu.

Iegūtā pretruna parāda, ka varēs nokrāsot arī ārējo apgabalu un pabeigt krāsojumu.

56. Vienādojumu varam pārveidot par

$$4\sin x\cos x=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}$$

jeb $(2\sin x\cdot\cos x)^2=1$, jeb $\sin 2x=\mp 1$. Tad $2x=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot n$, $n\in Z$.

Visas vērtības pieder definīcijas apgabalam, tātad der par saknēm.

57. Dosim divus atrisinājumus.

A. Ievērosim, ka

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad (1)$$

$$\text{un }\ 1^5+2^5+\ldots+n^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} \qquad (2)$$

(1) pierādīsim ar matemātisko indukciju.

Bāze, ja n=1: Tiešām $1^3=\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2=1$.

Induktīvā pāreja: Pieņemsim, ka vienādība (1) izpildās, ja $n = k$, $k\in Z$:

$$1^3+2^3+\ldots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2; \qquad (*)$$

jāpierāda, ka vienādība izpildās arī, ja $n = k + 1$:

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 \quad (**).$$

Pēdējās vienādības (∗∗) kreisās puses pirmos k saskaitāmos aizvietosim ar vienādības (∗) labo pusi. Izdarot sekojošus pārveidojumus, iegūstam:

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=$$

$$=(k+1)^2\left(\left[\frac{k}{2}\right]^2+(k+1)\right)=(k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right)=(k+1)^2\left(\frac{k+2}{2}\right)^2=$$

$$=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$ jeb tiešām izpildās vienādība (∗∗) un (1).

Izmantojot matemātisko indukciju, pierādīsim arī **(2)**.

Bāze, ja n=1: Patiešām, $1^5=\frac{1^2(1+1)^2(2\cdot 1^2+2\cdot 1-1)}{12}=\frac{4\cdot 3}{12}=1$.

Induktīvā pāreja: Pieņemsim, ka vienādība (2) izpildās, ja n = k, $k \in Z$:

$$1^5 + 2^5 + \ldots + k^5 = \frac{k^2(k+1)^2(2k^2+2k-1)}{12} \quad (*).$$

Jāpierāda, ka tā izpildās arī, ja n = k + 1:

$$1^5 + 2^5 + \ldots + k^5 + (k+1)^5 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2(2(k+1)^2+2(k+1)-1)}{12} \quad (**).$$

Vienādības (∗∗) kreisās puses pirmos k saskaitāmos aizstāj ar (∗) labo pusi. Iznesot pirms iekavām $\frac{(k+1)^2}{12}$, iegūst:

$$1^5 + 2^5 + \ldots + k^5 + (k+1)^5 = \frac{k^2(k+1)^2(2k^2+2k-1)}{12} + (k+1)^5 =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{12} \cdot [\, k^2(2k^2 + 2k - 1) + 12 \cdot (k+1)^3].$$

Tā kā reizinātājs $\frac{(k+1)^2}{12}$ kopīgs (∗∗) abām pusēm, tad pietiek pierādīt, ka

$$k^2(2k^2 + 2k - 1) + 12 \cdot (k+1)^3 = (k+2)^2(2(k+1)^2 + 2(k+1) - 1).$$

To pierāda, atverot iekavas un savelkot līdzīgos locekļus, līdz ar to iegūstot, ka vienādības abas puses vienādas ar sekojošu izteiksmi:

$$2k^4 + 14k^3 + 35k^2 + 36k + 12.$$

Vienādība (∗∗), līdz ar to arī vienādība (2), pierādīta.

Tai pašā laikā zināms, ka $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Lai pierādītu a) daļu, atliek pierādīt, ka algebriskais dalījums $\frac{n(n+1)}{2}$ ir vesels skaitlis visiem n. To pierāda, šķirojot gadījumus, kad n ir pāra vai nepāra. b) daļā bez tam jāpierāda, ka arī $\frac{n(n+1)(2n^2+2n-1)}{6}$ ir vesels skaitlis katram n. To pierāda, aplūkojot atsevišķi variantus, kad, dalot ar 3, n dod atlikumu 0, 1 vai 2.

B. Maz ticams, ka formula (2) 5.pakāpju summai varētu plaši būt zināma. Dosim citu risinājumu.

Atzīmēsim, ka $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ un skaitļi n un n + 1 ir savstarpēji pirmskaitļi. Tāpēc pietiek atsevišķi pierādīt, ka $1^5 + 2^5 + \ldots + n^5$ dalās ar $\frac{n}{2}$ un n + 1 (ja n - pāra skaitlis) vai ar n un $\frac{n+1}{2}$ (ja n - nepāra skaitlis).

Pieņemsim vispirms, ka n - pāra skaitlis. Tad grupējam sekojoši:

$$1^5 + 2^5 + \ldots + n^5 = (1^5 + n^5) + (2^5 + (n-1)^5) + \ldots ;$$

katra pāra summa dalās ar 1 + n, jo $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

Apzīmējam n = 2k; tad

$$1^5 + 2^5 + \ldots + n^5 = (1^5 + (n-1)^5) + (2^5 + (n-2)^5) + \ldots + ((k-1)^5 + (k+1)^5) + k^5 + (2k)^5.$$

Tā kā katras iekavas dalās ar n, tad visa izteiksme dalās ar k, t.i., ar $\frac{n}{2}$.

agad pieņemsim, ka n - nepāra skaitlis. Grupēšana

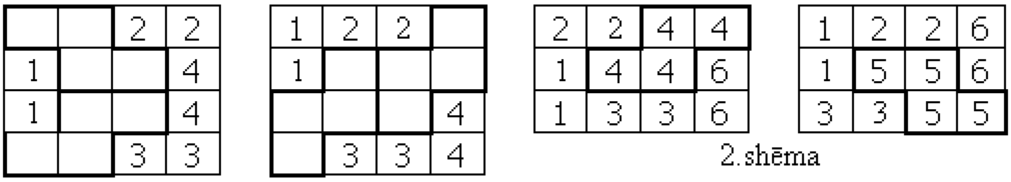
$$S = (1^5 + (n - 1)^5) + (2^5 + (n - 2)^5) + ... + n^5$$

parāda, ka S dalās ar n; tā kā vidējais starp skaitļiem 1; 2; ...; n ir $\frac{n+1}{2}$, tad grupēšana

$$S = (1^5 + n^5) + (2^5 + (n - 1)^5) + ... + \left(\frac{n+1}{2}\right)^5$$

parāda, ka S dalās ar $\frac{n+1}{2}$. Uzdevums atrisināts.

58. Sekojošā 1.shēma (pa kreisi - apakšējais slānis, pa labi - augšējais) parāda, kā no CIBĀM var salikt paralēlskaldni ar izmēriem 2×4×4. Skaidrs, ka no diviem šādiem paralēlskaldņiem var salikt kubu 4×4×4; saprotams, ka tas ir mazākais no CIBĀM saliekamais kubs.



1.shēma 36.zīm. 2.shēma

Piezīme. Ja salikts jebkurš paralēlskaldnis ar izmēriem a×b×c, tad, protams, var salikt kubu ar šķautnes garumu abc ("platumā" jāņem ab paralēlskaldņi, "dziļumā" ac paralēlskaldņi un "augstumā" bc paralēlskaldņi). Tam var izmantot, piemēram, 2.shēmu, kur parādīts, kā salikt "mazāku" paralēlskaldni 2×3×4.

59. Pierādīsim, ka nav cilvēka, kam ir tikai viens paziņa. Tiešām, ja cilvēkam A vienīgais paziņa būtu B, tad B jāpazīst arī jebkuru citu cilvēku C (jo A nepazīst C, tātad A un C jābūt kopīgam paziņam, bet tāds var būt vienīgi B). Iznāk, ka B pazīst visus - pretruna. Līdzīgi pierāda, ka nav arī cilvēka, kam nav neviena paziņas. Tātad katram ir vismaz divi paziņas.

Pieņemsim no pretējā, ka pazīšanos summa S ir mazāka par 72. Tā kā S-pāra skaitlis (katra pazīšanās ieskaitīta tajā divas reizes), tad $S \le 70$. Saskaņā ar Dirihlē principu kādam cilvēkam (sauksim to par profesoru) ir tieši divi paziņas (sauksim tos par docentiem). Pārējos 22 zinātniekus sauksim par maģistriem. Neviens maģistrs nepazīst profesoru, tāpēc katrs maģistrs pazīst kādu no docentiem. Tāpēc docentu pazīšanos ar maģistriem kopskaits ir vismaz 22, bet docentu visu pazīšanos kopskaits ir vismaz 22 + 2. Tāpēc pilnīgi visu pazīšanos kopskaits ir vismaz

2(profesoram) + 2(docentiem ar profesoru) +
+ 22(docentiem ar maģistriem) + 22·2 (maģistriem) = 70.

Redzam, ka citu pazīšanos bez minētajām nevar būt, tātad

1) docenti savā starpā nepazīstas,
2) katrs maģistrs pazīstams ar vienu docentu,
3) katrs maģistrs pazīstams tieši ar vienu citu maģistru.

Ar vienu no abiem docentiem D_1 pazīstami vismaz 11 maģistri. Lai docentam D_2 būtu kopīgi paziņas ar katru no maģistriem, katram no D_2 "apakšmaģistriem" jāpazīst kādu D_1 "apakšmaģistru", pie tam katram citu (jo katram D_1 apakšmaģistram ir tieši 2 paziņas). Tāpēc gan D_1, gan D_2 katrs pazīst tieši 11 maģistrus, kas savā starpā pazīstas pa pāriem (viens no D_1 grupas, otrs no D_2 grupas). Bet tad, ja divi maģistri (viens no D_1 grupas, otrs no D_2 grupas) viens otru nepazīst, tiem nav kopīga paziņas. Pretruna.

Tātad mūsu pieņēmums nepareizs, un $S \ge 72$.

60. Tā kā $\underline{\underline{1}} = 1$; $\underline{\underline{2}} = 1 + 1$; $\underline{\underline{3}} = 3 = 1 + 1 + 1$; $\underline{\underline{4}} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 = 1 + 3 = 3 + 1$;

$$\underline{\underline{5}} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 3 = 1 + 3 + 1 = 3 + 1 + 1 = 1 + 4 = 4 + 1;$$
$$\underline{\underline{6}} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 4 + 1 = 4 + 1 + 1 = 1 + 1 + 4 = 3 + 3 =$$
$$= 3 + 1 + 1 + 1 = 1 + 3 + 1 + 1 = 1 + 1 + 3 + 1 = 1 + 1 + 1 + 3,$$

tad redzam, ka $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_3 = 2$; $a_4 = 4$; $a_5 = 6$; $a_6 = 9$. Līdzīgi iegūstam $a_7 = 15$, $a_8 = 25$.

Rodas hipotēze, ka $a_{2n} = F_n^2$, $a_{2n+1} = F_nF_{n+1}$, kur F_0; F_1; F_2; ... ir Fibonači skaitļu virkne: $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Pierādīsim to ar matemātisko indukciju.

Pierādījumā galveno lomu spēlēs sakarība

$$\underline{a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4}} \quad (n > 4).$$

Tiešām, skaitli n izsakošā summa var sākties ar saskaitāmo 1 (tad atlikušo saskaitāmo summa ir n-1, tāpēc summu skaits ir a_{n-1}), ar saskaitāmo 3 (šādu summu skaits ir a_{n-3}) vai ar saskaitāmo 4 (šādu summu skaits ir a_{n-4}).

Bāze. Apgalvojums pareizs pie n=1; 2; 3; 4; 5; 6.

Pāreja. Pieņemsim, ka apgalvojums pareizs visiem indeksiem, kas mazāki par n. Aplūkosim a_n. Šķirosim divus gadījumus:

a) n - pāra skaitlis, n=2k. Tad

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} = a_{2k-1} + a_{2k-3} + a_{2k-4} =$$
$$= a_{2(k-1)+1} + a_{2(k-2)+1} + a_{2(k-2)} =$$
$$= F_{k-1}\cdot F_k + F_{k-2}\cdot F_{k-1} + F_{k-2}^2 = F_{k-1}\cdot F_k + F_{k-2}\cdot(F_{k-1} + F_{k-2}) =$$
$$= F_{k-1}\cdot F_k + F_{k-2}\cdot F_k =$$
$$= F_k\,(F_{k-1} + F_{k-2}) = F_k^2$$

b) n - nepāra skaitlis, n = 2k + 1. Tad

$$a_n = a_{2k} + a_{2k-2} + a_{2k-3} = F_k^2 + F_{k-1}^2 + F_{k-2}\cdot F_{k-1} =$$
$$= F_k^2 + F_{k-1}(F_{k-1} + F_{k-2}) =$$
$$= F_k^2 + F_{k-1}\cdot F_k = F_k(F_k + F_{k-1}) = F_k\cdot F_{k+1}\,.$$

Induktīvā pāreja izdarīta, apgalvojums pierādīts.

LATVIJAS 45.MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES 4.KĀRTA (61.-65.)

61. Pieņemsim, ka izveidota skaitļu virkne

$$n_0;\ n_1 = 2n_0 - 1;\ n_2 = 2n_1 - 1;\ n_3 = 2n_2 - 1;\ ...$$

un pie tam $f(n_0) = n_1$.

Pierādīsim, ka $f(n_k) = n_{k+1}$. Lietosim matemātisko indukciju.

Ja k=0, apgalvojums pareizs. Tālāk pieņemsim, ka $f(n_m)=n_{m+1}$. Tad

$$f(n_{m+1}) = f(f(n_m)) = 4n_m - 3 = 2\cdot(2n_m - 1) - 1 = 2\cdot n_{m+1} - 1 = n_{m+2},\ \text{k.b.j.}$$

Izvēloties $n_0 = 64$, saskaņā ar doto $n_1 = 2\cdot 64 - 1 = 127$, un tiešām $f(64) = f(2^6) = 2^7 - 1 = 127$. Tāpēc iegūstam $n_0 = 64$; $n_1 = 127$; $n_2 = 253$; $n_3 = 505$; $n_4 = 1009$; $n_5 = 2017$; $n_6 = 4033$; $n_7 = 8065$.

Tāpēc $f(8065) = n_8 = 2\cdot 8065 - 1 = 16129$.

62. Naturālam skaitlim n ar B(n) apzīmēsim tā balto dalītāju skaitu, ar M(n) - melno dalītāju skaitu. Definēsim S(n) = B(n) - M(n).

Pieņemsim, ka n_1 un n_2 ir savstarpēji pirmskaitļi un $n = n_1\cdot n_2$; apzīmēsim ar d kādu skaitļa n nepāra dalītāju. Acīmredzot $d = d_1\cdot d_2$, kur d_1 un d_2 ir attiecīgi skaitļu n_1 un n_2 nepāra dalītāji. Arī otrādi, ja d_1 un d_2 ir attiecīgi skaitļu n_1 un n_2 nepāra dalītāji, tad $d_1\cdot d_2$ ir n nepāra dalītājs.

Izsekojot atlikumiem pēc moduļa 4, viegli secināt:

- ja d - balts, tad d_1 un d_2 vai nu abi balti, vai abi melni;
- ja d - melns, tad viens no d_1 un d_2 ir balts, bet otrs - melns.

Arī otrādi, ja d_1 un d_2 krāsas sakrīt, tad d ir balts, bet, ja atšķiras, tad melns.

No šejiens seko, ka

$$B(n_1n_2) = B(n_1)\cdot B(n_2) + M(n_1)\cdot M(n_2),$$
$$M(n_1n_2) = B(n_1)\cdot M(n_2) + M(n_1)\cdot B(n_2).$$

Tāpēc

$$S(n_1n_2) = B(n_1)\cdot B(n_2) + M(n_1)\cdot M(n_2) - B(n_1)\cdot M(n_2) - M(n_1)\cdot B(n_2) =$$
$$= (B(n_1) - M(n_1))\cdot(B(n_2) - M(n_2)) = S(n_1)\cdot S(n_2).$$

Tāpēc apgalvojumu $S(n) \geq 0$ pietiek pierādīt pirmskaitļu pakāpēm p^k.

Ja $p = 2$, $S(n) = 1 - 0 = 1$; ja p ir formā $4t + 1$, $t = 1; 2; ...$, tad visi p^k dalītāji ir balti, tāpēc $S(n) > 0$; ja p ir formā $4t + 3$, tad p^k dalītāju virknē $1; p; p^2; ...$ balti un melni dalītāji izvietojas pamīšus, tāpēc $S(p^k) = 1$ vai $S(p^k) = 0$.

