Spējīgāko skolēnu gatavošana matemātikas olimpiādēm
Algebra

Juris Smotrovs

Rīga, 1998

Anotācija

Šis materiāls ir paredzēts spējīgāko skolēnu sagatavošanai algebrā starptautiskām matemātikas olimpiādēm. Materiālā ir iekļauts neliels teorētiskais materiāls un virkne uzdevumu. Izklāsts ir izkārtots atbilstoši matemātikas olimpiādēs sastopamo uzdevumu tēmām.

Saturs

1. nodaļa

Ievads

Šis darbs ir paredzēts kā materiāls spējīgāko skolēnu sagatavošanai augsta līmeņa matemātikas olimpiādēm, tādām kā Starptautiskā matemātikas olimpiāde (International Mathematical Olympiad) un olimpiāde Baltijas ceļš (Baltic Way).

Vairumu olimpiāžu uzdevumu var iedalīt vienā no sekojošajām grupām: algebras, ģeometrijas, kombinatorikas vai skaitļu teorijas uzdevumi. Protams, sastopami arī citi, piemēram, analīzes uzdevumi vai uzdevumi, kuros jāizmanto zināšanas no vairākām matemātikas nozarēm. Šis darbs ir veltīts algebras uzdevumiem.

Vairumu algebras uzdevumu savukārt var iedalīt nevienādībās un uzdevumos par polinomiem. Abās šajās uzdevumu grupās bieži ir lietderīgi izmantot zināšanas par kompleksiem skaitļiem. Ir arī komplekso skaitļu algebrai specifiski uzdevumi. Šis darbs ir izkārtots atbilstoši šim iedalījumam. 2. nodaļā ir aplūkota nevienādību pierādīšana, 3. nodaļā uzdevumi par kompleksajiem skaitļiem un 4. nodaļā uzdevumi par polinomiem. Šīs tēmas ir cita ar citu saistītas, tāpēc nodarbībās ar skolēniem ir lietderīgi tās apskatīt paralēli, pamīšus, nevis pēc kārtas.

Šajā darbā nav izklāstīts algebras teorētiskais pamatmateriāls, kas jau tiek aplūkots skolā. Šajā darbā ir iekļauti tikai tie rezultāti, kas nepieciešami konkrētu uzdevumu grupu risināšanai, tajā skaitā atsevišķas teorēmas, kas, būdamas elementāras, tomēr netiek aplūkotas skolas algebras kursā.

Šobrīd darbā ir iekļauts tikai teorētiskais materiāls un uzdevumu formulējumi, bez atrisinājumiem. Nākotnē paredzēts darbu papildināt ar visu uzdevumu atrisinājumiem.

Darba sagatavošanā ir izmantoti A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas materiāli [1, 2], uzdevumu komplekti [5, 6], grāmatas [3, 4] un dažādās matemātikas olimpiādēs piedāvātie uzdevumi.

Apzīmējumi

$\mathbb{C}$	komplekso skaitļu kopa
$\mathbb{N}$	naturālo skaitļu kopa
$\mathbb{Q}$	racionālo skaitļu kopa
$\mathbb{R}$	reālo skaitļu kopa
$\mathbb{Z}$	veselo skaitļu kopa
$k[x]$	polinomi no x ar koeficientiem no k, kur $k = \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ vai kāda cita skaitļu kopa
$k[x_1, \ldots, x_n]$	daudzargumentu polinomi no x_1, …, x_n ar koeficientiem no k
$\mathrm{LKD}(p, q)$	polinomu p un q lielākais kopīgais dalītājs

2. nodaļa

Nevienādības

Šajā nodaļā aplūkosim nevienādību pierādīšanas paņēmienus. Iesākumā apskatīsim vienkāršākās pamatmetodes, tad pamatnevienādības, uz kurām tiek reducēts vairums nevienādību, visbeidzot dažādus olimpiāžu uzdevumiem specifiskus paņēmienus.

Ja šīs nodaļas uzdevumā mainīgo apgabali nav norādīti, tad šie mainīgie ir patvaļīgi reāli skaitļi.

2.1. Ekvivalento pārveidojumu metode

Parasti nevienādības pierāda, pārveidojot doto nevienādību par vienu vai vairākām vispārzināmām vai acīmredzamām nevienādībām. Pārveidojumus parasti veic soli pa solim. Vienā solī nevienādību pārveido vai nu par nedaudz savādāku ekvivalentu nevienādību, vai par spēcīgāku nevienādību, no kuras iepriekšējā nevienādība izriet. Otro paņēmienu sauc par nevienādības pastiprināšanas metodi, un tā tiks aplūkota nākamajā sadaļā. Šajā sadaļā apskatīsim pirmo, ekvivalento pārveidojumu metodi.

Ja mēs nevienādību $A \geq B$ pārveidojam par $C \geq D$, kur A, B, C, D ir kaut kādas izteiksmes, tad teiksim, ka tas ir ekvivalents pārveidojums, ja $A \geq B$ tad un tikai tad, ja $C \geq D$. Tas pats attiecas arī uz stingro nevienādību $>$.

Tipiskākie ekvivalentie pārveidojumi ir šādi.

1. Kādas izteiksmes pieskaitīšana abām nevienādības pusēm: $A + E \geq B + E$. Izteiksmes atņemšana no abām pusēm. Saskaitāmā pārnešana uz otru nevienādības pusi, mainot tā zīmi.

2. Abu pušu zīmes un nevienādības zīmes mainīšana uz pretējo: $-A \leq -B$.

3. Pozitīvas izteiksmes piereizināšana abām pusēm: $A \cdot E \geq B \cdot E$, $E > 0$. Abu pušu dalīšana ar pozitīvu izteiksmi.

4. Ja zināms, ka $A > 0$ un $B > 0$ vai $A < 0$ un $B < 0$, tad abu pušu aizvietošana ar apgrieztajām izteiksmēm un nevienādības zīmes mainīšana uz pretējo: $1/A \leq 1/B$.

5. Abu pušu celšana nepāra pakāpē: $A^{2k-1} \geq B^{2k-1}$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Ja zināms, ka $A > 0$ un $B > 0$, tad abu pušu celšana patvaļīgā nenulles pakāpē: $A^r \geq B^r$, $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$.