63. Vispirms pierādīsim nevienādību, ja n=3:

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}-\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_3}{x_2}-\frac{x_1}{x_3}=$$

$$=\frac{x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_3^2x_2-x_2^2x_3-x_3^2x_1-x_1^2x_2}{x_1x_2x_3}=$$

$$=\frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1)}{x_1x_2x_3}\geq 0.$$

Prasīto iegūsim, saskaitot nevienādības

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}\geq\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3} \qquad (x_1, x_2, x_3)$$

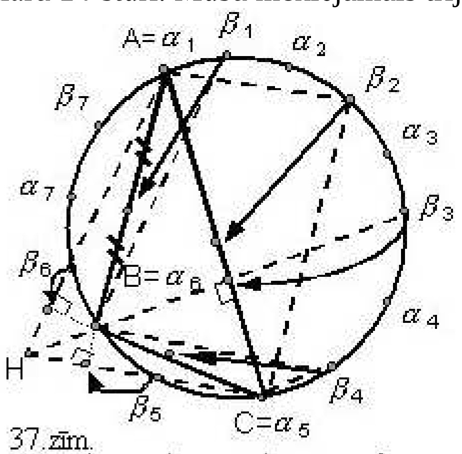
$$\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+\frac{x_4}{x_1}\geq\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_4}{x_3}+\frac{x_1}{x_4} \qquad (x_1, x_3, x_4)$$

$$\frac{x_1}{x_4}+\frac{x_4}{x_5}+\frac{x_5}{x_1}\geq\frac{x_4}{x_1}+\frac{x_5}{x_4}+\frac{x_1}{x_5} \qquad (x_1, x_4, x_5)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{x_1}{x_{n-1}}+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geq\frac{x_{n-1}}{x_1}+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_1}{x_n} \qquad (x_1, x_{n-1}, x_n)$$

64. Apskatām riņķī ievilktu regulāru 14-stūri. Mūsu meklējamais trijstūris ir ABC.



37.zīm.

No teorēmām par iekšējo un ārējo leņķi seko, ka ΔABC augstumi atrodas uz taisnēm $\alpha_1\beta_6$, $\alpha_5\beta_5$ un $\alpha_6\beta_3$.

Apzīmēsim to krustpunktu ar H (*37.zīm.*).

Apskatīsim homotētiju ar centru H un koeficientu $\frac{1}{2}$. Ievērosim, ka $\beta_1\alpha_5$ - diametrs, tāpēc $\alpha_6\beta_1 \| \alpha_1 H$; pēc teorēmas par lokiem starp paralēlām hordām $H\alpha_6 \| \alpha_1\beta_1$. Tāpēc $H\alpha_1\beta_1\alpha_6$ - paralelograms, un β_1 attēlojas par AB viduspunktu. Līdzīgi iegūstam, ka β_2 attēlojas par AC viduspunktu un β_4 attēlojas par BC vidupunktu (attiecīgi paralelogrami $H\alpha_1\beta_2\alpha_5$ un $H\alpha_6\beta_4\alpha_5$).

Zināma teorēma, ka punkti, kas simetriski ortocentram attiecībā pret malām, atrodas uz apvilktās riņķa līnijas. No šejienes secinām, ka β_3 attēlojas par augstuma BH pamatu, β_5 - par augstuma CH pamatu, β_6 - par augstuma AH pamatu.

Tātad mūs interesējošie 6 punkti ir β_1, β_2, β_3, β_4, β_5, β_6 homotētiskie attēli. Atliek ievērot, ka $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6\beta_7$ ir regulārs septiņstūris.

65. a) nē. Izvēlētu 10 skaitļu gadījumā būtu $2^{10} - 1 = 1023$ netukšas apakškopas, bet apakškopas elementu summa S ir naturāls skaitlis, kas noteikti apmierina nevienādības $1 \le S \le 990$.

Tāpēc starp apakškopām būs divas ar vienādām summām.

b) jā, var. Piemēram, varam izvēlēties skaitļus

$$3 \cdot 2^0;\ 3 \cdot 2^1;\ 3 \cdot 2^2;\ 3 \cdot 2^3;\ 3 \cdot 2^4;\ 3 \cdot 2^5;\ 3 \cdot 2^5 - 1;\ 3 \cdot 2^5 + 1.$$

c) nē, nevar.

Pieņemsim no pretējā, ka esam izvēlējušies 9 skaitļus

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_8 < a_9.$$

Aplūkosim vispirms apakškopas, kas satur 3; 4; 5 vai 6 elementus. Tādu pavisam ir

$$C_9^3 + C_9^4 + C_9^5 + C_9^6 = 84 + 126 + 126 + 84 = 420.$$

Tā kā visām šīm apakškopām summas dažādas, tad lielākā summa pārsniedz mazāko vismaz par 419. Tāpēc

$$(a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9) - (a_1 + a_2 + a_3) \ge 419.$$

Tagad aplūkosim apakškopas, kurās ir 2, 3 vai 4 elementi, kuri nav mazāki par a_4, un varbūt vēl kādi citi. Tādu pavisam ir

$$2^3 \cdot (C_6^2 + C_6^3 + C_6^4) = 8 \cdot (15 + 20 + 15) = 400.$$

Līdzīgi kā iepriekš iegūstam

$$(a_9 + a_8 + a_7 + a_6 + a_1 + a_2 + a_3) - (a_4 + a_5) \ge 399.$$

Saskaitot iegūtās nevienādības, iegūstam

$$2 \cdot (a_6 + a_7 + a_8 + a_9) \ge 818$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \ge 409$$

Ja $a_9 \le 100$, tad tā nevar būt. Tiešām, ja $a_9 \le 100$, tad $a_8 \le 99$, $a_7 \le 98$, $a_6 \le 97$, tāpēc

$$a_9 + a_8 + a_7 + a_6 \le 100 + 99 + 98 + 97 < 400 \text{ - pretruna.}$$

Tātad mūsu pieņēmums nepareizs un 9 skaitļus ar prasītajām īpašībām izvēlēties nevar.

LATVIJAS 22. ATKLĀTĀ MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDE (66.-85.)

66. Ja vienādojumiem $x^2 + 2ax + b^2 = 0$ un $x^2 + 2bx + c^2 = 0$ katram ir divas dažādas saknes, tad to diskriminantiem jābūt lielākiem par 0:

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - b^2 > 0 \text{ un } \frac{D_2}{4} = b^2 - c^2 > 0.$$

No šīm abām nevienādībām seko, ka

$$\frac{D_1}{4}+\frac{D_2}{4} = a^2 - b^2 + b^2 - c^2 = a^2 - c^2 > 0. \ (1)$$

Aplūkojam vienādojumu $x^2 + 2cx + a^2 = 0$.

Tā diskriminants $\frac{D_3}{4} = c^2 - a^2$. No (1) seko, ka $\frac{D_3}{4} < 0$. Tātad šim vienādojumam tiešām sakņu nav.

67. Visus 1995 skaitļus sadalīsim 997 grupās. Pirmajā grupā ņemsim tikai skaitļus 1, 2 un 3. Tālākās grupas veido pēc viena principa - otrajā grupā ņemsim 4 un 5, trešajā grupā ņemsim 6 un 7, utt., 997.grupā ņemsim 1994 un 1995.

Tā kā grupu skaits ir 997, bet izvēlēto skaitļu skaits ir 998, tad noteikti būs divi tādi skaitļi a un b, kas atradīsies vienā grupā.

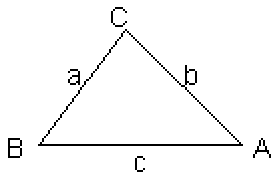
Acīmredzami, ka pirmajā grupā katriem diviem skaitļiem lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Tātad, ja abi skaitļi a un b nokļuvuši šajā grupā, prasītais izpildās.

Aplūkosim pārējās grupas. Tajās visās atrodas tieši divi blakusesoši naturāli skaitļi. Apzīmēsim tos ar k un $k + 1$. Pieņemsim no pretējā, ka šiem skaitļiem ir kāds kopīgs dalītājs $d > 1$. No skaitļu dalāmības īpašības tad seko, ka šo skaitļu starpība $(k + 1) - k = 1$ arī dalās ar d. Bet 1 dalās tikai ar $1 < d$. Tāpēc iegūta pretruna.

Tas nozīmē, ka, ja arī skaitļi a un b nokļuvuši kādā no grupām, kas nav 1. grupa, to lielākais kopīgais dalītājs būs 1.

Tātad starp izvēlētajiem 998 skaitļiem būs vismaz divi ar lielāko kopīgo dalītāju 1.

68. Trijstūra laukumu aprēķina pēc formulas $S_\Delta = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\angle C$. Tā kā dots, ka $S_\Delta = 2$, tad $\frac{1}{2}ab\cdot\sin\angle C = 2$ jeb $ab\cdot\sin\angle C = 4$.

38.zīm.


Tā kā $|\sin\angle C| \le 1$, tad $|ab| \ge 4$. Tā kā trijstūra malu garumi ir pozitīvi, tad

$$ab \ge 4 \quad (1)$$

Pieņemsim no pretējā, ka $b < 2$. Tā kā dots, ka $a \le b$, tad arī $a < 2$, bet tad $ab < 4$, kas ir pretrunā ar (1). Tātad $b \ge 2$, k.b.j.

69. a) Der skaitlis 1213121, jo līdzsvaroti ir skaitļi

12131211
12131212
12131213;

b) der skaitlis 1213121412131215121312141213121, jo, pierakstot galā 1, 2, 3, 4 vai 5, skaitlis kļūst līdzsvarots:

12131214121312151213121412131211
12131214121312151213121412131212
12131214121312151213121412131213
12131214121312151213121412131214
12131214121312151213121412131215.

c) Lai pierakstītu skaitli, kas der šajā gadījumā, ieviesīsim saīsinājumus.

Skaitli, kas derēja a) gadījumā, apzīmēsim ar X. Tad b) piemērā derīgo skaitli var pierakstīt X4X5X4X. Šo skaitli apzīmēsim vēl īsāk - ar U.

Tādā gadījumā meklētais c) piemēra skaitlis (apzīmēsim to ar A) saīsinātā pierakstā izskatās šādi:

U6U7U6U8U6U7U6U9U6U7U6U8U6U7U6U

Pierādīsim, ka šis skaitlis der.

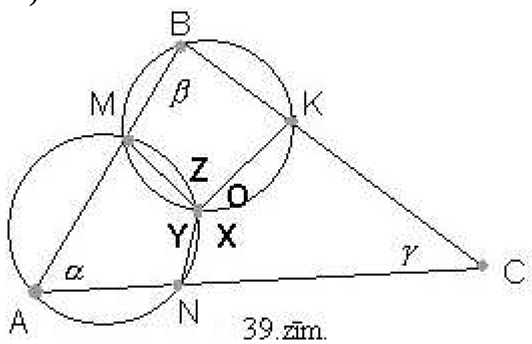
Tā kā skaitlis A sākas un beidzas ar U (tātad arī - sākas ar U pirmo pusi un beidzas ar U otro pusi), tad skaidrs, ka, galā pieliekot 1, 2, 3, 4 vai 5, iegūtais skaitlis būs līdzsvarots - gluži kā b) gadījumā. Atšķirībā no b) piemēra šeit U kopijām pa vidu sarakstīti vēl citi cipari, bet tas līdzsvarotību nemaina, jo tie līdzsvarošanā neiesaistās un to neietekmē.

Ja skaitlim A galā pieraksta 6, tad abās pusēs tas līdzsvarojas ar U6.

Ja skaitlim A galā pieraksta 7, tad abās pusēs tas līdzsvarojas ar U6U7, ja - 8, tad līdzsvarojas ar U6U7U6U8, bet ja galā raksta 9, tad skaitlis līdzsvarojas ar fragmentiem, kas ir vienādi ar pusi no skaitļa - U6U7U6U8U6U7U6U9.

Tātad tiešām skaitlis A der.

70. 1) Pieņemsim, ka visu triju riņķa līniju krustpunkti atrodas trijstūra iekšienē. Bez tam ΔABC iekšējos leņķus apzīmēsim ar α, β un γ, bet leņķus $\angle NOK$, $\angle NOM$, $\angle KOM$ attiecīgi ar x, y un z (sk.39.zīm.).



39.zīm.

Uzzīmēsim divas no riņķa līnijām, par kurām zināms, ka tās apvilktas ap ΔAMN un ΔBMK un krustojas punktos M un O. Tātad tās ir apvilktas arī ap četrstūriem AMON un BMOK. Bet no tā seko, ka šo četrstūru pretējo leņķu summa ir 180^0 jeb $y + \alpha = 180^0$ un $z + \beta = 180^0$. Tādējādi

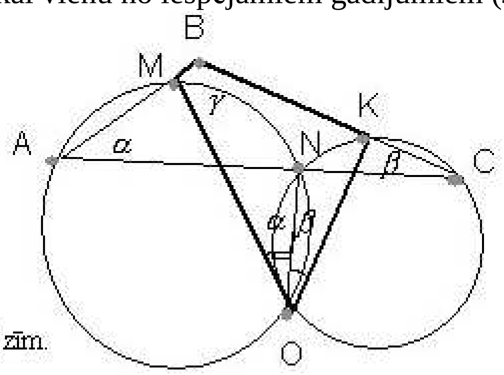
$$y = 180^0 - \alpha \quad \text{un} \quad z = 180^0 - \beta \quad (1)$$

Aplūkosim leņķi x. To var izteikt kā $x = 360^0 - y - z$. No (1) seko, ka

$$x=360^0 - (180^0 - \alpha) - (180^0 - \beta) = \alpha + \beta.$$

Aplūkosim summu $x + \gamma = \alpha + \beta + \gamma = 180^0$ (kā trijstūra iekšējo leņķu summa). Bet tā ir arī četrstūra CNOK pretējo leņķu summa. Tas nozīmē, ka ap šo četrstūri var apvilkt riņķa līniju. Bet no tā, savukārt, seko, ka ap ΔCNK apvilktā riņķa līnija iet caur O, jeb visas trīs riņķa līnijas krustojas vienā punktā, k.b.j.

2) Pieņemsim, ka divu riņķa līniju krustpunkts atrodas trijstūra ārpusē. Te būtu jāšķiro gadījumi atkarībā no tā, kurā vietā šis krustpunkts atrodas. Līdz ar to atšķirtos arī pierādījumi. Aplūkosim tikai vienu no iespējamiem gadījumiem (*sk.40.zīm.*)



40.zīm.

Ieviešam apzīmējumus α, β un γ leņķiem $\angle A$, $\angle C$ un $\angle B$ un divu riņķa līniju krustpunktu apzīmējam ar O.

$$\angle MON = \angle MAN = \alpha,$$

jo balstās uz vienu riņķa līnijas loku. Tā paša iemesla dēļ

$$\angle KON = \angle KCN = \beta.$$

$$\text{Bet } \angle MOK = \angle MON + \angle KON = \alpha + \beta.$$

Aplūkojam četrstūri MOKB. Tā pretējo leņķu summa ir

$$\angle MOK + \angle MBK = \alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

(kā trijstūra ABC iekšējo leņķu summa).Tas nozīmē, ka ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju. Bet līdz ar to ap ΔBMK apvilktā riņķa līnija iet caur O.

Tātad tiešām visas trīs riņķa līnijas krustojas vienā punktā.

Gadījumi, kad divas riņķa līnijas krustojas uz trijstūra malas, ir jau apskatīto gadījumu robežsituācijas.

71. Pēc dotā var sastādīt vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} 2k + 3t + 5d = 53 \\ 3k + 5t + 9d = 91 \end{cases}$$

(ar k, t un d apzīmējam attiecīgi krēga, terbuka un dillera cenu).

Pareizinām pirmo vienādību ar 2 un atņemam no tās otro vienādību, tādējādi iegūstot:

$$2\cdot(2k + 3t + 5d) - (3k + 5t + 9d) = 2\cdot 53 - 91$$

$$4k + 6t + 10d - 3k - 5t - 9d = 106 - 91$$

jeb

$$k + t + d = 15$$

Tātad viens krēgs, viens terbuks un viens dillers kopā maksā 15 santīmus. Uzdevuma nosacījumus apmierina, piemēram, $k = 4$; $t = 5$; $d = 6$.

72. a) Vispirms pierādīsim sekojošu sakarību:

ja a un b ir naturāli skaitļi, tad

$$S(a\cdot b) \le S(a)\cdot S(b). \qquad (*)$$

Izsaka a formā $a = a_0 + a_1\cdot 10^1 + ... + a_n\cdot 10^n$ un

b formā $b = b_0 + b_1\cdot 10^1 + ... + b_m 10^m$.