Protams, ir arī citi ekvivalentie pārveidojumi, un viss minētais ir spēkā arī stingrajai nevienādībai $>$.

Viena no elementārākajām nevienādībām, uz kurām ar ekvivalentiem pārveidojumiem var reducēt vairumu citu nevienādību ir šāda.

2.1.1. Apgalvojums. *Ja A ir reālu skaitļu algebriska izteiksme, tad*

$$A^2 \geq 0.$$

2.1. Sekas. *Ja A_1, A_2, …, A_n ir reālu skaitļu algebriskas izteiksmes, tad*

$$A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 \geq 0.$$

Ilustrācijai der sekojošie uzdevumi.

2.1. Uzdevums. [2, 7. piem.] *Pierādīt nevienādību*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac. \tag{2.1}$$

Risinājums.

$$\begin{aligned} (2.1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (a^2 - 2ac + c^2) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Pēdējā nevienādība izriet no sekām 2.1, līdz ar to nevienādība ir pierādīta.

□

2.2. Uzdevums. [2, 1. uzd.] *Pierādīt nevienādību*

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3/4 \geq a + b + c. \tag{2.2}$$

Vispārināt nevienādību n skaitļiem.

Risinājums.

$$\begin{aligned}(2.2) \Leftrightarrow (a^2 - a + 1/4) + (b^2 - b + 1/4) + (c^2 - c + 1/4) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a - 1/2)^2 + (b - 1/2)^2 + (c - 1/2)^2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Pēdējā nevienādība izriet no sekām 2.1 Dabiskākais dotās nevienādības vispārinājums ir šāds:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + n/4 \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n. \tag{2.3}$$

□

2.3. Uzdevums. [2, 8. piem., 2. vingr., 2. uzd.]

1. *Pierādīt nevienādību* $(x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$.
2. *Pierādīt nevienādību* $(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$.
3. *Vispārināt šīs nevienādības mainīgajiem* $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Risinājums. Pierādīsim uzreiz vispārinājumu — nevienādību

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right). \tag{2.4}$$

Atverot iekavas, iegūstam:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i y_i x_j y_j \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i^2 y_j^2.$$

Pēc noīsināšanas un pārnešanas uz labo pusi iegūstam:

$$0 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n; i \neq j} x_i^2 y_j^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i y_i x_j y_j.$$

Beidzot, ievērojot, ka $x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2x_i y_i x_j y_j = (x_i y_j - x_j y_i)^2$, nevienādību pārveidojam par

$$0 \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2,$$

kas izriet no sekām 2.1 □

Nevienādību (2.4) sauc par Košī jeb Košī-Buņakovska nevienādību; sīkāk to un tās pielietojumus mēs apskatīsim 2.6. sadaļā.

Bieži nevienādību reducē uz citu, kuru var pierādīt, šķirojot vienkāršus gadījumus.

2.4. Uzdevums. [2, 10. piem.] *Dots: a, b > 0. Pierādīt nevienādību*

$$\frac{a^{n+2}}{b^n} + \frac{b^{n+2}}{a^n} \geq a^2 + b^2. \tag{2.5}$$

Risinājums. Tā kā a, $b > 0$, tad varam reizināt abas (2.5) puses ar $a^n b^n$:

$$\begin{aligned} (2.5) \Leftrightarrow a^{2n+2} + b^{2n+2} &\geq a^{n+2}b^n + a^n b^{n+2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a^{2n+2} - a^{n+2}b^n) + (b^{2n+2} - a^n b^{n+2}) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a^{n+2} - b^{n+2})(a^n - b^n) &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ja $a \geq b$, tad abi reizinātāji (2.6) kreisajā pusē ir nenegatīvi, tātad arī to reizinājums ir nenegatīvs. Ja $a < b$, tad abi reizinātāji ir negatīvi un to reizinājums pozitīvs. Tātad esam pierādījuši (2.6) un līdz ar to arī (2.5). □

Sadaļas noslēgumā dažādi uzdevumi, kuros var pielietot ekvivalento pārveidojumu metodi.

2.5. Uzdevums. [2, 11. piem.] *Dots: a, b, c > 0; $a+b+c=1$. Pierādīt nevienādību*

$$a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 < 1/3. \tag{2.7}$$

Risinājums.

$$\begin{aligned} a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 &= \\ = ((a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 - 6abc)/3 &= \\ = 1/3 - (a^3 + b^3 + c^3 + 6abc)/3 &> 1/3. \end{aligned}$$

□

2.6. Uzdevums. [2, 12. piem.] *Dots: $a+b+c=1$. Pierādīt nevienādību*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 1/3. \tag{2.8}$$

Risinājums. Skat. 2.8 uzdevuma risinājumu. □

2.7. Uzdevums. [2, 5. vingr.] *Dots: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Pierādīt nevienādību*

$$a + b + c + d \leq 4. \tag{2.9}$$

Risinājums. Skat. 2.8 uzdevuma risinājumu. □

2.8. Uzdevums. [2, 5. uzd.] *Vispārināt pēdējo divu uzdevumu rezultātus.*

Risinājums. Viens no dabiskākajiem vispārinājumiem ir šāds:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leq n \cdot (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2). \tag{2.10}$$

Viegli pārbaudīt, ka divu iepriekšējo uzdevumu rezultāti izriet no (2.10).

(2.10) var pierādīt, atverot iekavas, pārnesot visus saskaitāmos uz labo pusi un izveidojot tajā kvadrātu summu; iesakām lasītājam pašam to izmēģināt. Šeit mēs pielietosim nedaudz atšķirīgu paņēmienu.

Apzīmēsim $v = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$, $a_i = v + \alpha_i$ visiem $i = 1, 2, \ldots, n$. Sasummējot pēdējās vienādības, iegūstam $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$. Pārveidosim kvadrātu summu:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 &= \\ = (v + \alpha_1)^2 + (v + \alpha_2)^2 + \ldots + (v + \alpha_n)^2 &= \\ = nv^2 + 2v \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2) &= \\ = nv^2 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2) &\geq nv^2 = \\ = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2/n. & \end{aligned}$$

Pareizinot abas nevienādības puses ar n, iegūsim (2.10). □

Pēdējie trīs uzdevumi ir speciālgadījumi nevienādībām starp vidējiem, skat. 2.5. sadaļu.