Līdz ar to reizinājums ab izsakās kā

$$(a_0 + a_1\cdot 10^1 + ... + a_n\cdot 10^n)\cdot(b_0 + b_1\cdot 10^1 + ... + b_m 10^m) =$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)\cdot 10^1 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\cdot 10^2 + ... + a_nb_m\cdot 10^{n+m}.$$

Ja visi iegūtie koeficienti pie skaitļa 10 pakāpēm nepārsniedz 9, tad reizinot nekāds pārnesums nenotiek, t.i., iegūtā skaitļa ciparu summa vienāda ar sekojošu summu:

$$S(ab) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + ... + a_nb_m =$$

$$= (a_0 + a_1 + ... + a_n)\cdot(b_0 + b_1 + ... + b_m),$$

bet tas nozīmē, ka $S(a\cdot b) = S(a)\cdot S(b)$.

Tagad pavērosim, kas notiek, ja reizinot rodas kāds pārnesums, t.i., kāds no aplūkotajiem koeficientiem ≥ 10.

Tādā gadījumā skaitļa $k_0 + k_1 10^1 + ... + k_{n+m}10^{n+m}$ pierakstā eksistē kāds $k_i > 9$. To pierakstīsim kā $10 + a_i$, pie tam $a_i \ge 0$. Tad

$$k_i\cdot 10^i + k_{i+1}\cdot 10^{i+1} = (10+a_i)\cdot 10^i + k_{i+1}\cdot 10^{i+1} =$$

$$= a_i\cdot 10^i + (k_{i+1} + 1)\cdot 10^{i+1}.$$

Kā redzams, līdz ar pārnesumu ciparu summa ir mazinājusies, jo

$$k_i + k_{i+1} = 10 + a_i + k_{i+1} > a_i + k_{i+1} + 1.$$

Bet tas nozīmē, ka $S(a\cdot b) < S(a)\cdot S(b)$.

Tātad jebkurā gadījumā ir spēkā $(*)$, ko arī gribējām pierādīt.

Tālāk izmantosim to, ka nuļļu pievienošana skaitļa ciparu summu nemaina, tāpēc

$$S(n) = S(1000\cdot n).$$

Tagad izdarīsim sekojošus pārveidojumus, izmantojot arī (∗) :

$$S(n) = S(1000 \cdot n) = S(125 \cdot 8n) \leq S(125) \cdot S(8n) = 8 \cdot S(8n),$$

līdz ar to ir iegūts, ka $\frac{1}{8} \cdot S(n) \leq S(8n)$, k.b.j.

b) Ar A apzīmēsim patvaļīgu skaitli formā $125 \cdot 10^k$, kur k - vesels, nenegatīvs skaitlis 0, 1, 2, ... Šādā formā var uzrakstīt bezgalīgi daudz dažādu skaitļu, jo k mēs varam patvaļīgi izvēlēties.

Viegli ievērot, ka A ciparu summa $S(A) = 1 + 2 + 5 + k \cdot 0 = 8$.

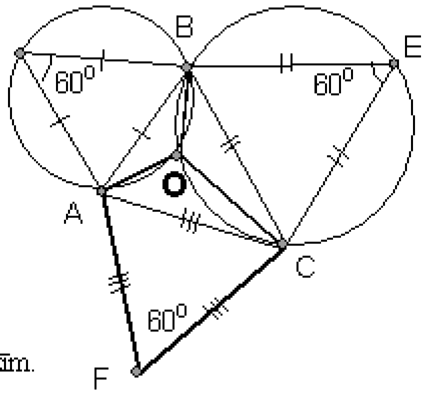
Ja A pareizina ar 8, iegūst skaitli $1000 \cdot 10^k = 10^{k+3}$. Šim skaitlim, savukārt, ciparu summa ir 1 ($S(8A) = 1 + (k + 3) \cdot 0 = 1$).

Tātad tiešām $S(8A) = \frac{1}{8} \cdot S(A) = 1$.

Tā kā A varēja izvēlēties bezgalīgi daudzos veidos un A ir naturāls skaitlis, tad līdz ar to arī bezgalīgi daudziem naturāliem n pastāv vienādība

$$S(8n) = \frac{1}{8} \cdot S(n), \text{ k.b.j.}$$

73. Pieņem, ka uz ΔABC malām konstruētie regulārie trijstūri ir ΔABD, ΔBCE un ΔCAF (*sk.41.zīm.*). Apvelkam riņķa līnijas ap ΔABD un ΔBCE. To krustpunktu apzīmē ar O. Tā kā $\angle ABC < 120^0$, tad O atrodas $\angle ABC$ iekšpusē, tā kā $\angle AOB + \angle BOC = 240^0 > 180^0$ (sk. tālāk), tad O atrodas ΔABC iekšpusē.



41.zīm.

Tā kā ap četrstūri ADBO ir apvilkta riņķa līnija, tad tā pretējo leņķu summa

$$\angle ADB + \angle AOB = 180^0.$$

Tā kā ΔABD ir regulārs trijstūris, tad $\angle ADB = 60^0$, tāpēc

$$\angle AOB = 180^0 - \angle ADB = 180^0 - 60^0 = 120^0.$$

Analogi pierāda, ka arī $\angle BOC = 120^0$.

Tā kā $\angle AOB + \angle BOC + \angle COA = 360^0$, tad arī

$$\angle COA = 360^0 - \angle AOB - \angle BOC = 360^0 - 120^0 - 120^0 = 120^0.$$

Aplūko četrstūri AOCF. Tā kā $\angle COA = 120^0$ pēc tikko pierādītā un $\angle CFA = 60^0$ kā regulāra trijstūra leņķis, tad

$$\angle COA + \angle CFA = 120^0 + 60^0 = 180^0.$$

Bet tā ir četrstūra AOCF pretējo leņķu summa, tāpēc ap AOCF var apvilkt riņķa līniju. Šī riņķa līnija ir arī ΔCAF apvilktā riņķa līnija un bez tam iet caur punktu O. Tādējādi patiešām visu konstruēto regulāro trijstūru apvilktās riņķa līnijas krustojas vienā punktā O, k.b.j.

74. Pierādījumā tiks izmantots sekojošs fakts.

Ja dota aritmētiska progresija ar diferenci t, tad no t secīgiem naturāliem skaitļiem ne vairāk kā viens skaitlis pieder dotajai progresijai.

Ja pieņemtu, ka ir vairāk nekā viens dotajai aritmētiskajai progresijai piederošs skaitlis, tad starpība starp šiem skaitļiem būtu mazāka par t. Bet tas nevar būt, jo tādā gadījumā arī aritmētiskās progresijas diferencei būtu jābūt mazākai par t.

Tātad, ja aplūkotu k·t secīgus naturālus skaitļus, no tiem būtu ne vairāk kā k skaitļu, kas piederētu dotajai progresijai.

Tagad aplūkosim skaitļu intervālu [1; abcde], kur a, b, c, d, e ir uzdevumā doto aritmētisko progresiju diferences.

Tā kā pirmās progresijas diference ir a, tad aplūkotajā skaitļu intervālā ir ne vairāk kā bcde skaitļu, kas pieder šai progresijai. Otrajai progresijai (ar diferenci b), savukārt, pieder ne vairāk kā acde šī intervāla skaitļu. Līdzīgi secina, ka 3., 4. un 5. progresijai (ar diferencēm c, d un e) pieder attiecīgi ≤ abde, ≤ abce un ≤ abcd skaitļu no šī intervāla.
Pat ja pieņemtu, ka visi dažādajām progresijām piederošie skaitļi ir dažādi, tad to kopējais skaits aplūkotajā intervālā būtu

$$\leq bcde + acde + abde + abce + abcd = abcde\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right).$$

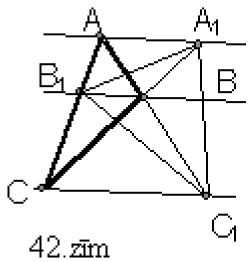
Pēc uzdevuma nosacījumiem

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}<1,$$

līdz ar to arī dotajā intervālā visām piecām progresijām piederošo skaitļu skaits ir < abcde.

Bet, tā kā tika aplūkots intervāls [1; abcde], kurā pavisam ir tieši abcde naturālu skaitļu, tad, acīmredzot, pat jau šajā intervālā eksistē tāds naturāls skaitlis, kurš nepieder nevienai no minētajām piecām progresijām.

75. Pieņemsim, ka krustpunkti, ko iegūst, velkot paralēlas taisnes caur ΔABC virsotnēm A, B un C līdz šo virsotņu pretējām malām vai to pagarinājumiem, apzīmēti attiecīgi ar A_1, B_1 un C_1 (*sk.42.zīm.*).



42.zīm

Tas nozīmē, ka jāpierāda vienādība

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = 2\cdot S_{\Delta ABC}.$$

Tad $S_{\Delta ABC}$ var izteikt kā

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABB_1} + S_{\Delta CBB_1} \qquad (1),$$

savukārt $S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta A_1B_1B} + S_{\Delta C_1B_1B} + S_{\Delta A_1C_1B}$ (2)

$S_{\Delta ABB_1} = S_{\Delta A_1BB_1}$, jo to pamats BB_1 ir kopīgs un augstumi pret šo pamatu (attālums starp paralēlajām taisnēm $AA_1 \| BB_1$) vienādi.

Analoģiski secina, ka $S_{\Delta CBB_1} = S_{\Delta C_1BB_1}$.

Tādējādi no tikko iegūtajām vienādībām un (1) un (2) seko:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABB_1} + S_{\Delta CBB_1} = S_{\Delta A_1BB_1} + S_{\Delta C_1BB_1} \text{ jeb}$$

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta A_1BB_1} + S_{\Delta C_1BB_1} + S_{\Delta A_1C_1B} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A_1C_1B} \quad (*)$$

Tālāk aplūko ΔACC_1 un ΔA_1CC_1. Tāpat kā iepriekš atkal var secināt, ka arī šo trijstūru pamats ir kopīgs (CC_1), un augstumi ir vienādi, jo tie ir attālumi starp vienām un tām pašām paralēlajām taisnēm ($AA_1 \| CC_1$). Tāpēc

$$S_{\Delta ACC_1} = S_{\Delta A_1CC_1} \qquad (3).$$

No (3) abām pusēm atņemot $S_{\Delta BCC_1}$, iegūstam

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A_1BC_1}.$$

Līdz ar to arī (∗) var pārrakstīt sekojoši:

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A_1C_1B} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ABC} = 2 \cdot S_{\Delta ABC}, \text{ kbj.}$$

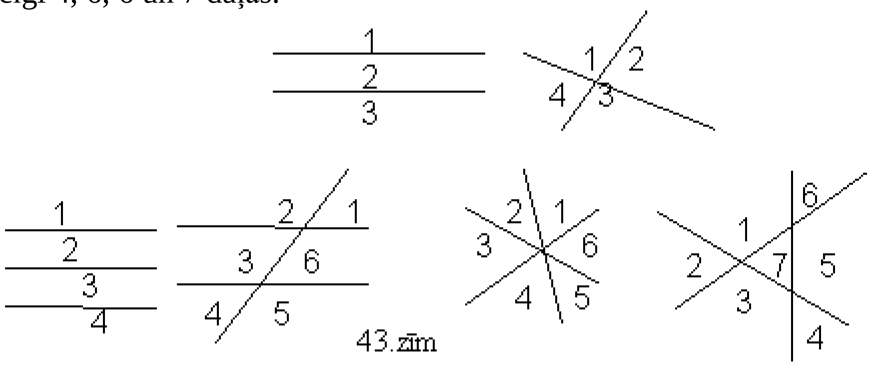
76. Aplūkosim grafikus, kādi veidotos koordinātu plaknē, ja sistēmā visos vienādojumos ∗ aizvietotu ar =.

Pirmkārt, visu šo vienādojumu grafiki būtu taisnes. Ņemsim vērā, ka, ja ∗ vietā būtu >, tad nevienādības visi atrisinājumi izvietotos vienā pusē no taisnes, savukārt < gadījumā visi atrisinājumi atrastos taisnei otrajā pusē.

Tagad aplūkosim, cik daļās taisnes sadala plakni. Ja būtu tikai viena taisne, tad plakne sadalītos divās daļās.

Ja būtu divas taisnes, tad nāktos šķirot gadījumus, kad abas taisnes ir paralēlas - tad plakne tiktu sadalīta 3 daļās, savukārt krustiskas taisnes plakni sadala 4 daļās.

Ja divām taisnēm pievienotu vēl trešo taisni (kas mūs tieši arī interesē), tad atkarībā no taišņu novietojuma varētu šķirot 4 dažādus gadījumus (*sk.43.zīm.*), kuros plakne tiek dalīta attiecīgi 4, 6, 6 un 7 daļās.



43.zīm

Tādējādi lielākais apgabalu skaits, kādos mūs interesējošās trīs taisnes sadala plakni, ir 7. Pie tam ņemsim vērā - katrā apgabalā esošie punkti (x; y) kalpo kā atrisinājumi mūsu nevienādību sistēmai ar citādu < un > zīmju kombināciju, t.i., piemēram, nosacīti 1. apgabalā varētu atrasties visi atrisinājumi nevienādību sistēmai, kurā visas ∗ aizstātas ar >, 2. apgabalā - pirmā ∗ aizstāta ar <, bet pārējās ∗ aizstātas ar >, 3.apgabalā - pirmās divas ir < un tikai pēdējā ir >, u.tml.

Ja aplūko gadījumu ar vislielāko, t.i., 7 apgabalu skaitu, tad visā plaknē iespējams izvietot atrisinājumus no triju nevienādību sistēmām ar ne vairāk kā 7 dažādām < un > kombinācijām.

Tālāk uzrādītas visas iespējamās < un > kombinācijas atkarībā no tā, kādā secībā trijās nevienādībās tās tikušas ievietotas.

>	<	<	<	>	>	>	<
>	>	<	<	<	>	<	>
>	>	>	<	<	<	>	<

Kā redzams, iespējamo kombināciju skaits ir 8, bet maksimālais apgabalu skaits ir 7. No tā var secināt, ka eksistē tāda < un > kombinācija, kura noteikti neietilpst to kombināciju skaitā, kas dod nevienādību sistēmai atrisinājumus; tas nozīmē, ka ∗ vietā tiešām var ievietot < un > tā, lai iegūtajai nevienādību sistēmai nebūtu atrisinājuma, kbj.

77. Lemma. Ja x ir naturāls skaitlis, tad x un x+1 ir savstarpēji pirmskaitļi, t.i., tiem nav neviena kopīga pozitīva dalītāja, izņemot 1.

Pieņemam pretējo - eksistē tāds skaitlis a > 1, ka x dalās ar a un x + 1 dalās ar a. Pēc skaitļu dalāmības īpašībām no tā sekotu, ka starpība (x + 1) - x = 1 arī dalās ar a. Bet tā kā 1 dalās tikai ar 1, tad iegūta pretruna. Lemma pierādīta.

Apskatīsim y^7 sadalījumu pirmskaitļu reizinājumā. Ja $y=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, kur $p_1,\ldots,p_k$ - dažādi pirmskaitļi, tad $y^7=p_1^{7\alpha_1}p_2^{7\alpha_2}\ldots p_k^{7\alpha_k}$. Tā kā x(x + 1) = y^7, tad visi $7\alpha_1$ pirmreizinātāji p_1, visi $7\alpha_2$ pirmreizinātāji p_2, …, visi $7\alpha_k$ pirmreizinātāji p_k ir vai nu x, vai x+1 dalītāji. Saskaņā ar lemmu visi $7\alpha_1$ pirmreizinātāji p_1 sastopami vai nu skaitlī x, vai skaitlī x+1 (nevis daļa vienā, daļa otrā.) Tas pats attiecas uz p_2, p_3 utt.

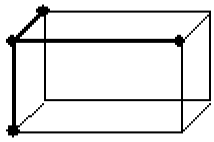
Tātad x ir kāda naturāla skaitļa septītā pakāpe un arī x+1 ir naturāla skaitļa septītā pakāpe. Tas nevar būt, jo nav divu septīto pakāpju, kuras atšķirtos par 1. (Pat vismazāko blakusesošo naturālo skaitļu 7. pakāpju starpība $2^7 - 1^7 = 128 - 1 = 127 > 1$, bet, skaitļiem palielinoties, arī to 7.pakāpju starpība palielinās.)

Tātad vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

78. Atbilde - paralēlskaldņu skaits ir 29.

Gadījumus šķirosim atkarībā no tā, kādā veidā šie 4 punkti ir savienoti ar paralēlskaldņa šķautnēm.

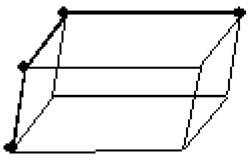
1) Ir tieši viens punkts (centrālais), kas ar šķautnēm savienots ar visiem pārējiem trim punktiem (*sk.44.zīm.* treknākās šķautnes un punktus).



44.zīm.

Šādi gadījumi pavisam ir 4 - atkarībā no tā, kuru no četriem punktiem izvēlas par centrālo punktu.

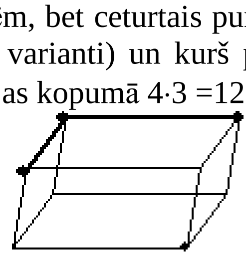
2) Visi četri punkti secīgi pēc kārtas savienoti ar šķautnēm (*sk.45.zīm.*). Tādu variantu skaits ir 12. Divus vidējos punktus no visiem četriem var izvēlēties C_4^2 veidos, bet atlikušos divus var pievienot divos veidos.



45.zīm.

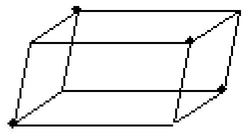
Tātad šādu variantu skaits kopumā ir $C_4^2\cdot 2=\frac{4!}{(4-2)\cdot 2!}\cdot 2=6\cdot 2=12.$

3) Trīs punkti savienoti ar šķautnēm, bet ceturtais punkts ir izolēts (*sk.46.zīm.*). Atkarībā no tā, kurš ir izolētais punkts (4 varianti) un kurš punkts ir ar šķautnēm savienots ar abiem pārējiem (3 varianti), veidojas kopumā 4·3 =12 varianti.



46.zīm.

4) Visi četri punkti ir izolēti, t.i., nekādi divi no tiem nav savienoti savā starpā ar šķautni (*sk.47.zīm.*). Tāds variants ir viens vienīgs.



47.zīm.

Citu gadījumu, kā dotie punkti var būt savienoti ar šķautnēm tā, lai tomēr visi četri punkti neatrastos vienā plaknē, nav. Līdz ar to kopējais variantu skaits ir

$$4 + 12 + 12 + 1 = 29.$$

Atliek parādīt, ka uzrādītajos četros gadījumos vienmēr iespējams konstruēt paralēlskaldni. Par malējiem punktiem tiks saukti tie no dotajiem punktiem, no kuriem iet tieši viena šķautne uz kādu citu no dotajiem punktiem. Šo vienu šķautni arī sauksim par malējo šķautni.

1) gadījumā velkam trīs plaknes caur katrām divām šķautnēm, kas savieno dotos punktus. Pēc tam caur malējiem trim punktiem velkam plaknes, kas paralēlas jau trim iegūtajām. Rezultātā iegūstam 6 plaknes, kas krustojoties ierobežo mūs interesējošo paralēlskaldni.

2) gadījumā velkam divas plaknes caur ar divām šķautnēm secīgi savienotiem trim dotajiem punktiem. Pēc tam caur abām malējām šķautnēm velkam plaknes, kas paralēlas otrai no malējām šķautnēm. Visbeidzot caur dotajiem malējiem punktiem velkam plaknes, kas paralēlas pašā sākumā novilktajām divām plaknēm. Atkal iegūstam 6 plaknes, kas ierobežo mūs interesējošo paralēlskaldni.

3) gadījumā velkam plakni caur ar šķautnēm savienotajiem trim punktiem. Caur izolēto punktu varam novilkt šai plaknei paralēlu plakni.

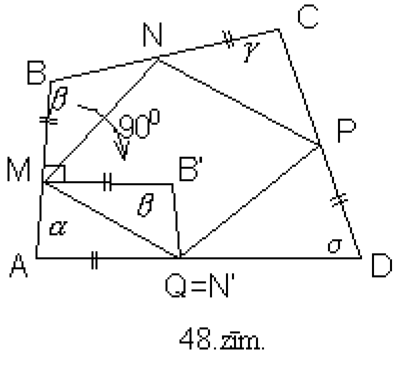
Tālāk caur izolēto punktu un vienu no malējiem punktiem velkam plakni, kas paralēla tai dotajai šķautnei, kurai caur šiem punktiem var novilkt paralēlu plakni. Tad caur šo šķautni velkam plakni, kas paralēla tikko iegūtajai.

Tāpat rīkojamies, izmantojot otru no malējiem punktiem, rezultātā iegūstot atlikušās divas plaknes, kas kopā ar iepriekšiegūtajām četrām ierobežo interesējošo paralēlskaldni.

4) gadījumā caur diviem no dotajiem punktiem velkam taisni, to velkam arī caur atlikušajiem diviem punktiem. Caur šīm taisnēm, kā caur šķērsām, paralēlas plaknes var novilkt vienā vienīgā veidā.

Tālāk izvēlamies citādus doto punktu pārus un atkal novelkam paralēlu plakņu pāri. Tāpat rīkojamies, izvēloties vēl citā veidā punktu pārus. Pavisam ir iespējams punktu pārus izvēlēties 3 dažādos veidos, jo katrs no punktiem var būt pārī ar katru no trim atlikušajiem punktiem, tādējādi izveidojot citu variantu. Katrā variantā tika iegūtas 2 jaunas plaknes, tātad kopā atkal iegūst 6 plaknes, kas ierobežo mūs interesējošo paralēlskaldni.

79. Vispirms iedomāsimies, ka ΔBNM ap punktu M tiek pagriezts par 90^0, iegūstot $\Delta B'N'M$, tā, kā parādīts zīmējumā (*sk.48.zīm.*). Četrstūra ABCD leņķus apzīmēsim attiecīgi ar α, β, γ un σ.

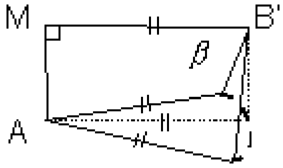


48.zīm.

Tā kā MNPQ - kvadrāts, tad pēc pagriešanas iegūtā mala MN’ sakritīs ar malu MQ.

Aplūkosim četrstūri AMB’Q. Tā kā ΔBNM tika pagriezts par 90^0, tad $\angle$BMB’=90^0. Līdz ar to $\angle$AMB’ kā tā blakusleņķis arī ir 90^0.

Tā kā MB’ = AQ, tad $\angle$MB’Q = $\angle\beta \le 90^0$. Ja $\angle\beta = 90^0$, tad, acīmredzami, $\angle\alpha = 90^0$. Ja $\angle\alpha > 90^0$ vai $\angle\alpha < 90^0$, tad $\angle\beta$ var tikai samazināties (*sk.49.zīm.*). Tāpēc tiešām $\angle\beta$ nevar būt $>90^0$.



49.zīm.

Tālāk izdara analoģiskas trijstūru pagriešanas ap virsotni par 90^0 ar ΔCPN, ΔDQP un ΔAMQ. No tā secina, ka $\angle\alpha\le 90^0$, $\angle\gamma \le 90^0$ un $\angle\sigma\le 90^0$. Tā kā ABCD visu leņķu summa noteikti ir 360^0, tad, lai to realizētu, šī četrstūra visi leņķi $\alpha = \beta = \gamma = \sigma = 90^0$.

Tātad ABCD ir vismaz taisnstūris. Lai tas būtu arī kvadrāts, jāpierāda tā malu vienādība.

Aplūko ΔBNM, ΔCPN, ΔDQP un ΔAMQ. Visiem šiem taisnleņķa trijstūriem ir vienādas katetes MB=NC=PD=QA pēc dotā un vienādas hipotenūzas kā viena kvadrāta MNPQ malas. No tā var secināt, ka visi šie trijstūri ir vienādi. Kā vienādiem trijstūriem tiem ir vienādas arī otrās katetes. Tātad

$$BN = CP = DQ = AM \quad \text{un} \quad MB = NC = PD = QA.$$

No tā seko, ka

$$AM + MB = BN + NC = CP + PD = DQ + QA$$

jeb

$$AB = BC = CD = DA.$$

Bet tas nozīmē, ka ABCD - kvadrāts, k.b.j.

80. Vispirms rindiņas pēc kārtas, sākot ar pirmo, sanumurēsim. Zināms, ka rindiņas ar dažādiem numuriem atšķiras vismaz vienā rūtiņā. *50.zīm.* var skatīt tādas tabulas piemēru.

1.	a	b	c	d	e
2.	a	b	c	d	f
3.	a	b	c	e	e
4.	a	d	c	d	f
5.	b	d	e	d	**f**

50.zīm.

Pieņemsim no pretējā, ka nevar izsvītrot nevienu kolonnu tā, lai palikušajā tabulā katras divas rindiņas joprojām atšķirtos vismaz vienā rūtiņā. Tas nozīmē, ka, izsvītrojot jebkuru kolonnu, vismaz divas rindiņas sakritīs pilnībā.

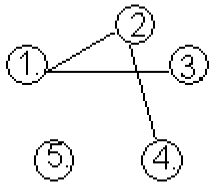
Tālāk uzzīmēsim grafu, kur grafa virsotnes būs rindiņu numuri. Tātad, ja tabula sastāv no $n\times n$ rūtiņām, tad virsotņu skaits grafā būs n.

Respektējot mūsu pieņēmumu no pretējā, no tabulas pēc kārtas svītrosim pa vienai kolonnai ārā. Kā zināms, vismaz divas rindiņas katrā jauniegūtajā tabulā sakritīs pilnībā. Mūsu grafā ar šķautni savienosim tās divas virsotnes, kurām atbilstošās rindiņas jaunajā tabulā sakritušas.

Ja, izsvītrojot kolonnu, uzreiz sakritušas vairāk nekā divas rindiņas, tad tomēr grafā zīmē tikai vienu (pēc brīvas izvēles) no atbilstošajām šķautnēm.

Tādējādi, n kolonnas svītrojot, grafā tiks iegūtas tieši n šķautnes, pie tam katra šķautne atbilst citas kolonnas izsvītrojumam.

Dotajai tabulai 5×5 atbilstošais grafs ir sekojošs (*51.zīm.*)



51.zīm.

Pirmo kolonnu (skaitot no labās) svītrojot, sakrīt 1. un 2. rindiņa, svītrojot 2.kolonnu, sakrīt 1. un 3. rindiņa, 4. kolonnu svītrojot, sakrīt 2. un 4. rindiņa. Svītrojot 3. vai 5. kolonnu, nesakrīt nevienas divas rindiņas.

Ja izpildītos mūsu pieņēmums, ka pēc katras kolonnas svītrošanas vismaz divas rindiņas sakrīt, tad izveidotajā n virsotņu grafā būtu tieši n šķautnes.

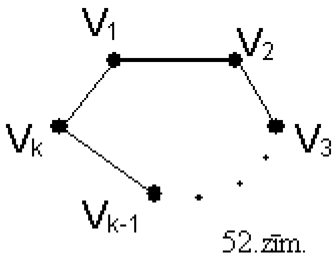
Ir teorēma, kurā apgalvots sekojošais: ja grafā ir n virsotnes, kas savienotas ar vismaz n šķautnēm, tad grafā ir cikls. Pēc mūsu izdarītā pieņēmuma tātad seko, ka izveidotajā n virsotņu grafā būs cikls.

Vispirms pierādīsim, ka cikls saturēs vismaz trīs virsotnes.

Pieņemsim, ka cikls satur tikai divas virsotnes. Tātad starp divām virsotnēm ir novilktas divas atšķirīgas šķautnes. Tas nevar būt, jo katra šķautne radusies pēc citas kolonas izsvītrošanas, bet, ja, izsvītrojot r.-to kolonnu, radusies šķautne, tas liecina, ka r.-tajā rūtiņā attiecīgās rindiņas bijušas atšķirīgas, bet līdz ar to, arī pēc s.-tās kolonnas ($s\neq r$) izsvītrošanas tās būs atšķirīgas, tātad jauniegūtās rindiņas nebūs vienādas un starp tām pašām virsotnēm otru šķautni novilkt nevarēs.

Tādējādi izveidojies cikls saturēs vismaz trīs virsotnes.

Aplūkosim divas šī cikla blakusvirsotnes V_1 un V_2 (*sk.52.zīm.*). Tabulā aplūkosim to kolonnu (apzīmēsim to ar i.-to), kuru izsvītrojot, šīm virsotnēm atbilstošās rindiņas sakritīs.



52.zīm.

Tātad rindiņu V_1 un V_2 i-tās rūtiņas būs atšķirīgas.

Aplūkosim pārējās cikla šķautnes. Tā kā tās radušās, izsvītrojot citas kolonnas (ne i.-to), tad i.-tajā rūtiņā to atbilstošās rindiņas sakritīs. T.i., i-tajā rūtiņā sakritīs burti rindiņām V_2 un V_3, tāpat rindiņām V_3 un V_4, utt., sakritīs burti rindiņām V_{k-1} un V_k, kā arī rindiņām V_k un V_1.

Tā kā ciklā katrām divām blakusvirsotnēm (izņemot V_1 un V_2) atbilstošām rindiņām i-tajā rūtiņā burti sakritīs, tad tie sakritīs visām rindiņām uzreiz, t.i., sakritīs arī rindiņām V_1 un V_2. Bet tas ir pretrunā ar iepriekš izdarīto apgalvojumu.

Tātad sākumā izdarītais pieņēmums bijis nepareizs - tomēr var izsvītrot vienu kolonnu tā, lai palikušajā tabulā katras divas rindiņas joprojām atšķirtos viena no otras vismaz vienā vietā, kbj.

81. No tā, ka jebkuram leņķim α ir spēkā sakarība $|\cos\alpha|\leq 1$, seko, ka $|\cos x|\leq 1$, $|\cos 2x|\leq 1$ un $|\cos 3x|\leq 1$. Ja pieņemtu, ka kāds no moduļiem <1, tad arī moduļu reizinājums

$$|\cos x \cos 2x \cos 3x| < 1,$$

tāpēc spēkā vienādības

$$|\cos x| = 1, \quad |\cos 2x| = 1 \quad \text{un} \quad |\cos 3x| = 1$$

jeb

$$\cos x = \pm 1, \quad \cos 2x = \pm 1 \quad \text{un} \quad \cos 3x = \pm 1.$$

1) Vispirms pieņemsim, ka $\cos x = 1$. Tādā gadījumā $x = 2\pi n$, kur n - vesels skaitlis. Bet tad $\cos 2x = \cos(2\cdot 2\pi n) = \cos 4\pi n = 1$ un arī $\cos 3x = \cos(3\cdot 2\pi n) = \cos 4\pi n = 1$. Tātad $\underline{x = 2\pi n}$ ir atrisinājums.

2) Tālāk pieņemsim, ka $\cos x = -1$. No tā seko, ka $x = \pi + 2\pi n$, kur n - vesels skaitlis. No tā seko, ka

$$\cos 2x = \cos(2(\pi + 2\pi n)) = \cos(2\pi\cdot(1 + 2n)) = 1,$$

$$\cos 3x = \cos(3(\pi + 2\pi n)) = \cos(\pi + 2\pi(1 + 3n)) = -1.$$

Tātad $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x = (-1)\cdot 1\cdot(-1) = 1$, t.i., arī $\underline{x = \pi + 2\pi n}$ ir uzdevuma atrisinājums.

No abiem gadījumiem kopā var secināt, ka $\underline{x = \pi n}$ ir uzdevuma atrisinājums visiem veseliem n.

82. Vispirms pieņemsim, ka daudzskaldnim ir n skaldnes un n ir nepārskaitlis.

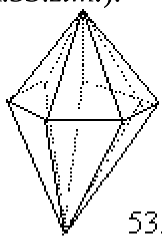
Ja daudzskaldnis ir izliekts, tad katra tā šķautne ir kopīga tieši divām skaldnēm. Tā kā visas skaldnes ir trijstūri, tad kopējais šķautņu skaits ir $\frac{n\cdot 3}{2}$. Lai sķautņu skaits būtu vesels skaitlis, n jābūt pāra skaitlim, tātad daudzskaldnim nevar būt nepāra skaits skaldņu.

Ja $n = 2$, tad daudzskaldni izveidot nevar, tāpēc mazākais iespējamais skaldņu skaits ir 4 - mēs iegūstam trijstūra piramīdu.

Ja $n \geq 6$ ($n = 2k$, kur k var būt 3, 4, 5, ...), tad daudzskaldni ar n skaldnēm var iegūt sekojoši.

Uzzīmē izliektu k-stūri un izvēlas telpā ārpus k-stūra plaknes divus punktus tā, lai šie punkti atrastos k-stūra plaknei katrs savā pusē un projicētos k-stūra iekšpusē. Tā kā $k \geq 3$, tad to izdarīt var.

Tālāk šos punktus savieno ar izliektā k-stūra virsotnēm. Pārbaudīsim, vai iegūtā figūra ir meklētais daudzskaldnis (*sk.53.zīm.*).



53.zīm.

Kā var redzēt, visas skaldnes ir trijstūri, pie tam uz dotā k-stūra katras malas balstās tieši divas skaldnes (uz katru pusi no k-stūra plaknes pa vienai), tātad visu skaldņu kopskaits ir $2\cdot k = n$. Bet tas nozīmē, ka tiešām šī figūra ir meklētais n-skaldnis.