2.9. Uzdevums. [2, 6. uzd.] *Dots: $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Pierādīt nevienādību $n! > (\sqrt{n})^n$.*

Risinājums.

$$n! > (\sqrt{n})^n \Leftrightarrow (n!)^2 > n^n \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k) > \prod_{k=1}^{n} n.$$

Pieņemsim, ka $1 \leq k \leq n$. Pierādīsim, ka $k(n + 1 - k) \geq n$. Patiesi,

$$k(n+1-k) \geq n \Leftrightarrow kn - n - k^2 + k \geq 0 \Leftrightarrow (n-k)(k-1) \geq 0.$$

Pēdējā nevienādība ir acīmredzama.

Tā kā $n > 2$, tad vismaz viena no nevienādībām $k(n + 1 - k) \geq n$ ir stingra. Piemēram, paņemot $k = 2$, iegūstam $2(n + 1 - 2) = 2n - 2 > n$. Tātad, sareizinot šīs nevienādības, iegūstam vajadzīgo. □

2.10. Uzdevums. [2, 14. piem.] *Dota skaitļu virkne $\{a_n\}$; $a_1 = 1$; $a_{k+1} = a_k + (k + 1)$, $k \geq 1$. Pierādīt, ka $a_n > n^2/2$.*

Risinājums. No dotā: $a_{k+1} - a_k = k+1$. Sasummējot šīs starpības, iegūstam:

$$\begin{aligned} &a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = \\ &= 1 + 2 + \ldots + n = \tfrac{n(n+1)}{2} > \tfrac{n^2}{2}. \end{aligned}$$

□

2.11. Uzdevums. [2, 15. piem., 7. uzd.] *Dota: skaitļu virkne* $\{a_n\}$*;* $a_1 = 1$*;* $a_{k+1} = a_k + 1/a_k$*,* $k \geq 1$*.*

1. *Pierādīt, ka* $a_n \geq \sqrt{2n-1}$*.*
2. *Pierādīt, ka* $a_{50} < 4\sqrt{7}$*.*

Risinājums. No dotā: $a_{k+1}^2 = a_k^2 + 2 + 1/a_k^2$, un $a_{k+1}^2 - a_k^2 = 2 + 1/a_k^2$. Sasummējot starpības, iegūstam:

$$\begin{aligned} &a_n^2 = a_1^2 + (a_2^2 - a_1^2) + (a_3^2 - a_2^2) + \ldots + (a_n^2 - a_{n-1}^2) = \\ &= 1 + 2(n-1) + \tfrac{1}{a_1^2} + \tfrac{1}{a_2^2} + \ldots + \tfrac{1}{a_{n-1}^2}. \end{aligned}$$

Ja $n > 1$, tad $1/a_1^2 + 1/a_2^2 + \ldots + 1/a_{n-1}^2 > 0$, tāpēc $a_n^2 > 2n-1$ un $a_n > \sqrt{2n-1}$.

Ja $n = 1$, tad $a_n = 1 = \sqrt{2n-1}$. Līdz ar to pirmā daļa ir pierādīta.

Lai pierādītu otro daļu, ievērosim, ka $a_2 = 2$ un ka a_i ir augoša virkne, tātad $1/a_i^2$ ir dilstoša. No atrastās vienādības seko

$$a_{50}^2 = 99 + \sum_{i=1}^{49} \frac{1}{a_i^2} < 99 + \frac{1}{a_1^2} + 48 \cdot \frac{1}{a_2^2} = 112 \Leftrightarrow a_{50} < \sqrt{112} = 4\sqrt{7}.$$

□

2.12. Uzdevums. [IMO87P–SU1] *Dots:* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *apmierina nevienādību* $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 1$*. Atrast izteiksmes*

$$(a+b)^4 + (a+c)^4 + (a+d)^4 + (b+c)^4 + (b+d)^4 + (c+d)^4 \tag{2.11}$$

maksimālo vērtību.

Risinājums. No identitātes

$$\begin{aligned} &(a-b)^4 + (a-c)^4 + (a-d)^4 + (b-c)^4 + (b-d)^4 + (c-d)^4 + \\ &+ (a+b)^4 + (a+c)^4 + (a+d)^4 + (b+c)^4 + (b+d)^4 + (c+d)^4 = \\ &= 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \end{aligned}$$

redzam, ka maksimālā vērtība nevar pārsniegt 6. Vēl jāpārbauda, ka (2.11) var sasniegt šo vērtību. Patiesi, ja $a = b = c = d = \pm 1/2$, tad izteiksme (2.11) ir vienāda ar 6. □

2.2. Nevienādības pastiprināšanas metode

Daudzos uzdevumos ir vieglāk nevis ar ekvivalento pārveidojumu metodi tieši pierādīt doto nevienādību, bet gan kādu citu, kas ir spēcīgāka par doto. Iemesls tam parasti ir tāds, ka, papildinot nevienādību ar kādu jaunu izteiksmi (saskaitāmo, reizinātāju, u. tml.) vai atmetot kādu izteiksmi, nevienādību var krietni vienkāršot, kas nebija iespējams dotajā nevienādībā.

Ja nevienādība $A \geq B$ tiek pārveidota par nevienādību $C \geq D$, kur A, B, C, D ir kaut kādas izteiksmes, tad teiksim, ka tas ir nevienādību pastiprinošs pārveidojums, ja no tā, ka ir spēkā nevienādība $C \geq D$, seko nevienādība $A \geq B$, bet ne otrādi (ja arī no $A \geq B$ seko $C \geq D$, tad tas ir ekvivalents pārveidojums, kas aplūkots iepriekšējā sadaļā).

Tipiskākie nevienādību pastiprinošie pārveidojumi ir šādi.

1. Pozitīvas izteiksmes atņemšana no nevienādības lielākās puses: $A-E \geq B$, $E > 0$. Pozitīvas izteiksmes pieskaitīšana mazākajai pusei.

2. Ja $A > 0$, tad lielākās puses izdalīšana ar izteiksmi, kas lielāka par 1: $A/E \geq B$, $E > 1$. Ja $B > 0$, tad mazākās puses pareizināšana ar izteiksmi, kas lielāka par 1.