Tādējādi var secināt, ka uzdevumā dotajam daudzskaldnim skaldņu skaits var būt 2k, kur $k \geq 2$ un k-naturāls skaitlis.

83. Jā, eksistē.

Uzdevuma nosacījumiem atbilst, piemēram, polinoms

$$P(x,y) = (xy - 1)^2 + x^2.$$

Pierādīsim to.

Tā kā polinoms ir kvadrātu summa, tad, bez šaubām, $P(x,y) \geq 0$. Lai būtu pierādīts a), atliek parādīt, ka $P(x,y) \neq 0$.

Pieņemsim no pretējā, ka P(x;y) = 0. Lai nenegatīvu skaitļu summa būtu nulle, visiem saskaitāmajiem arī jābūt nullēm. Tātad $x^2 = 0$ un $(xy-1)^2 = 0$. No tā seko, ka x = 0. Bet tādā gadījumā

$$(xy - 1)^2 = (0-1)^2 = 1 > 0.$$

Iegūta pretruna. Tātad šim polinomam a) ir spēkā.

Tagad pierādīsim b). Izvēlēsimies patvaļīgu pozitīvu skaitli c. Mums jāpierāda, ka eksistēs tādi x un y, ka P(x,y) = c.

Ņemsim $x = \sqrt{c}$ un $y = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$.

Bet tādā gadījumā $P(x,y) = P\left(\sqrt{c}, \dfrac{1}{\sqrt{c}}\right) = \left(\sqrt{c} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{c}} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2 = c.$

Tā kā c tika izvēlēts patvaļīgi, tad tiešām arī b) nosacījums šim polinomam izpildās.

84. Vispirms pierādīsim, ka 2^n pierakstā nevar būt vairāk par 3 secīgām nullēm.

Tā kā 2^1 nesatur nevienu “0”, savukārt, piemēram, $2^{10} = 1024$ satur “0”, tad eksistē tāds k, ka 2^k nesatur nulles, bet 2^{k+1} - satur. Reizināsim 2^k ar 2.

Pierakstīsim 2^k kā $\overline{a_s a_{s-1} \dots a_2 a_1 a_0}$, savukārt, 2^{k+1} kā $\overline{b_t b_{t-1} \dots b_2 b_1 b_0}$ (un arī tālāk uz priekšu - skaitli 2^{k+2} kā $\sum c_m \cdot 10^m$, skaitli 2^{k+3} kā $\sum d_n \cdot 10^n$).

Tagad mēģināsim noskaidrot, kādā veidā skaitlī 2^{k+1} varētu parādīties “0”. Vispār, skaitli reizinot ar 2, pēdējais cipars var būt tikai pāra - 0, 2, 4, 6 vai 8. Ja, kādu ciparu a_i reizinot ar 2, rodas pārnesums uz nākošo ciparu, tas nevar būt lielāks par 1, jo $c \cdot 2 \le 9 \cdot 2 = 18$ (c- cipars). Tātad, ja noticis pārnesums, iegūtais cipars b_i noteikti būs nepārskaitlis (pāra skaitlis + 1).

Bet tas nozīmē, ka interesējošo nulli skaitlī 2^{k+1} var iegūt tikai tad, ja, kādu ciparu reizinot ar 2, rezultāta pēdējais cipars ir “0”. Viegli pārliecināties, ka vienīgie cipari, kam tas izpildās, ir “0” un “5”.

Tā kā mēs pieņēmām, ka skaitlis 2^k nulles nesatur, tad, acīmredzot, vienīgā iespēja, lai, reizinot ar 2, rastos nulle, ir, ja eksistē tāds j, ka $a_j = 5$. Pie tam $j \ne 0$, jo 2^k jābūt pāra skaitlim.

Šo a_j sareizinot ar 2, mēs iegūstam $b_j = 0$, pie tam jāņem vērā, ka $b_{j+1} \ne 0$, jo esošais pārnesums no reizināšanas ar iepriekšējo ciparu ($5 \cdot 2 = 10$) panāk to, ka b_{j+1} ir nepārskaitlis.

Pieņemsim, ka $b_{j+1} = 5$. Tad, skaitli 2^{k+1} reizinot ar 2, iegūsim, ka $c_{j+1} = 0$. Ja, b_{j-1} reizinot ar 2, nav radies pārnesums, tad $c_j = b_j \cdot 2 = 0 \cdot 2 = 0$. Tātad, $c_j = c_{j+1} = 0$, bet $c_{j+2} \ne 0$ (līdzīgi kā iepriekš - $b_{j+1} \ne 0$). Ja $c_{j+2} = 5$, tad varētu gadīties, ka $d_j = d_{j+1} = d_{j+2} = 0$ (ja no reizinājuma $c_{j-1} \cdot 2$ nav radies pārnesums), bet noteikti $d_{j+3} \ne 0$.

Kā varēja ievērot, visu šo darbošanās laiku būtiski bija, lai, (j - 1). ciparu reizinot ar 2, nenotiktu pārnesums. Tas tomēr nevar norisināties bezgalīgu reižu skaitu, jo, pat ja sākumā bijis cipars $a_{j-1} = 1$ (cipars “0” nevar būt, jo skaitlim 2^k bija jābūt bez nullēm), tad $b_{j-1} \ge 2$, $c_{j-1} \ge 4$, $d_{j-1} \ge 8$. Bet tad jau $d_{j-1} \cdot 2 \ge 8 \cdot 2 = 16$, t.i., rodas pārnesums.

Tas liecina par to, ka skaitļa 2^{k+4} j-tais cipars, ko iegūst, ņemot reizinājuma $d_j \cdot 2$ pēdējo ciparu ($= 0 \cdot 2 = 0$) un pieskaitot 1, nav nulle. Līdz ar to arī, skaitli ar trim secīgām nullēm reizinot ar 2, ceturto nulli iegūt vairs nevar. Tātad skaitļa 2^n pierakstā nevar būt vairāk par trim secīgām nullēm.

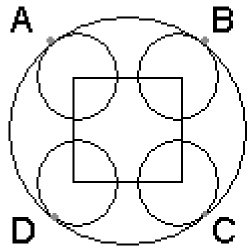
Tālāk ņemsim vērā, ka, palielinoties n, skaitļa 2^n ciparu skaits bezgalīgi pieaug. Tā kā vismaz katrs ceturtais ir nenulles cipars (jo nevar blakus būt četras nulles), tad vismaz

$\frac{1}{4}$ no visa ciparu skaita ir nenulles cipari. Ja pieņem, ka skaitlim 2^n ir m ciparu, tad vismaz $\frac{1}{4}$m ir nenulles cipari, tātad 2^n ciparu summa $S(2^n) \geq \frac{1}{4}$m.

Tā kā katram fiksētam skaitlim A var atrast tādu naturālu m, ka $\frac{1}{4}m > A$, un katram tādam m var atrast k, lai 2^k ciparu skaits ir m(reizinot ar 2, skaitļa ciparu skaits palielinās ne vairāk kā par 1 - ciparu skaita palielināšanās notiek tikai tad, ja, pirmo ciparu reizinot ar 2, rodas pārnesums. Tātad patvaļīgam ciparu skaitam eksistē tāds skaitlis, kas ir kāda no divnieka pakāpēm), tad visiem naturāliem $i \geq k$ $S(2^i) > A$. Bet tas nozīmē, ka ne vairāk kā (k - 1) naturāliem n spēkā sakarība $S(2^n) < A$, bet tas ir galīgs skaits, kas arī bija jāpierāda.

85. Četrstūra laukuma formula ir $S=\frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}$, kur d_1 un d_2 - četrstūra diagonāles, bet α - leņķis starp tām. Tātad, lai panāktu maksimālu laukumu, jācenšas panākt maksimālu garumu diagonālēm un maksimālu $\sin\alpha$ ($\max(\sin\alpha) = 1$).

Novilksim jaunu riņķa līniju, kuras centrs būtu dotā kvadrāta centrā un tās rādiuss būtu maksimāli liels, lai tomēr vēl pieskartos kaut vienai (bet līdz ar to arī visām četrām) riņķa līnijai. Pieskaršanās punktus apzīmēsim ar A, B, C un D (*sk.54.zīm.*).



54.zīm.

Ja velk šīs riņķa līnijas diametru caur dotā kvadrāta virsotnēm, tad diametra galapunkti sakritīs ar mazo riņķa līniju pieskaršanās punktiem apvilktajai riņķa līnijai (piemēram, A un C vai arī B un D). Tā kā apvilktās riņķa līnijas iekšpusē atrodas visas nosacīti mazās riņķa līnijas, tad maksimālais attālums starp mazo riņķa līniju punktiem sakrīt ar apvilktās riņķa līnijas diametru, t.i., AC un BD.

Tātad, ja par interesējošā četrstūra virsotnēm izvēlētos A, B, C un D, tad tā diagonāles būtu maksimāli garas.

Aplūkosim, kāds veidojas leņķis α starp šīm diagonālēm. Tā kā diagonāles iet caur kvadrāta diagonālēm, tad krustojoties tās veido 90^0 leņķi un $\sin\alpha = 1$, kas ir arī maksimālais. Tātad četrstūra ABCD laukums ir maksimālais iespējamais.

Tātad meklēto četrstūri ar vislielāko laukumu iegūst, velkot kvadrāta diagonāļu pagarinājumus līdz krustpunktiem ar riņķa līnijām un šos krustpunktus izvēloties par meklētā četrstūra virsotnēm.

LATVIJAS IZLASES ATLASES SACENSĪBAS 36. STARPTAUTISKAJAI MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDEI KANĀDĀ (86.-91.)

86. Aprakstīsim atrisinājuma ideju, detaļas atstājot lasītājam.

Izvēlamies patvaļīgus dažādus racionālus skaitļus x_3, x_5, x_6 un x_7.

(α) Tālāk atrodam tādu x_2, ka

$$(x_2 - x_3)(x_5 - x_6)(x_6 - x_7) = (x_3 - x_5)(x_5 - x_7)(x_7 - x_2) \qquad (*)$$

(ievērosim, ka attiecībā pret x_2 šis ir lineārs vienādojums ar racionāliem koeficientiem)

(β) Tālāk atrodam tādu x_1, ka

$$(x_1 - x_2)(x_7 - x_1) = (x_1 - x_3)(x_6 - x_1) \qquad (**)$$

(arī šis vienādojums attiecībā pret x_1 ir lineārs vienādojums ar racionāliem koeficientiem)

(γ) Tālāk atrodam tādu x_4, ka

$$(x_3 - x_4)(x_4 - x_5) = (x_2 - x_4)(x_4 - x_6) \qquad (***)$$

(arī šis vienādojums attiecībā pret x_4 ir lineārs vienādojums ar racionāliem koeficientiem).

Izpildot (α), (β), (γ) etapus, var rasties šaubas, vai kāds no risināmajiem vienādojumiem nav formā $0 \cdot x + a = 0$, kur $a \neq 0$, kā arī, vai kāda jaunaprēķinātā vērtība nesakrīt ar kādu iepriekš iegūto. Lasītājs pats var pārliecināties, ka gandrīz jebkurš mēģinājums tomēr noved pie mērķa.

Sareizinot (*), (**) un (***), redzam, ka esam ieguvuši dotā vienādojuma atrisinājumu dažādos racionālos skaitļos.

Pareizinot visus x_i, $1 \leq i \leq 7$, ar to kopsaucēju, iegūstam sākotnējā vienādojuma atrisinājumu dažādos veselos skaitļos. Pieskaitot visiem x_i vienu un to pašu pietiekami lielu veselu skaitli, iegūstam sākotnējā vienādojuma atrisinājumu dažādos naturālos skaitļos.

87. Saskaņā ar skaitļu x_i piederību intervālam [a;b] iegūstam

$$\begin{gathered}(x_1 - a)(x_1 - b) \leq 0,\\ (x_2 - a)(x_2 - b) \leq 0,\\ \vdots\\ (x_n - a)(x_n - b) \leq 0\end{gathered}$$

Šīs nevienādības saskaitot, iegūstam

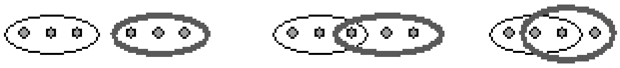
$$n \cdot S_2 - (a + b) \cdot n \cdot S_1 + n \cdot ab \leq 0 \quad \text{jeb}$$
$$S_2 \leq (a+b) \cdot S_1 - ab$$

Tā kā $S_1^2 > 0$, no šejienes seko

$$\frac{S_2}{S_1^2} \leq \frac{a+b}{S_1} - \frac{ab}{S_1^2} = -ab\left(\frac{1}{S_1} - \frac{a+b}{2ab}\right)^2 + \frac{(a+b)^2}{4ab} \leq \frac{(a+b)^2}{4ab}, \quad \text{k.b.j.}$$

88. Vispirms parādīsim, ka ar 7 dienām pietiek.

Ievērosim, ka $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 > 21.$ Tāpēc katram no 21 konditora var piekārtot citu trīs dienu kopu, kuru laikā viņš cepumus pagatavo. Tā kā šīs triju dienu kopas atšķiras, tad katrām divām no tām "savstarpējais novietojums" var būt tikai viens no tiem, kādi redzami *55.zīm.*



55.zīm.

Redzams, ka katriem diviem konditoriem A un B ir gan tāda diena, kad A degustē B gatavotos cepumus, gan arī tāda diena, kad notiek otrādi.

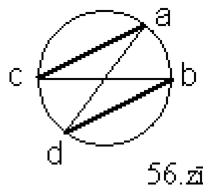
Tagad parādīsim, ka ar 6 dienām šim mērķim nepietiek.

Pieņemsim, ka ir divi konditori, pie tam viens no tiem gatavo cepumus visās tajās dienās, kurās to dara otrs, un varbūt vēl dažās citās. Tad pirmais konditors nekad nevarēs nogaršot otrā pagatavotos cepumus.

Tātad, ja katram konditoram piekārtojam to dienu kopu, kurās viņš gatavo cepumus, tad neviena no šīm kopām nedrīkst būt nevienas citas apakškopa.

Ja mūsu rīcībā ir tikai sešas dienas, tad maksimālais apakškopu skaits, kas apmierina šādu nosacījumu, ir $C_6^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = 20$ (skat., piem., grāmatu [1] literatūras sarakstā). Tā kā konditoru skaits ir lielāks par šo skaitli, tad mūsu mērķis 6 dienās nav sasniedzams.

89. Apskatīsim 100 diametrus, kuru gali atrodas dalījuma punktos. Katram diametram aplūkosim tā galos ierakstīto skaitļu starpību (no lielākā skaitļa atņemam mazāko). Iegūto starpību vērtības var būt tikai 0; 1; 2; …; 98, tātad tām ir tikai 99 dažādas vērtības. Tā kā diametru pavisam ir 100, tad atradīsies divi diametri, kam šīs starpības ir vienādas.



56.zīm.

Ja a - d = b - c, tad a + c = b + d. Atliek atzīmēt, ka abas ar biezāku līniju *56.zīm.* atzīmētās hordas ir savā starpā vienādas un paralēlas.

90. Ja p ir m-tās pakāpes polinoms, bet f ir n-tās pakāpes polinoms, tad $f(x^2)$ ir 2n-tās pakāpes polinoms, bet p(f(x)) ir m·n-tās pakāpes polinoms. Tāpēc 2n = m·n, no kurienes m = 2. Tātad $p(t) = at^2 + bt + c,\ a \neq 0$.

Apzīmējam $f(x) = a_0x^n + a_1x^k + a_2x^{k-1} + \ldots + a_kx + a_{k+1}$, t.i., a_1x^k ir pirmais loceklis ar nenulles koeficientu, kas seko aiz augstākās pakāpes locekļa a_0x^n.

No uzdevumā dotās vienādības iegūstam

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2k} + a_2x^{2k-2} + \ldots + a_kx^2 + a_{k+1} =$$
$$= a(a_0x^n + a_1x^k + \ldots + a_{k+1})^2 + b(a_0x^n + a_1x^k + \ldots + a_{k+1}) + c.$$

Tā kā šī vienādība ir identitāte attiecībā pret x, tad labajā un kreisajā pusē atbilstošo pakāpju koeficientiem jāsakrīt. Pieņemam, ka k > 0. Vienādības kreisajā pusē nav locekļa, kas saturētu x^{n+k} (jo 2k < n + k < 2n); labajā pusē šāds loceklis ir ar koeficientu $2aa_0a_1$. Tāpēc $2aa_0a_1 = 0$, tomēr tā nevar būt, jo ne a, ne a_0, ne a_1 nav 0.