3. Ja $A > 1$, tad lielākās puses celšana pakāpē, kas mazāka par 1: $A^r \geq B$, $r \in \mathbb{R}$, $r < 1$. Ja $B > 1$, tad mazākās puses celšana pakāpē, kas lielāka par 1: $A \geq B^r$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 1$.

4. Ja $0 < A < 1$, tad lielākās puses celšana pakāpē, kas lielāka par 1: $A^r \geq B$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 1$. Ja $0 < B < 1$, tad mazākās puses celšana pakāpē, kas mazāka par 1: $A \geq B^r$, $r \in \mathbb{R}$, $r < 1$.

Protams, viss minētais ir spēkā arī stingrajai nevienādībai $>$.

Ir svarīgi nevienādību nepastiprināt tiktāl, ka tā kļūst aplama. Šāds pārveidojums nevedīs pie atrisinājuma, jo jauniegūto nevienādību nevarēs pierādīt. Diemžēl, konkrētos uzdevumos bieži ir grūti saskatīt, vai nevienādības pastiprināšana ir "par spēcīgu" vai nav. Tāpēc ieteicams, nepaļaujoties uz intuīciju vien, nevienādību pastiprinot, ar kontrolpiemēriem (konkrētu vērtību ievietošanu) pārbaudīt, vai jauniegūtā nevienādība izpildās vai nē. Tas var krietni ietaupīt aplamiem risinājuma ceļiem patērēto laiku.

Jāuzmanās arī, lai nevienādība patiešām tiktu pastiprināta. Tipiska kļūda, kas gadās pat pieredzējušiem olimpiāžu dalībniekiem, ir pastiprināšanas vietā nevienādību pavājināt.

2.13. Uzdevums. [2, 18. piem.] *Dots:* $a > 0$*;* $n \in \mathbb{N}$*. Pierādīt nevienādību*

$$\frac{1 + a + a^2 + \ldots + a^{2n-1} + a^{2n}}{a + a^2 + \ldots + a^{2n-2} + a^{2n-1}} \geq \frac{n+1}{n}. \tag{2.12}$$

Risinājums. Nevienādības kreisajā un labajā pusē skaitītājā atdalām saskaitāmos, kas vienādi ar saucēju un pēc noīsināšanas pierādāmā nevienādība kļūst šāda:

$$\frac{1+a^{2n}}{a+a^2+\ldots+a^{2n-2}+a^{2n-1}} \geq \frac{1}{n}.$$

Kreisās puses saucēju sadalām n saskaitāmajos, katrs no kuriem ir mazāks par skaitītāju:

$$a+a^2+\ldots+a^{2n-2}+a^{2n-1} = a^n + \sum_{k=1}^{n-1}\left(a^k + a^{2n-k}\right).$$

Patiesi, $1+a^{2n} > a^n$ izriet no tā, ka $(1-a^n)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1+a^{2n} \geq 2a^n$, un $2a^n > a^n$ (jo $a > 0$); un $1+a^{2n} \geq a^k + a^{2n-k} \Leftrightarrow (1-a^k)(1-a^{2n-k}) \geq 0$, kur $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Pēdējā nevienādība izriet no novērojuma, ka abām iekavām ir vienāda zīme.

Tātad, aizvietojot visus n saskaitāmos saucējā ar $a^{2n}+1$, mēs nevienādības kreiso pusi samazinām, tātad nevienādību pastiprinām, iegūstot acīmredzamu nevienādību

$$\frac{1+a^{2n}}{n(1+a^{2n})} = \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n}.$$

□

2.14. Uzdevums. *Dots:* $n \in \mathbb{N}$. *Pierādīt nevienādību*

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}. \qquad (2.13)$$

Risinājums. Ja izdotos kreisās puses summu izteikt kā vienkāršu izteiksmi, kas atkarīga no n, tad to droši vien varētu novērtēt, parādot, ka tā mazāka par $1/4$. Diemžēl, iegūt vienkāršu summas formulu neizdodas.

Šajā gadījumā risinājuma ideja ir pastiprināt nevienādību, palielinot katru summas saskaitāmo tā, lai jauno summu būtu viegli sasummēt. Konkrēti, katru saskaitāmo $1/(2k+1)^2$ nomainīsim ar $1/((2k+1)^2-1) = 1/((2k)(2k+2)) = (1/2)\cdot(1/(2k) - 1/(2k+2))$. Summējot iegūsim:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2n+2}\right) = \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4n+4} < \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

□

2.15. Uzdevums. *Dots:* $n \in \mathbb{N}$*. Pierādīt nevienādību*

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}. \tag{2.14}$$

2.16. Uzdevums. *Dots:* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *ir dažādi naturāli skaitļi, kas lielāki par* 1*. Pierādīt nevienādību*

$$\left(1 - \frac{1}{n_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{n_2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n_k^2}\right) > \frac{1}{2}. \tag{2.15}$$

2.17. Uzdevums. *Dots:* $x, y, z, t \ge -1/4$*;* $x + y + z + t = 1$*. Pierādīt nevienādību*

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} + \sqrt{4t+1} < 6. \tag{2.16}$$

2.18. Uzdevums. *Dots:* $a, b, c > 0$*;* $abc = 1$*. Pierādīt nevienādību*

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \le 1. \tag{2.17}$$

Kad pastāv vienādība?

2.3. Matemātiskās indukcijas metode

Šī ir plaši pazīstama metode, kas pielietojama visās elementārās matemātikas nozarēs un kuru var izmantot arī daudzu nevienādību pierādīšanā.

Tās būtība ir šāda. Ir dots kāds apgalvojums $A(n)$, kas atkarīgs no naturāla skaitļa parametra n. Tādā gadījumā mēs vispirms pierādām $A(1)$ jeb induktīvo bāzi un tad pierādām induktīvo pāreju jeb to, ka no $A(n)$ seko $A(n+1)$ visiem naturāliem n. Atbilstoši matemātiskās indukcijas principam, rezultātā apgalvojums $A(n)$ ir pierādīts visiem naturāliem n.

Šai shēmai iespējamas dažādas modifikācijas. Piemēram, lai pierādītu kādu apgalvojumu visiem $n \ge 4$, mēs pierādām $A(4)$ un $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ visiem $n \ge 4$. Vai, lai pierādītu apgalvojumu $A(m,n)$, mēs pierādām $A(1,1)$, $A(m,n) \Rightarrow A(m+1,n)$ un $A(m,n) \Rightarrow A(m,n+1)$.

2.19. Uzdevums. *Dots:* $n \in \mathbb{N}$*. Pierādīt nevienādību*

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1. \tag{2.18}$$

Bieži matemātiskās indukcijas metode jālieto kombinācijā ar nevienādības pastiprināšanas metodi, jo sākotnējai nevienādībai nevar pierādīt induktīvo pāreju. Piemēram, nākamajā uzdevumā, palielinoties n, kreisā puse palielinās, bet labā nemainās. Tāpēc, ja mēs par kreiso pusi n saskaitāmo gadījumā zinām tikai to, ka tā ir mazāka par 1, tad $n+1$ saskaitāmo gadījumā tā var jau pārsniegt 1. Lai atrisinātu uzdevumu, labā puse jāsamazina par izteiksmi, kas atkarīga no n, tā lai, palielinoties n, arī labā puse palielinātos (bet arvien vēl nepārsniegtu 1).

2.20. Uzdevums. *Dots: $n \in \mathbb{N}$. Pierādīt nevienādību*

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1. \tag{2.19}$$

2.21. Uzdevums. *Dots: $n \in \mathbb{N}$. Pierādīt nevienādību*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}. \tag{2.20}$$

2.22. Uzdevums. *Dots: a, $b > 0$; $n \in \mathbb{N}$. Pierādīt nevienādību*

$$(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n). \tag{2.21}$$

2.23. Uzdevums. *Dots: x_1, x_2, …, $x_n > 0$; $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1/2$. Pierādīt nevienādību*

$$(1-x_1)(1-x_2) \cdot \ldots \cdot (1-x_n) \geq 1/2. \tag{2.22}$$

2.24. Uzdevums. *Dots: $0 < x_1$, x_2, …, $x_n < \pi/2$; $0 < x_1 + x_2 + \ldots + x_n < \pi$. Pierādīt nevienādību*

$$\sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \leq \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n. \tag{2.23}$$

2.4. Jensena teorēma

Sekojošajam uzdevumam, kuru var pierādīt ar matemātiskās indukcijas metodi, ir svarīga teorētiska nozīme.

2.25. Uzdevums. *Dots: visiem x un y funkcija f apmierina nevienādību*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \tag{2.24}$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $x = y$. Pierādīt, ka

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}, \tag{2.25}$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Ievērosim, ka uzdevums ir spēkā arī, nomainot $\geq$ zīmes pret $\leq$ zīmēm. Vispārinot uzdevumu funkcijām ar n mainīgajiem, iegūstam šādu teorēmu.

2.1. Teorēma. *(Jensena teorēma.) Dots: visiem x_1^i un x_2^i, kur $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ir augšējie indeksi, funkcija f apmierina nevienādību*

$$f\left(\frac{x_1^1 + x_2^1}{2}, \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \ldots, \frac{x_1^k + x_2^k}{2}\right) \geq \frac{f(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^k) + f(x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^k)}{2}, \tag{2.26}$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $x_1^1 = x_2^1$, $x_1^2 = x_2^2$, …, $x_1^k = x_2^k$; w_1, w_2, …, $w_n > 0$; $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1$. Pierādīt, ka

$$\begin{aligned} &f(w_1x_1^1 + w_2x_2^1 + \ldots + w_nx_n^1, w_1x_1^2 + w_2x_2^2 + \ldots + w_nx_n^2, \\ &\ldots, w_1x_1^k + w_2x_2^k + \ldots + w_nx_n^k) \\ &\geq w_1f(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^k) + w_2f(x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^k) + \ldots + w_nf(x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k), \end{aligned} \tag{2.27}$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $x_1^1 = x_2^1 = \ldots = x_n^1$, $x_1^2 = x_2^2 = \ldots = x_n^2$, …, $x_1^k = x_2^k = \ldots = x_n^k$.

Jensena teorēma ir spēkā arī, nomainot $\geq$ zīmes pret $\leq$ zīmēm.

Sekojošā teorēma no analīzes parāda, ka sadaļas sākumā ievietotā uzdevuma nosacījums izpildās izliektām funkcijām, bet, aizvietojot $\geq$ zīmes ar $\leq$ zīmēm, attiecīgais nosacījums izpildās ieliektām funkcijām.

2.2. Teorēma. *Ja funkcijai f kādā intervālā eksistē otrās kārtas atvasinājums, un šajā intervālā $f''(x) < 0$, tad visiem x un y šajā intervālā*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \tag{2.28}$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $x = y$.

Ja šajā intervālā $f''(x) > 0$, tad visiem x un y šajā intervālā

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \tag{2.29}$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $x = y$.

Atgādināsim no analīzes kursa, ka, ja $f''(x) < 0$, tad funkcija f ir izliekta (attiecīgajā intervālā), un ja $f''(x) > 0$, tad funkcija ir ieliekta.

Jensena teorēma un teorēma 2.2 ievērojami atvieglo vairāku uzdevumu risināšanu.

2.26. Uzdevums. *Dots:* α, β, $\gamma > 0$; $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. *Pierādīt nevienādību*

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 3\sqrt{3}/2. \tag{2.30}$$

2.27. Uzdevums. *Dots:* α, β, $\gamma > 0$; $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. *Pierādīt nevienādību*

$$\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2) \leq 1/8. \tag{2.31}$$

Minētās teorēmas arī ļauj vienkārši pierādīt ļoti nozīmīgās nevienādības starp vidējiem.

2.5. Nevienādības starp vidējiem

2.28. Uzdevums. *Dots:* $k \geq 1$; a_1, a_2, …, $a_n \geq 0$. *Pierādīt nevienādību*

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^k \leq \frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}. \tag{2.32}$$

2.29. Uzdevums. *Dots:* a_1, a_2, …, $a_n \geq 0$. *Pierādīt nevienādību*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}. \tag{2.33}$$

Ja mums ir doti reāli skaitļi a_1, a_2, …, a_n, tad var aplūkot dažādus šo skaitļu vidējos. Visplašāk pazīstami ir iepriekšējā uzdevumā aplūkotie vidējais aritmētiskais un vidējais ģeometriskais.