Tāpēc k=0, un tad

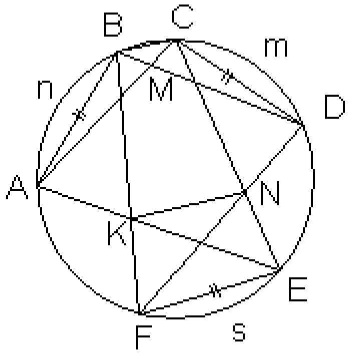
$$f(x) = a_0x^n + a_1.$$

To, ka vienmēr var atrast tādus a, b un c, lai pastāvētu identitāte

$$a_0x^{2n} + a_1 = a(a_0x^n + a_1)^2 + b(a_0x^n + a_1) + c,$$

atstājam pārbaudīt lasītājam patstāvīgi.

91.



57.zīm.

Apzīmēsim uzdevuma nosacījumos minētos krustpunktus attiecīgi ar M, N, K (*sk. 57.zīm.*) Apskatīsim t-taisni, kas iet caur M un riņķa centru O. Taisne simetrijas pēc ir perpendikulāra pret BC un AD, jo ABCD - riņķī ievilkta vienādsānu trapece ar diagonāļu krustpunktu M. Ja mēs parādīsim, ka KN∥BC (vai, kas ir tas pats, KN∥AD), no šejienes izrietēs, ka Δ MNK augstums pret KN iet caur O. Līdzīgu rezultātu iegūsim par Δ MNK augstumiem pret MN un MK, un vajadzīgais būs pierādīts - visi ΔMNK augstumi iet caur O, tātad O ir ΔMNK ortocentrs.

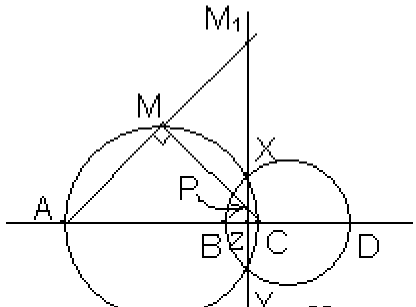
Apzīmēsim $A\breve{n}B = C\breve{m}D = E\check{s}F = w$; tad pēc iekšējo leņķu īpašībām

$$\angle FKE = \frac{1}{2}(w + w) = w.$$

Līdzīgi arī $\angle$FNE = w. Tātad $\angle$FKE = $\angle$FNE; tāpēc ap FKNE var apvilkt riņķa līniju. Tādēļ $\angle$CNK = 180^0 - $\angle$KNE = $\angle$KFE. Tā kā ap FBCE ir apvilkta sākotnējā riņķa līnija, tad $\angle$BCN + $\angle$CNK = $\angle$BCN + $\angle$KFE = 180^0. No tā seko, ka taisnes BC un KN ir paralēlas, k.b.j.

36. STARPTAUTISKĀS MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES UZDEVUMI (92.-97.)

92.



58.zīm.

Apzīmēsim AM krustpunktu ar XY ar M_1 (*sk.58.zīm.*). Kā zināms, XY$\perp$AD. Tāpēc ΔPZC un ΔAZM_1 ir taisnleņķa. Taisnleņķa ir arī ΔPMM_1 ($\angle$AMC = 90^0 kā ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru). Viegli saskatīt, ka šie trijstūri līdzīgi (ΔPZC ~ ΔPMM_1, jo tiem vienādi šaurie leņķi pie virsotnes P; ΔPMM_1 ~ ΔAZM_1, jo tiem vienādi šaurie leņķi pie virsotnes M_1). No līdzības ΔPZC ~ ΔAZM_1 seko

$$\frac{PZ}{ZC} = \frac{AZ}{ZM_1} \quad \text{un} \quad ZM_1 = \frac{AZ \cdot CZ}{PZ} \qquad (1)$$

Apzīmējot DN krustpunktu ar XY ar N_1, līdzīgi iegūstam

$$ZN_1 = \frac{BZ \cdot DZ}{PZ} \qquad (2)$$

No sakarībām starp krustojošos hordu nogriežņiem iegūstam, ka AZ·CZ = XZ·YZ un arī BZ·DZ = XZ·YZ. Tāpēc no (1) un (2) seko, ka ZM_1 = ZN_1. Tātad punkti M_1 un N_1 sakrīt, k.b.j.

93. Apzīmējam $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$. Tad xyz=1 un pierādāmā nevienādība pārveidojas par $\frac{x^3yz}{y+z} + \frac{xy^3z}{x+z} + \frac{xyz^3}{x+y} \geq \frac{3}{2}$ jeb, ņemot vērā, ka xyz = 1, par

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2} \qquad (1)$$

Apzīmēsim (1) kreiso pusi ar S. Saskaņā ar Košī-Bunjakovska nevienādību

$$(m^2 + n^2 + k^2)(M^2 + N^2 + K^2) \geq (mM + nN + kK)^2$$

iegūstam

$$\left(\sqrt{y+z}^2+\sqrt{x+z}^2+\sqrt{x+y}^2\right)\left[\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{y+z}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)^2\right]\geq$$

$$\geq\left(\sqrt{y+z}\cdot\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\sqrt{x+z}\cdot\frac{y}{\sqrt{x+z}}+\sqrt{x+y}\cdot\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)^2$$

jeb $2(x + y + z)\cdot S \geq (x + y + z)^2$, no kurienes seko $S \geq \frac{x+y+z}{2}$. Pielietojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$, tāpēc $S \geq \frac{3}{2}$, k.b.j.

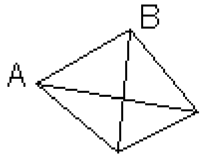
94. Ja n = 4, varam ņemt četras vienības kvadrāta virsotnes un tām pierakstīt katrai skaitli $\frac{1}{6}$.

Parādīsim, ka pie n = 5 uzdevuma prasības nav izpildāmas. No tā seko, ka tās nav izpildāmas arī lielākām n vērtībām.

Pieņemsim pretējo - pie n = 5 izdevies apmierināt uzdevuma prasības.

Turpmāk ar kādu lielo burtu apzīmētam punktam piešķirto skaitli apzīmēsim ar atbilstošu mazo burtu.

1.lemma. Ja četri no punktiem atrodas izliekta četrstūra virsotnēs, tad diagonāļu galiem piešķirto skaitļu summas ir vienādas.



59.zīm.

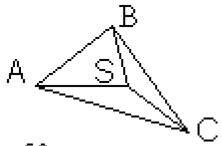
Tiešām (*sk.59.zīm.*),

$$L(ABCD) = L(ABC) + L(ADC) = (a + b + c) + (a + d + c) = (a + b + c + d) + (a + c)$$

Līdzīgi $L(ABCD) = L(ABD) + L(CBD) = (a + b + c + d) + (b + d)$.

No šejienes seko a + c = b + d, k.b.j.

2.lemma. Ja punkts S atrodas Δ ABC iekšpusē, tad $s = -\frac{1}{3}(a + b + c)$.



60.zīm.

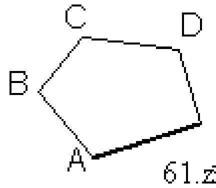
Tiešām (*sk.60.zīm.*), L(ABC) = L(ASB) + L(BSC) + L(CSA), tāpēc

$$a + b + c = (a + b + s) + (b + s + c) + (a + s + c),$$

no kurienes seko vajadzīgais.

Tagad analizēsim vairākus gadījumus atkarībā no iedomāto 5 punktu izvietojuma.

1) Pieci punkti ir izliekta piecstūra virsotnes (*61.zīm.*)

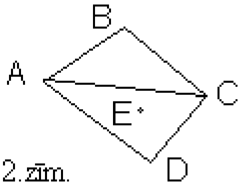


61.zīm.

Saskaņā ar 1.lemmu a + c = b + d un a + c = b + e, tāpēc d = e. Līdzīgi pierāda, ka a = b = c = d.

Tāpēc L(ABE) = L(ACE) = L(ADE). Bet ΔABE, ΔACE, ΔADE ir kopīgs pamats AE, tāpēc no to laukumu vienādības seko, ka vienādi to augstumi pret AE; tāpēc B, C, D atrodas uz vienas taisnes, kas paralēla AE - pretruna.

2) Četri punkti atrodas izliekta četrstūra virsotnēs, bet piektais - tā iekšpusē; tas neatrodas uz izliektā četrstūra diagonāles (*sk., piem., 62.zīm.*)

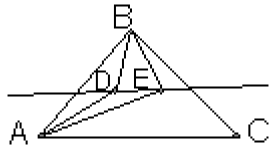


62.zīm.

Saskaņā ar 1.lemmu a + c = b + d un a + c = b + e, tāpēc e = d.

Tāpēc L(AEC) = a + c + e = a + c + d = L(ADC). Bet L(AEC) < L(ADC), tāpēc iegūta pretruna.

3) Trīs punkti atrodas trijstūra virsotnēs, bet divi - tā iekšpusē; taisne, kas iet caur šiem diviem punktiem, krusto divas trijstūra malas (*63.zīm.*)



63.zīm.

Saskaņā ar 2.lemmu e = - $\frac{1}{3}$(a + b + c) un d = - $\frac{1}{3}$(a + b + c), tātad e = d.

Tāpēc L(AEB) = a + e + b = a + d + b = L(ADB). Bet L(AEB) > L(ADB), jo ΔADB atrodas ΔAEB iekšpusē - pretruna.

Visi gadījumi aplūkoti, uzdevums atrisināts.

95. Uzskatot otro vienādību par vienādojumu attiecībā pret x_i un atrisinot to, iegūstam: vai nu $x_i = \frac{1}{2} x_{i-1}$, vai arī $x_i = \frac{1}{x_{i-1}}$.

Pieņemsim, ka izdarot 1995 operācijas, kuru rezultātā no x_0 nonākam līdz x_0, tās sarindojas šādi:

α_1 dalīšanas ($\alpha_1 \geq 0$)
apvēršana
α_2 dalīšanas ($\alpha_2 \geq 0$)
apvēršana
⋮
α_n dalīšanas ($\alpha_n \geq 0$)
apvēršana
α_{n+1} dalīšanas ($\alpha_{n+1} \geq 0$)

To rezultātā iegūtais skaitlis ir sekojošs:

a) ja n-pāra skaitlis, tas ir

$$x_0 \cdot 2^{-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4-....+\alpha_n-\alpha_{n+1}}$$

b) ja n-nepāra skaitlis, tas ir

$$\frac{1}{x_0} \cdot 2^{\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4+....+\alpha_n-\alpha_{n+1}}$$

Aplūkosim, vai tas var būt x_0.

a) gadījumā iegūstam $2^{-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4-....+\alpha_n-\alpha_{n+1}} = 1$, tātad

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \ldots - \alpha_n + \alpha_{n+1} = 0$$

Tā kā notikušas n apvēršanas, tad $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\alpha_{n+1}=1995-n$ ir nepāra skaitlis. Tā ir pretruna, jo

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\alpha_{n+1}=(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\ldots-\alpha_n+\alpha_{n+1})+$$
$$+2(\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_n)=2(\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_n)$$

ir pāra skaitlis.

b) gadījumā iegūstam

$$2^{\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4+....+\alpha_n-\alpha_{n+1}}=x_0^2,$$

pie tam $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\alpha_{n+1}=1995-n$ ir pāra skaitlis, tāpēc

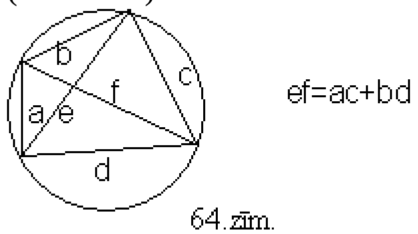
$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\alpha_{n+1}\le 1994 \quad \text{un}$$
$$x_0^2\le 2^{1994},$$

tāpēc $x_0 \le 2^{997}$.

Vērtība $x_0 = 2^{997}$ ir iespējama: izdarot 1994 dalīšanas ar 2 un pēc tām - vienu apvēršanu, atkal iegūstam x_0.

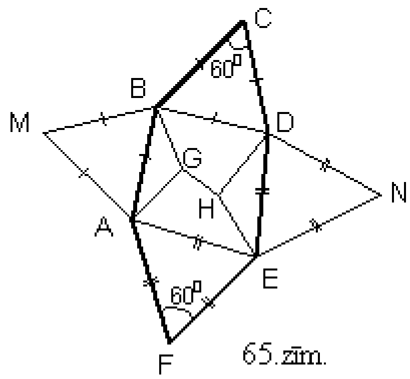
96. Uzdevuma risinājums balstīsies uz Ptolomeja teorēmu:

riņķī ievilktā četrstūrī diagonāļu garumu reizinājums vienāds ar pretējo malu garumu reizinājumu summu (*sk.64.zīm.*).



64.zīm.

Apskatām tagad *65.zīm.*



65.zīm.

Saskaņā ar doto ΔBCD un ΔAFE ir vienādsānu trijstūri ar 60^0 lielu leņķi pie virsotnes, tātad - regulāri. Konstruējam vienādmalu trijstūrus AMB un DNE.

Acīmredzot figūra AMBCDNEF ir simetriska attiecībā pret taisni EB, tāpēc CF = MN.

Ap AMBG var apvilkt riņķa līniju, jo

$$\angle AMB + \angle AGB = 60^0 + 120^0 = 180^0.$$

Apzīmēsim AM = MB = BA = a; tad saskaņā ar Ptolomeja teorēmu

$$a\cdot BG + a\cdot AG = a\cdot MG, \text{ tātad } AG + BG = MG.$$

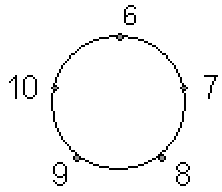
Līdzīgi pierāda, ka DH + EH = NH.

Tāpēc (AG+GB)+GH+(DH+HE)=MG+GH+HN$\ge$MN=CF, k.b.j.

97. Ieviesīsim jaunu jēdzienu.

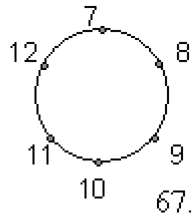
Iedomāsimies, ka skaitļi p + 1; p + 2; …; 2p izvietoti regulāra p-stūra virsotnēs. Kopas B = {p + 1; p + 2; …; 2p} divas apakškopas sauc par ekvivalentām, ja tām atbilstošo virsotņu kopas iegūstamas viena no otras ar pagriezienu ap daudzstūra centru.

Piemēram, ja p = 5, tad ekvivalentas ir apakškopas {6;8}, {7;9}, {8;10}, {9,6}, {10,7} (*sk.66.zīm.*)



66.zīm.

Tā kā p - pirmskaitlis, tad katrai kopas B apakškopai, kas nav ne tukša, ne arī sakrīt ar pašu B, eksistē vēl p-1 citas, tai ekvivalentas B apakškopas; visi pagriezieni “par 1 pozīciju” dod jaunas apakškopas. Tā nebūtu, ja p nebūtu pirmskaitlis; piemēram, *67.zīm.* parādītajai kopai {7;10} eksistē tikai divas citas tai ekvivalentas apakškopas {8;11} un {9;12}.



67.zīm.

Pamatojiet pasvītroto apgalvojumu patstāvīgi.

Tagad aplūkosim mūs interesējošās kopas {1; 2; …; 2p} apakškopas. Viena no tām ir {1; 2; …; p}, jo

$$1+2+\ldots+p=\frac{p(p+1)}{2} \text{ dalās ar p } \left(\frac{p+1}{2} - \text{ vesels skaitlis}\right);$$

otra ir {p+1; p+2; …; 2p}, jo

$$(p+1)+\ldots+2p = \frac{2p+(p+1)}{2}\cdot p = \frac{3p+1}{2}\cdot p \text{ dalās ar p } \left(\frac{3p+1}{2} - \text{ vesels skaitlis}\right).$$

Katrai citai p elementu apakškopai ir kopīgi elementi gan ar {1; 2; …; p}, gan ar {p+1; p+2; …; 2p}. Aplūkosim visas šīs $C_{2p}^{p}-2$ apakškopas. Sadalīsim tās klasēs pēc sekojoša principa:

divas apakškopas ietilpst vienā klasē, ja to daļas, kas kopējas ar {1; 2; …; p}, sakrīt, bet daļas, kas kopīgas ar {p+1; p+2; …; 2p}, ir ekvivalentas.

Saskaņā ar iepriekš atzīmēto, katrā klasē ir tieši p apakškopas. Ja mēs pierādīsim, ka tieši vienai no tām elementu summa dalās ar p, tad uzreiz varēsim secināt, ka mūs interesējošo apakškopu skaits ir $\frac{1}{p}(C_{2p}^{p}-2)+2.$

Pietiek pierādīt, ka visām p ekvivalentajām daļām elementu summas, dalot ar p, dod dažādus atlikumus.