No vārda "vidējais" jēgas saturīgi izriet viena no tā pamatīpašībām: tas atrodas intervālā starp skaitļu a_i mazāko un lielāko vērtību, turklāt, ja ne visi a_i ir vienādi, tad vidējais atrodas stingri šī intervāla iekšienē.

Nākamā definīcija apkopo biežāk lietotos vidējos.

2.1. Definīcija. *Par pozitīvu skaitļu* a_1, a_2, …, a_n α*-kārtas vidējo* ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$) *sauc skaitli*

$$c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.34}$$

Par 0*-kārtas vidējo jeb vidējo ģeometrisko sauc skaitli*

$$c_0 = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}. \tag{2.35}$$

1. kārtas vidējo sauc arī par vidējo aritmētisko, 2. kārtas vidējo sauc par vidējo kvadrātisko, 3. kārtas vidējo par vidējo kubisko, -1-kārtas vidējo par vidējo harmonisko.

Nākamā teorēma parāda, ka visi vidējie c_α ir sakārtoti nedilstošā secībā.

2.3. Teorēma. *Ja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir pozitīvi skaitļi un $\alpha < \beta$, tad $c_\alpha \le c_\beta$, turklāt $c_\alpha = c_\beta$ tad un tikai tad, ja $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.*

Nevienādību $c_0 \le c_1$ sauc arī par Košī nevienādību.

Šīs sadaļas pirmie divi uzdevumi ir teorēmas 2.3 speciālgadījumi. Reducēšana uz nevienādībām starp vidējiem ir viens no visbiežāk izmantotajiem nevienādību risināšanas paņēmieniem. Sekojošie uzdevumi to ilustrē.

2.30. Uzdevums. *Pierādīt sekojošās nevienādības.*

1. $|a/b + b/a| \ge 2$.
2. $|x + a/x| \ge 2\sqrt{a}$, *kur* $a \ge 0$.
3. $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$, *kur* a, $b \ge 0$.
4. $\log_2 \pi + \log_\pi 2 > 2$.
5. $(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \ge 2^n$, *kur* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ *un* $a_1 a_2 \cdot\ldots\cdot a_n = 1$.
6. $n! \le ((n+1)/2)^n$.
7. $n! \le n^n 2^{1-n}$.
8. $x^2 + y^2 + z^2 \ge (x+y+z)^2/3$.
9. $a/(b+c) + b/(a+c) + c/(a+b) \ge 3/2$, *kur* a, b, $c > 0$.
10. $abc \ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$, *kur* a, b, c *ir trijstūra malas.*

2.31. Uzdevums. *Regulāru sešstūri ar vienības malu kāda taisne ir sadalījusi divās daļās ar laukumiem s_1 un s_2. Atrast maksimālo iespējamo reizinājuma $s_1 s_2$ vērtību.*

2.32. Uzdevums. *Dotas: skaitļu virknes $\{a_n\}$, $\{b_n\}$; $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $a_{n+1} = a_n + 1/b_n$, $b_{n+1} = b_n + 1/a_n$. Pierādīt, ka $a_{50} + b_{50} > 20$.*

2.33. Uzdevums. *Dots: a, b, $c \ge 0$. Pierādīt nevienādību*

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc. \tag{2.36}$$

2.34. Uzdevums. *Dots: a, b, $c > 0$; $a + b + c = 1$. Pierādīt nevienādību*

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \ge 64. \tag{2.37}$$

2.35. Uzdevums. *(Junga nevienādība.) Dots:* a, b, p, $q > 0$; $1/p+1/q = 1$. *Pierādīt nevienādību*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{2.38}$$

2.36. Uzdevums. *Dots:* $k \in \{2, 3, 4\}$; $n = 2^k - 1$; $b \geq 0$. *Pierādīt nevienādību*

$$1 + b^k + b^{2k} + \ldots + b^{nk} \geq (1 + b^n)^k. \tag{2.39}$$

2.6. Čebiševa un Košī nevienādības

Arī Čebiševa un Košī nevienādības tiek bieži izmantotas citu nevienādību pierādīšanā.

Čebiševa nevienādība viegli izriet no sekojošā uzdevuma, kurā apgalvots, ka, ja mums dotas divas pozitīvu skaitļu virknes, kuru elementi pa pāriem jāsareizina un reizinājumi jāsaskaita, tad vislielāko summu iegūsim, ja reizināsim vislielāko pirmās virknes elementu ar vislielāko otrās virknes elementu, tad otros lielākos elementus, utt., visbeidzot vismazākos elementus.

2.37. Uzdevums. *Dots:* $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$. $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ *ir skaitļu* $(1, 2, \ldots, n)$ *permutācija. Pierādīt nevienādību*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geq a_1b_{k_1} + a_2b_{k_2} + \ldots a_nb_{k_n}. \tag{2.40}$$

2.38. Uzdevums. *(Čebiševa nevienādība.) Dots:* $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$. *Pierādīt nevienādību*

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n). \tag{2.41}$$

Ilustrācijai aplūkosim nākamo uzdevumu.

2.39. Uzdevums. *Dots:* a, b, $c > 0$. *Pierādīt nevienādību*

$$a + b + c \leq \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}. \tag{2.42}$$

Nedrīkst aizmirst, ka Čebiševa nevienādību drīkst pielietot tikai tad, ja virknes $\{a_i\}$ un $\{b_i\}$ ir sakārtotas augošā secībā. Ja uzdevumā tas nav dots, tad bieži to var pieņemt, vadoties no simetrijas apsvērumiem kā pēdējā uzdevumā. Taču šeit jābūt piesardzīgiem. Piemēram, izteiksme $(a+c)^2 + (b+d)^2$ patiešām ir pietiekami simetriska, lai mēs varētu pieņemt, ka a ir mazākais no skaitļiem a, b, c, d, bet tā nav pietiekami simetriska, lai mēs varētu pieņemt, ka $a \leq b \leq c \leq d$ (un aplūkot tikai šo gadījumu), jo, izvēloties a kā mazāko, mēs esam izcēluši c, kas ir vienā iekavā ar a, un izteiksme ir simetriska vairs tikai pret b un d. Šajā piemērā varam pieņemt, ka $b \leq d$, un mums atliek apskatīt trīs gadījumus: $a \leq c \leq b \leq d$, $a \leq b \leq c \leq d$ un $a \leq b \leq d \leq c$.

Tagad aplūkosim Košī nevienādību.

2.4. Teorēma. *(Košī jeb Košī-Buņakovska nevienādība.) Ja x_1, x_2, …, x_n, y_1, y_2, …, y_n ir kompleksi skaitļi, tad ir spēkā nevienādība*

$$|x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n|^2 \leq (|x_1|^2+|x_2|^2+\ldots+|x_n|^2)(|y_1|^2+|y_2|^2+\ldots+|y_n|^2), \tag{2.43}$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja vektori $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ir kolineāri.

Košī nevienādībai ir uzskatāma ģeometriskā interpretācija: interpretējot x_i un y_i kā n dimensiju telpas vektoru $\vec{x}$ un $\vec{y}$ koordinātas un izvelkot no nevienādības abām pusēm kvadrātsakni, iegūstam sakarību "vektoru skalārais reizinājums pēc moduļa nepārsniedz vektoru moduļu reizinājumu" jeb $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$. Šī sakarība viegli izriet no skalārā rezinājuma īpašības $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\vec{x}, \vec{y})$.

Arī nākamajam uzdevumam, kuru pierāda ar Košī nevienādības palīdzību, ir ģeometriskā interpretācija, pamēģiniet to atrast.

2.40. Uzdevums. *Dots: x_1, x_2, …, x_n, y_1, y_2, …, y_n ir kompleksi skaitļi. Pierādīt nevienādību*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}. \tag{2.44}$$

Kādos gadījumos pastāv vienādība?

Visbiežāk Čebiševa un Košī nevienādības izmanto uzdevumos, kur nevienādības vienā pusē ir daļu summa. Čebiševa un Košī nevienādības parasti ļauj šādas daļu summas pārveidot vienkāršāku izteiksmju reizinājumā.

2.41. Uzdevums. *Dots: a, b, c ir trijstūra malas, un s ir tā pusperimetrs, $n \in \mathbb{N}$. Pierādīt nevienādību*

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} s^{n-1}. \tag{2.45}$$

2.42. Uzdevums. *Dots: a, b, c, $d > 0$. Pierādīt nevienādību*

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}. \tag{2.46}$$

2.43. Uzdevums. *Dots: a, b, c, $d \geq 0$; $ab+bc+cd+da = 1$. Pierādīt nevienādību*

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}. \tag{2.47}$$

2.7. Bernulli nevienādība

2.5. Teorēma. *(Bernulli nevienādība.) Ja $x \geq -1$ un $0 < \alpha < 1$, tad ir spēkā nevienādība*

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x. \tag{2.48}$$

Ja $x \geq -1$ un $\alpha < 0$ vai $\alpha > 1$, tad

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x. \tag{2.49}$$

Vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $x = 0$.

Bernulli nevienādību parasti izmanto, lai pastiprinātu un vienlaikus vienkāršotu nevienādību, aizvietojot pakāpi ar lineāru izteiksmi.

Nākamie divi uzdevumi rāda, kā ar Bernulli nevienādības palīdzību var ļoti precīzi novērtēt summu ar ļoti lielu saskaitāmo daudzumu.

2.44. Uzdevums. *Dots: $-1 < \alpha < 0$, $n \in \mathbb{N}$. Pierādīt nevienādību*

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^\alpha < \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \tag{2.50}$$

2.45. Uzdevums. *Atrast veselo daļu skaitlim*

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}. \tag{2.51}$$

2.8. Matemātiskās analīzes izmantošana

Mēs jau saskārāmies ar analīzi 2.4. sadaļā. Kā mēs redzējām, analīzes izmantošana var ievērojami atvieglot tīri algebrisku uzdevumu risināšanu.

Piemēram, uzdevuma 2.35 nevienādību viegli pārveidot sekojošajā nevienādībā ar noteiktajiem integrāļiem, kuru viegli pierādīt, izmantojot ģeometrisko interpretāciju.

2.46. Uzdevums. *Dots: a, b, p, $q > 0$ un $1/p + 1/q = 1$. Pierādīt nevienādību*

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1}dx + \int_0^b x^{q-1}dx, \tag{2.52}$$

turklāt vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja $b = a^{p-1}$.

2.47. Uzdevums. *Pierādīt nevienādību*

$$9 < \int_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}dx + \int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}dx < 9,0001. \tag{2.53}$$

2.48. Uzdevums. *Pierādīt, ka no $a < b$ seko, ka*

$$a^3 - 3a \leq b^3 - 3b + 4. \tag{2.54}$$

Kad pastāv vienādība?

Sekojošajos divos uzdevumos izmantota funkciju nepārtrauktība.

2.49. Uzdevums. *Dots: f ir nepārtraukta un stingri monotona funkcija, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Pierādīt nevienādību*

$$f\left(\tfrac{1}{10}\right) + f\left(\tfrac{2}{10}\right) + \ldots + f\left(\tfrac{9}{10}\right) + f^{-1}\left(\tfrac{1}{10}\right) + f^{-1}\left(\tfrac{2}{10}\right) + \ldots + f^{-1}\left(\tfrac{9}{10}\right) \leq \tfrac{99}{10}. \tag{2.55}$$

2.50. Uzdevums. *Dots: x_1, x_2, …, $x_n \in \mathbb{R}$ apmierina nosacījumus $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 1$ un $|x_i| \leq (n+1)/2$ visiem $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pierādīt, ka eksistē tāda virknes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ permutācija $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, ka*

$$|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| \leq (n+1)/2. \tag{2.56}$$

2.9. Dažādi uzdevumi

2.51. Uzdevums. *Dots: $a_0 = 1994$ un $a_{n+1} = a_n^2/(a_n + 1)$ visiem veseliem $n \geq 0$. Pierādīt, ka $\lfloor a_n \rfloor = 1994 - n$ visiem $n \in \{0, 1, \ldots, 998\}$.*