Pieņemsim, ka vienā daļā ir skaitļi x_1; x_2; …; x_n (n < p), otrā - atbilstoši skaitļi y_1; y_2; …; y_n. Saskaņā ar ekvivalentu daļu definīciju eksistē tāda konstante k, $k \le p-1$, ka visiem i, $1 \le i \le n$, vai nu $y_i = x_i + k$, vai arī $y_i = x_i + k - p$.

No sejienes seko, ka $(y_1 + \ldots + y_n) = (x_1 + \ldots + x_n) + n\cdot k - j\cdot p$, $j \in Z$.

Ja $(y_1 + \ldots + y_n)$ un $(x_1 + \ldots + x_n)$ dotu vienādus atlikumus, dalot ar p, tad $n\cdot k$ jādalās ar p. Bet tas nav iespējams, jo p - pirmskaitlis, bet $1\le n \le p-1$ un $1 \le k \le p-1$.

Vajadzīgais pierādīts, visām p ekvivalentajām daļām atlikumi, kurus iegūst, elementu summas dalot ar p, ir dažādi. Tā kā, dalot ar p, iespējami tieši p dažādi atlikumi

0;1;2;…;p-1, tad tie visi sastopami katrs tieši vienu reizi. Tāpēc arī atlikums 0 sastopams tieši vienu reizi.

Uzdevums atrisināts.

KOMANDU OLIMPIĀDES “BALTIJAS CEĻŠ - 94” UZDEVUMI (98.-117.)

98. Ievērosim, ka $(a\circ b)\circ c = a\circ b + c - (a\circ b)\cdot c = a+b-ab+c-(a+b-ab)\cdot c =$

$$= a + b + c - ab - ac - bc + abc = (a - 1)(b - 1)(c - 1) + 1$$

Tāpēc iegūstam, ka dotais vienādojums pārveidojas par $(x - 1)(y - 1)(z - 1) = - 1$

Skaitli (-1) var sadalīt triju veselu skaitļu reizinājumā tikai 4 veidos: $(-1)\cdot1\cdot1$, $1\cdot(-1)\cdot1$, $1\cdot1\cdot(-1)$ un $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$. Attiecīgi iegūstam atrisinājumus (0;2;2), (2;0;2), (2;2;0) un (0;0;0).

99. a) Apzīmēsim vislielāko (vai vienu no vislielākajiem, ja tādi ir vairāki vienādi) no dotajiem skaitļiem ar a_k; saskaņā ar doto $2\le k\le 8$.

Pieņemsim no pretējā, ka prasītā nevienādība nav spēkā nevienam i.

Ja $a_{k-1} + a_{k+1} \ge 2a_k$, tad no a_k maksimalitātes seko, ka $a_{k-1} = a_k = a_{k+1}$.

Līdzīgi iegūstam, ka ar šiem skaitļiem vienādi arī a_{k+2}, a_{k+3}, …, a_9- pretruna, jo $a_9 = 0$, bet $a_k > 0$.

b) Pieņemsim no pretējā, ka pie $2 \le i \le 8$ pastāv nevienādība

$$a_{i-1} + a_{i+1} \ge 1,9a_i.$$

Varam pieņemt, ka a_k ir lielākais (vai viens no lielākajiem, ja tādi ir vairāki) no skaitļiem a_1; a_2; ...; a_9; tad $2\le k \le 8$ un $a_k>0$. Tad $a_{k-1} + a_{k+1} \ge 1,9a_k$; tāpēc $0,9a_k\le a_{k-1}, a_{k+1}\le a_k$. Skaidrs, ka $a_{k-1}\ge0,95a_k$ vai $a_{k+1}\ge0,95a_k$; pieņemsim, ka $a_{k-1} \ge 0,95a_k$ (otru gadījumu apskata analoģiski). Tālāk šķirojam divus gadījumus:

b1) $k\le5$. Tad pakāpeniski iegūstam

$a_{k-1} \ge 0,95a_k > 0$;

$a_{k-2} \ge 1,9a_{k-1} - a_k \ge (1,9\cdot0,95 - 1)a_k = 0,805a_k > 0$;

$a_{k-3} \ge 1,9a_{k-2} - a_{k-1} \ge 1,9a_{k-2} - a_k \ge (1,9\cdot0,805 - 1)a_k = 0,5295a_k > 0$;

$a_{k-4} \ge 1,9a_{k-3} - a_{k-2} \ge 1,9a_{k-3} - a_k \ge (1,9\cdot0,5295 - 1)a_k = 0,00605a_k > 0$.

Tā kā $k\le5$, tad kāds no novērtētajiem skaitļiem a_{k-1}; a_{k-2}; a_{k-3}; a_{k-4} ir a_1 (tad nākošos vairs nerēķinām); bet $a_1 = 0$, tātad iegūta pretruna.

b2) $k\ge6$. Tad pakāpeniski iegūstam

$a_{k+1} \ge 1,9a_k - a_{k-1} \ge 1,9a_k - a_k = 0,9a_k > 0$;

$a_{k+2} \ge 1,9a_{k+1} - a_k \ge (1,9\cdot0,9 - 1)a_k = 0,71a_k > 0$;

$a_{k+3} \ge 1,9a_{k+2} - a_{k+1} \ge 1,9a_{k+2} - a_k \ge (1,9\cdot0,71 - 1)a_k = 0,349a_k > 0$.

Pretrunu iegūstam tāpat kā b1) gadījumā.

Uzdevums atrisināts.

<u>Piezīme:</u> pierādot līdzīgu apgalvojumu par n skaitļiem a_1, a_2, ..., a_n, skaitli 1,9 var aizstāt ar jebkuru konstanti, kas pārsniedz $2\cos\frac{\pi}{n-1}$ (pierādījums ir sarežģīts) un nevar aizstāt ar $2\cos\frac{\pi}{n-1}$ (pretpiemērs ir $a_i = \sin\frac{\pi i}{n-1}$, i = 0; 1; ...; n - 1). Pie n = 9 iegūstam

$$2\cos\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \approx 1,84\ldots$$

100. Acīmredzot jābūt $|x|\le1$, $|y|\le1$; maksimālajai vērtībai varam pieņemt $x\ge0$, $y\ge0$. Apzīmēsim $x=\cos\alpha$ un $y=\cos\beta$, kur $0\le\alpha,\beta\le\frac{\pi}{2}$. Tad pētāmā izteiksme ir

$$\cos\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta + \cos\beta\ \sin\alpha - \sin\alpha\ \sin\beta =$$

$$= \cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta) = \sqrt{2}\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}) \le \sqrt{2}.$$

Maksimālā vērtība tiek sasniegta, piemēram, ja

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ un } \beta = 0, \text{ t.i., } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ un } y = 1.$$

101. Apzīmēsim $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}=\frac{p}{q}$, kur p un q - naturāli skaitļi, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Tad

$$\frac{q}{p}=\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{2}$$

Apskatām vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}=\dfrac{p}{q} \\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\dfrac{2q}{p} \end{cases}$$

No šejienes $\sqrt{n+1}=\frac{p^2+2q^2}{2pq}$, no kurienes $4np^2q^2 = p^4 + 4q^4$. No šejienes viegli seko, ka p dalās ar 2 un pēc tam, ka q dalās ar 2. Iegūta pretruna ar pieņēmumu, ka p un q ir savstarpēji pirmskaitļi.

Tāpēc skaitļa n ar vajadzīgo īpašību nav.

102. Ja $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ ir polinoms ar veseliem koeficientiem, tad veseliem x un y

$$p(x)-p(y) = a_0(x^n - y^n) + a_1(x^{n-1} - y^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(x - y) \text{ dalās ar } x-y, \text{ jo}$$
$$x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + x^{k-3}y^2 + \ldots + xy^{k-2} + y^{k-1}).$$

Pieņemam saskaņā ar doto, ka $p(a) = 1$ un $p(b) = 3$. Ja $p(c) = 2$, kur $a, b, c \in Z$, tad skaitlim 2 - 1 jādalās ar c - a un skaitlim 3 - 2 jādalās ar b - c.

Tāpēc $c - a = \pm 1$ un $c - b = \pm 1$. Tā kā $a \neq b$, tad nevar būt vairāk par vienu skaitli c, kas vienlaicīgi apmierina abus nosacījumus.

103. Dalot ar q, var iegūt tikai galīgu skaitu dažādu atlikumu. Tāpēc var atrast tādus dažādus i un j, i > j, ka 2^i un 2^j, dalot ar q, dod vienādus atlikumus; tāpēc to starpība

$$2^i - 2^j = 2^j(2^{i-j} - 1)$$

dalās ar q. Tā kā q - nepāra skaitlis, tad ņemot i - j = k, iegūstam, ka $2^k - 1$ dalās ar q, resp., $2^k - 1 = q\cdot t$

$$\text{Tāpēc } \frac{p}{q}=\frac{pt}{qt}=\frac{pt}{2^k-1}.$$

.**104.** No dotā izriet, ka p - nepāra skaitlis, tāpēc summā ir pāra skaits saskaitāmo. Grupējot pāros no galiem vienādi attālinātus saskaitāmos, katra pāra summa ir

$$\frac{1}{k^3}+\frac{1}{(p-k)^3}=\frac{p^3-3p^2k+3pk^2}{k^3(p-k)^3},$$

tātad skaitītājs dalās ar p.

Saskaitot visas šādas daļas (izvēloties mazāko kopsaucēju), skaitītājā joprojām visi saskaitāmie dalās ar p, bet saucējs nesatur p (jo tas izveidots no skaitļu $2^3, 3^3, \ldots, (p-1)^3$ pirmreizinātājiem, starp kuriem nav pirmskaitļa p). Tātad arī saīsināšanās rezultātā p no skaitītāja nevar "pazust".

105. Ja a - nepāra skaitlis, a=2n+1, varam ņemt $c = 2(n^2 + n) + 1$ un $b = 2(n^2 + n)$; pārbaudiet izvēles pareizību patstāvīgi.

Ja a- pāra skaitlis, kas izsakāms formā $a = 2^k \cdot a_1$, a_1 - nepāra, $a_1 \geq 3$, tad atrodam skaitļus c_1 un b_1, izejot no a_1, kā risinājuma pirmajā daļā, un izvēlamies $b = 2^k \cdot b_1$, $c = 2^k \cdot c_1$.

Ja a ir divnieka pakāpe, tad $a \geq 8$; skaitlim a = 8 varam ņemt b = 15, c = 17. Ja $a = 2^k$, $k > 3$, tad varam ņemt $b = 15 \cdot 2^{k-3}$, $c = 17 \cdot 2^{k-3}$.

106. Aplūkojot vienādību $2^a+3^b=n^2$ pēc moduļa 3, viegli konstatējam, ka a jābūt pāra skaitlim. Acīmredzot n jābūt nepāra. Apzīmējot a=2x, n=2y+1, mēs iegūstam

$$4^x + 3^b = 4y^2 + 4y + 1$$

$$\text{Tāpēc } 3^b \equiv_4 1 \text{ un } b = 2z,\ z \in N.$$

Vienādojums pārveidojas par $4^x + 9^z = (2y + 1)^2$ un tālāk par

$$4^x = (2y + 1 - 3^z)(2y + 1 + 3^z)$$

Abi reizinātāji labajā pusē ir pāra skaitļi, bet to starpība ir $2 \cdot 3^z$, tāpēc tie abi nevar dalīties ar 4. Tā kā to reizinājums ir divnieka pakāpe, tad arī abas iekavas ir divnieka pakāpes; tāpēc $2y + 1 - 3^z = 2$ un $2y + 1 + 3^z = 2^{2x-1}$. Atņemot šīs vienādības, iegūstam $3^z = 4^{x-1} - 1$.

Skaidrs, ka x > 1. Izsekojot pakāpju pēdējiem cipariem, iegūstam, ka

$$z = 4d + 1, \quad x - 1 = 2e + 1,$$

kur $e, d \in Z$, $e, d \geq 0$. Pieņemam, ka $d \geq 1$; tad arī $e \geq 1$.

Vienādojums pārvēršas par $3 \cdot 81^d = 4^{2e+1} - 1$. Pārrakstām to kā $3 \cdot (80 + 1)^d = 4^{2e+1} - 1$ un atveram iekavas saskaņā ar Ņūtona binoma formulu. Konstatējam, ka visi saskaitāmie, izņemot vienu, dalās ar 16; tā nevar būt.

Tāpēc d = e = 0, z = 1, x = 2, a = 4, b = 2, t.i., mēs esam ieguvuši klasisko

$$2^4 + 3^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2.$$

Atbilde: a = 4, b = 2

107. To skaitļu skaitu, kam ir 2n cipari un kas apmierina nosacījumus a) un b), apzīmēsim ar x_n. To skaitļu skaitu, kuri piedevām sākas ar ciparu 1(2; 3; 4; 5), apzīmēsim ar $a_n(b_n; c_n; d_n; e_n)$.

Viegli pārbaudīt, ka $a_1 = e_1 = 1$, $b_1 = c_1 = d_1 = 2$.

Ievērosim: ja skaitlim, kas apmierina nosacījumus a) un b), nosvītro vienu vai vairākus pirmos ciparus, iegūtais skaitlis atkal apmierina nosacījumus a) un b). Ja sākotnējais skaitlis sākas ar 1, tad tā otrais cipars ir 2, bet trešais var būt 3 vai 1.

Tāpēc iegūstam sakarību

$$a_n = a_{n-1} + c_{n-1} \qquad (1)$$

Līdzīgi iegūstam sakarības

$$e_n = c_{n-1} + e_{n-1} \qquad (2)$$

$$b_n = 2b_{n-1} + d_{n-1} \qquad (3)$$

$$d_n = 2d_{n-1} + b_{n-1} \qquad (4)$$

$$c_n = a_{n-1} + 2c_{n-1} + e_{n-1} \qquad (5)$$

No (1), (2) un (5) seko, ka

$$a_n + e_n = c_n \qquad (6).$$

Saskaitot (1) - (5), iegūstam

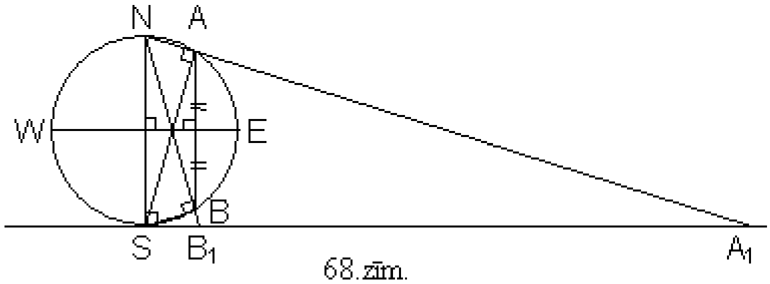
$$x_n = a_n + b_n + c_n + d_n + e_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1} + 4c_{n-1} + 3d_{n-1} + 2e_{n-1}$$

un, ņemot vērā (6),

$$x_n = 3(a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1} + e_{n-1}) = 3x_{n-1}.$$

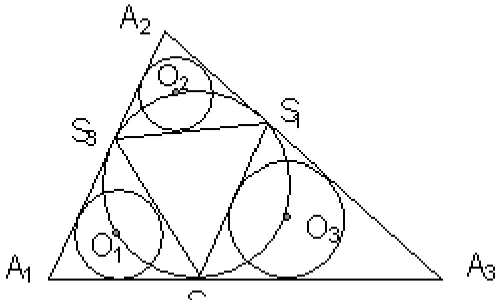
Tā kā $x_1 = 8$ (pārbaudīt patstāvīgi), tad mūsu meklējamais skaits ir $x_{997} = 8 \cdot 3^{996}$.

108. Leņķi NAS un NBS ir taisni kā ievilkti leņķi, kas balstās uz diametru (*sk. 68.zīm.*) Punktu A un B simetriskuma pēc $\Delta NAS = \Delta SBN$. Tā kā $\Delta NAS \sim \Delta NSA_1$ un $\Delta SBN \sim \Delta B_1SN$, tad $\Delta NSA_1 \sim \Delta B_1SN$. Tāpēc $SB_1:SN=SN:SA_1$, no kurienes seko vajadzīgais.



68.zīm.

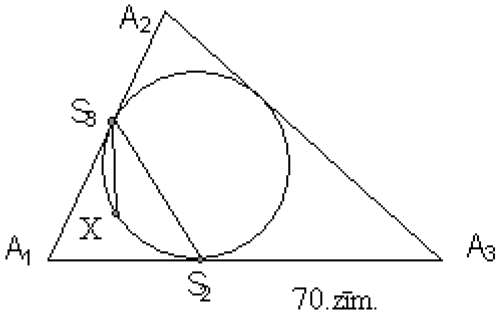
109. Iedomāsimies, ka esam pierādījuši: O_1, O_2, O_3 atrodas uz $\Delta A_1A_2A_3$ ievilktās riņķa līnijas. Tad (*sk.69.zīm.*)



69.zīm.

simetrijas pēc $\cup S_2O_1 = \cup S_3O_1$, tāpēc O_1 atrodas uz $\Delta S_1S_2S_3$ bisektrises; līdzīgi spriežam par O_2 un O_3. Tā kā trijstūra bisektrises krustojas vienā punktā, uzdevums būs atrisināts.

Pierādīsim mums vajadzīgo apgalvojumu par punktu O_1 (*sk.70.zīm.*)



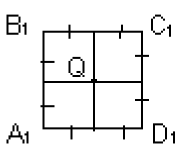
70.zīm.

Jau atzīmējām, ka simetrijas pēc $\angle A_1$ bisektrise iet caur loka S_2S_3 viduspunktu X. No ievilktu leņķu un hordas - pieskares leņķu īpašībām

$$\angle S_2S_3X = \frac{1}{2}\cup S_2X = \frac{1}{2}\cup S_3X = \angle A_1S_3X;$$

tātad S_3X ir $\angle A_1S_3S_2$ bisektrise un X ir $\Delta A_1S_3S_2$ bisektrišu krustpunkts, tātad sakrīt ar O_1. Apgalvojumus par O_2 un O_3 pierāda līdzīgi.

110. Pieņemsim, ka ABCD ir meklējamais kvadrāts. Skaidrs, ka $a > 2$. Apskatām kvadrātu $A_1B_1C_1D_1$, kas atrodas ABCD iekšpusē, kura malas paralēlas ABCD malām un atrodas no tām attālumā 1. Kvadrāta $A_1B_1C_1D_1$ malu garumi tātad ir a-2. Visu piecu riņķu centri atrodas kvadrāta $A_1B_1C_1D_1$ iekšpusē vai uz tā robežas. Divi no tiem pieder vienai no šī kvadrāta ceturtdaļām (*sk.71.zīm.*).



71.zīm.

Katra ceturtdaļa ir kvadrāts ar diagonāles garumu (a - 2)$\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tā kā attālums starp šiem centriem ir vismaz 2, tad jābūt (a - 2)$\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\geq 2$, no kurienes $a \geq 2\sqrt{2} + 2$.

Ja $a = 2\sqrt{2} + 2$, piecus riņķus var novietot tā, lai to centri būtu punktos Q, A_1, B_1, C_1, D_1.

111. Tā kā trijstūrī pret lielāko malu atrodas lielākais leņķis, tad

$$(a - b)(\alpha - \beta) \geq 0,$$

kas viegli pārveidojas par $a\alpha + b\beta \geq a\beta + b\alpha$ un, dalot ar $\alpha\beta$, par

$$\frac{a}{\beta}+\frac{b}{\alpha}\geq\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta} \quad (1)$$

Līdzīgi iegūstam

$$\frac{a}{\gamma}+\frac{c}{\alpha}\geq\frac{a}{\alpha}+\frac{c}{\gamma} \quad (2)$$

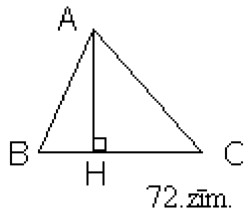
$$\frac{b}{\gamma}+\frac{c}{\beta}\geq\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma} \quad (3)$$

Saskaitot (1), (2) un (3), iegūstam vajadzīgo.

112. Pierādīsim, ka nav trijstūra, kura perimetrs būtu 1995 un kura triju malu un viena augstuma garums ir naturāli skaitļi (nerūpējoties par to, kādi ir abu pārējo augstumu garumi).

Pieņemsim no pretējā, ka ABC ir tāds trijstūris un AH - tas augstums, kura garums ir naturāls skaitlis.

No kosinusu teorēmas seko, ka cosB un cosC ir racionāli skaitļi. Tāpēc BH un CH ir racionāli skaitļi;



72.zīm.

tā kā to kvadrāti $BH^2 = AB^2 - AH^2$ un $CH^2 = AC^2 - AH^2$ ir veseli skaitļi, tad BH un CH ir veseli skaitļi. Tā kā $AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2$, tad $AB^2 + CH^2 = AC^2 + BH^2$.

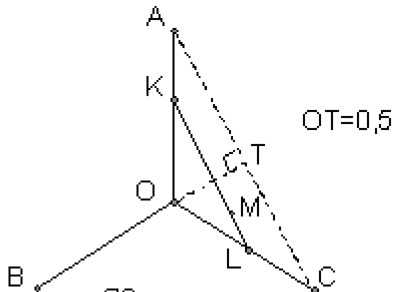
Tā kā veseliem n skaitļi n un n^2 vienlaikus ir pāra vai nepāra, tad AB + CH un AC + BH vienlaikus ir pāra vai nepāra. No šejienes seko, ka ABC perimetrs ir pāra skaitlis. Tātad tas nevar būt 1995.

Pierādījuma būtība nemainās, ja Δ ABC ir platleņķa vai taisnleņķa.

113. Pierādīsim: ja attālums starp divu Ežu centriem ir mazāks par 0,2, tad Ežiem ir kopīgs punkts. No tā seko: uzzīmējot ap katra Eža centru riņķi ar rādiusu 0,1, tiem nav kopīgu punktu.

Tā kā šādu riņķu kopīgais laukums nevar pārsniegt salas laukumu, tad riņķu (un arī Ežu) ir galīgs skaits.

Pieņemsim, ka divu Ežu centri atrodas punktos O un M, un OM < 0,2. Varam pieņemt, ka M atrodas starp pirmā Eža adatām OA un OC (*73.zīm.*) Tā kā OM < 0,5 = OT, tad M atrodas Δ OAC iekšpusē.



73.zīm.

Novelkam caur M taisni KL||AC. Viegli aprēķināt, ka visas Δ OKL malas īsākas par 1. Tā kā vismaz viena otrā Eža adata no M iet Δ OKL iekšpusē, tad tā saskaras ar pirmo Ezi.

114. Pieņemsim, ka uz vienas salas ir a pilsētas, uz otras ir b pilsētas, un $a \geq b > 1$. Pārceļot vienu pilsētu no otrās salas uz pirmo, tiek likvidētas a satiksmes līnijas un rodas jaunas b-1 satiksmes līnijas, tāpēc to kopējais skaits samazinās.

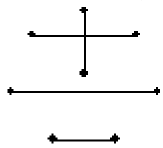
Tāpēc mazākais satiksmes līniju skaits būs tad, ja uz vienas salas uzbūvēs 13 pilsētas, bet uz 12 salām - pa vienai. Tad šis skaits būs $13 \cdot 12 + C_{12}^2 = 222$.

115. Uz katras taisnes jābūt ciparam 1, un katrs cipars 1 "apkalpo" divas taisnes. Tāpēc taišņu skaitam jābūt divas reizes lielākam nekā vieninieku skaitam, t.i., n jābūt pāra skaitlim.

Tagad parādīsim, ka visiem pāra skaitļiem n uzdevuma prasības ir izpildāmas.

Identificēsim taisnes ar spēlētājiem, kas piedalās viena apļa turnīrā, kurā katram jāspēlē ar katru citu tieši vienu reizi. Tādā gadījumā jautājums reducējas uz sekojošu: vai turnīru var izspēlēt n-1 dienā tā, lai katrs spēlētājs katru dienu spēlētu vienu spēli? Taišņu krustpunktam pierakstītais numurs šādā izpratnē norāda tās dienas numuru, kurā attiecīgie spēlētāji spēlē savā starpā.

Attēlosim spēlētājus ar regulāra (n - 1)-stūra virsotnēm un tā centru. Savienosim centru ar vienu no virsotnēm, bet pārējās virsotnes savienosim pa pāriem ar paralēliem nogriežņiem, kas perpendikulāri sākumā novilktajam (sk., piem., *74.zīm.*, kur n = 8.)



74.zīm.

Pagriežot nogriežņu sistēmu ap centru par 1; 2; 3; …; 7 pozīcijām, iegūstam 7 dažādus tās stāvokļus. Tiem spēlētājiem, kuriem atbilstošie punkti i-jā reizē izrādās savienoti ar nogriezni, liekam savā starpā spēlēt i-jā dienā.

Padomājiet patstāvīgi, kāpēc līdzīgu konstrukciju nevar realizēt, ja n- nepāra skaitlis.

116. Sauksim divus spiegus par savstarpēji neitrāliem, ja tie neviens neizseko otru. Apzīmēsim spiegus ar $A_1, A_2, \dots A_{16}$. Katram i, $1 \leq i \leq 16$, ar a_i apzīmēsim to spiegu skaitu, kuri izseko A_i; ar b_i - to spiegu skaitu, kurus izseko pats A_i; ar c_i - to spiegu skaitu, kuri ir neitrāli ar A_i.

Skaidrs, ka katram i pastāv sakarība $a_i + b_i + c_i = 15$ (1)

Pieņemsim, ka $a_i + c_i > 8$; tad $a_i + c_i \geq 9$. Aplūkosim spiegu A_i un vēl deviņus no tiem spiegiem, kuri izseko A_i vai ir neitrāli ar A_i. Skaidrs, ka šos 10 spiegus nevar uzdevumā minētajā veidā nostādīt pa apli - nav, kas stāv pa labi no A_i. Tāpēc katram i pastāv sakarība

$$a_i + c_i \leq 8 \qquad (2)$$

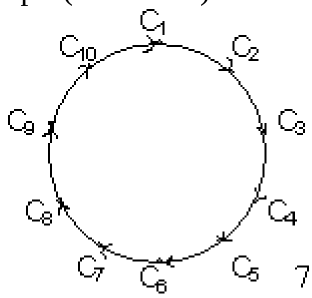
Līdzīgi iegūstam, ka katram i pastāv sakarība

$$b_i + c_i \leq 8 \qquad (3)$$

Saskaitot (2) un (3), mēs iegūstam $(a_i + b_i + c_i) + c_i \leq 16$.

Ņemot vērā (1), iegūstam $c_i \leq 1$.

Tagad pieņemsim no pretējā, ka var atrast 11 spiegus, kurus neizdodas nostādīt pa apli prasītajā veidā. Apzīmēsim vienu no tiem ar B. Pārējos desmit saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem var nostādīt pa apli (*sk.75.zīm.*):



75.zīm.

Pieņemsim, ka starp spiegiem $C_1, C_2, \ldots, C_{10}$ nav neviena, kurš būtu neitrāls attiecībā pret B. Tad vai nu B izseko visus spiegus $C_1, C_2, \ldots, C_{10}$, vai arī visi spiegi $C_1, C_2, \ldots, C_{10}$ izseko B (pretējā gadījumā B varētu "ievietot" aplī starp diviem secīgiem spiegiem C_i, un tā būtu pretruna ar mūsu pieņēmumu.) Gan vienā, gan otrā gadījumā iegūstam pretrunu ar (2) vai (3).

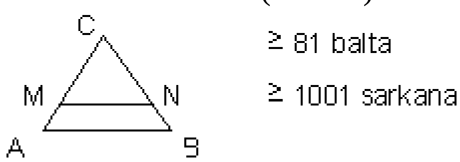
Tātad B ir neitrāls ar kādu no pārējiem spiegiem no apskatāmās 11 spiegu grupas. Tā kā par B varēja ņemt patvaļīgu spiegu no šīs grupas un katrs spiegs ir neitrāls ar augstākais vienu citu ($c_i \leq 1$), tad 11 spiegi sadalās savstarpēji neitrālu spiegu pāros. Acīmredzot tā nevar būt. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs, un 11 spiegus prasītajā veidā var nostādīt.

117. Apzīmēsim sākotnējo trijstūri ar ABC. Katra tā mala sadalīta 3000 vienādos nogriežņos, un caur dalījuma punktiem vilktas taisnes paralēli ABC malām. (To, ka, sadalot malu n vienādos nogriežņos, šādā ceļā rodas n^2 mazie trijstūrīši, visvienkāršāk pierādīt ar matemātisko indukciju.)

Aplūkosim mazo trijstūrīšu virsotnes, kas atrodas uz malas AB; to pavisam ir 3001. Vismaz 1001 no tām nokrāsotas vienā un tai pašā krāsā (pieņemsim, sarkanā).

Katrām divām sarkanajām virsotnēm uz AB var atrast tādu mazā trijstūrīša virsotni, kas kopā ar tām veido vienādmalu trijstūri. Sarkano virsotņu uz AB ir 1001, tāpēc to pāru ir $C_{1001}^2 = 500500$; tikpat ir arī mūsu minēto atrodamo virsotņu. Tās atrodas uz 3000 taisnēm, kas paralēlas AB; tā kā $\frac{500500}{3000} > 160$, tad uz vismaz vienas no šīm taisnēm atrodas vismaz 161 minētā virsotne. Apzīmēsim šo taisni ar MN.

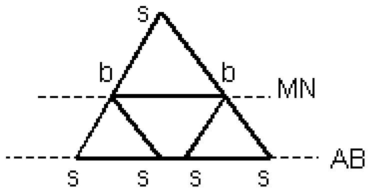
Ja kāda no mūsu minētajām 161 virsotnēm uz MN arī ir sarkana, vajadzīgais trijstūris jau atrasts. Varam pieņemt, ka tās visas ir baltas vai melnas. Vismaz vienā krāsā (varam pieņemt, ka baltā) ir vismaz 81 no tām (*76.zīm.*)



76.zīm.

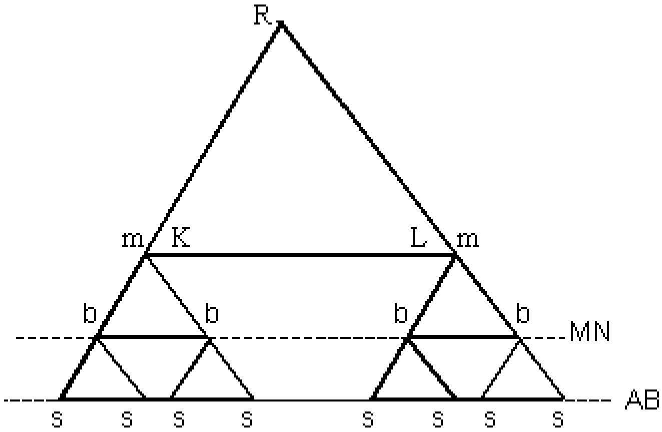
Apskatām šīs 81 baltās virsotnes. Katrām divām no tām uz augšu no MN apskatām trešo virsotni, kas kopā ar tām veido vienādmalu trijstūri. Šādu apskatāmo virsotņu pavisam ir $C_{81}^2 = 3240$.

Ja kāda no tām ir balta, tad vajadzīgais trijstūris ar baltām virsotnēm jau atrasts. Ja kāda no tām ir sarkana, tad atrasts vajadzīgais trijstūris ar sarkanām virsotnēm (*sk.77.zīm.*)



77.zīm.

Tāpēc atliek aplūkot gadījumu, kad tās visas ir melnas, Tā kā to skaits (3240) lielāks par AB paralēli novilkto taišņu skaitu (3001), tad divas no tām atrodas uz vienas no šīm taisnēm (*sk.78.zīm.*); apzīmējam tās ar K un L.



78.zīm.

Tagad apskatām *78.zīmējumā* virsotni R, kas kopā ar K un L veido vienādmalu trijstūri. Viegli redzēt - vai nu to nokrāso sarkanu, baltu vai melnu, atradīsies vienādmalu trijstūris, kura malas paralēlas ABC malām un virsotnes nokrāsotas vienā un tajā pašā krāsā.

LITERATŪRA

1. A.Andžāns, J.Čakste, T.Larfelds, L.Ramāna, M.Seile. Vidējās vērtības metode. - Rīga: “Mācību grāmata”, 1996. - 231 lpp
2. 36.Starptautiskās matemātikas olimpiādes žūrijas materiāli.
3. Komandu olimpiādes “Baltijas Ceļš - 94” žūrijas materiāli.

Vairāki uzdevumi aizgūti no citām sacensībām vai autoriem:

◊ Sankt-Pēterburgas matemātikas olimpiādes: 3., 29., 72., 85.

◊ Maskavas matemātikas olimpiādes: 33.

◊ Skotijas neklātienes konkursi: 27., 32.

◊ Zviedrijas matemātikas olimpiādes: 43.

◊ Bulgārijas neklātienes konkursi: 62., 79.

◊ Ķīnas matemātikas olimpiādes: 55., 60.

◊ Ungārijas matemātikas olimpiādes: 65.

◊ CRUX MATHEMATICORUM: 59.

◊ Aivars Bērziņš: 23., 86.

◊ Andris Cibulis: 58.

◊ Kārlis Čerāns: 76.