2.52. Uzdevums. *Dots: a_1, a_2, …, a_n ir n dažādi naturāli skaitļi, kas nesatur 9 savā decimālajā pierakstā. Pierādīt nevienādību*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \leq 30. \tag{2.57}$$

2.53. Uzdevums. *Dots:* $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in \mathbb{R}$*;* $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$*. Pierādīt, ka katram veselam* $k > 1$ *eksistē veseli* $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n < k$*, ne visi vienādi ar* 0*, tādi, ka*

$$|e_1x_1 + e_2x_2 + \ldots + e_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}. \tag{2.58}$$

2.54. Uzdevums. *Dota nenegatīvu reālu skaitļu virkne* $\{a_n\}$*, kas visiem* $n \in \mathbb{N}$ *apmierina nevienādības*

$$a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geq 0 \ \text{un} \ \sum_{j=1}^{n} a_j \leq 1. \tag{2.59}$$

Pierādīt, ka visiem $n \in \mathbb{N}$*:*

$$0 \leq a_n - a_{n+1} < 2/k^2. \tag{2.60}$$

2.55. Uzdevums. *Dots:* $m,\ n \in \mathbb{N}$*;* $A = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m\}$ *ir kopas* $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ *apakškopa. Ja* $a_i + a_j \leq n$*,* $1 \leq i \leq j \leq m$*, tad* $a_i + a_j$ *arī pieder* A*. Pierādīt, ka*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}. \tag{2.61}$$

2.56. Uzdevums. *Dota galīga reālu skaitļu virkne* $a_1 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} = 0$*. Pierādīt, ka*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}). \tag{2.62}$$

2.57. Uzdevums. *Dota stingri augoša pozitīvu reālu skaitļu virkne* $\{a_n\}$*, tāda, ka* $\lim a_i = +\infty$ *un visiem* n*:* $a_{n+1}/a_n \leq 10$*. Pierādīt, ka katram naturālam* k *pastāv bezgalīgi daudzi tādi indeksu pāri* $(i,\ j)$*, ka*

$$10^k \leq a_i/a_j \leq 10^{k+1}. \tag{2.63}$$

2.58. Uzdevums. *Dots:* $a,\ b,\ c,\ d \geq 0$*;* $a + b + c + d = 1$*. Pierādīt nevienādību*

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd. \tag{2.64}$$

2.59. Uzdevums. *Virknes* $\{a_i\}$ *un* $\{b_i\}$ *tiek definētas ar vienādībām* $a_1 = \sqrt{2}/2$*,* $a_{n+1} = (\sqrt{2}/2)\sqrt{1 - \sqrt{1 - a_n^2}}$ *visiem* $n \in \mathbb{N}$ *un* $b_1 = 1$*,* $b_{n+1} = (\sqrt{1 + b_n^2} - 1)/b_n$ *visiem* $n \in \mathbb{N}$*. Pierādīt visiem* $n \in \mathbb{N}$ *nevienādību*

$$2^{n+1}a_n < \pi < 2^{n+1}b_n. \tag{2.65}$$

3. nodaļa

Kompleksie skaitļi

Kompleksos skaitļus iegūst, reālajiem skaitļiem pievienojot skaitli i ar īpašību $i^2 = -1$. Izmantojot reizināšanu un saskaitīšanu ar reālu skaitli, iegūstam skaitļus formā $x + iy$ (kur x un y ir reāli skaitļi), kas arī veido komplekso skaitļu kopu. Ar kompleksiem skaitļiem var veikt darbības tāpat kā ar parastām izteiksmēm, papildus izmantojot sakarību $i^2 = -1$. Piemēram, varam iegūt šādas vienādības, kas rāda, kā veikt pamatoperācijas ar kompleksiem skaitļiem:

$$-(x+iy) = -x + i(-y), \tag{3.1}$$

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2), \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) &= x_1x_2 + i(x_1y_2+x_2y_1) + i^2y_1y_2 = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2+x_2y_1),\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \quad \text{kur } x_2+iy_2 \neq 0. \tag{3.4}$$

3.1. Trigonometriskā un eksponenciālā forma

Komplekso skaitļi $x+iy$ ērti attēlot ģeometriski kā plaknes vektoru $\overrightarrow{(x,y)}$. Ievērosim, ka komplekso skaitļu saskaitīšana ir analoga vektoru saskaitīšanai.

3.1. Uzdevums. *Pierādīt, ka kompleksa skaitļa $x+iy$ pareizināšana ar $\cos\alpha + i\sin\alpha$ pagriež tam atbilstošo vektoru $\overrightarrow{(x,y)}$ par leņķi α pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam.*

Ieviešot plaknē polārās koordinātas, iegūstam kompleksā skaitļa $x+iy$ trigonometrisko formu $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, kur $r=\sqrt{x^2+y^2}$ un, ja $r>0$, tad α ir vienīgais leņķis no intervāla $[0,2\pi)$, kuram $\cos\alpha = x/r$ un $\sin\alpha = y/r$. Ievērosim, ka, sareizinot divus kompleksos skaitļus, to rādiusi r sareizinās, bet argumenti α saskaitās:

3.2. Uzdevums. *Pierādīt vienādību*

$$(r_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1))(r_2(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)) = r_1r_2(\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2)). \tag{3.5}$$

Komplekso skaitli $\cos\alpha + i\sin\alpha$ apzīmēsim ar $e^{i\alpha}$ (e pakāpē $i\alpha$; ar e šeit apzīmēta naturālā logaritma bāze $2,7182818\ldots$).

3.3. Uzdevums. *Pierādīt vienādības*

1) $|e^{i\alpha}| = 1$*,*

2) $(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$ *(Muavra formula),*

3) $(e^{i\alpha})^{-1} = e^{-i\alpha}$*,*

4) $e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} = e^{i\alpha+i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$*,*

5) $(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})/2 = \cos\alpha$*,*

6) $(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})/(2i) = \sin\alpha$*.*

Pēdējās divas vienādības sauc arī par Eilera formulām. Izsakot $r = e^t$, kur $t\in\mathbb{R}$, iegūstam nenulles kompleksā skaitļa eksponenciālo formu $e^{t+i\alpha} = e^t\cdot e^{i\alpha}$.

3.4. Uzdevums. *Atrodot leņķi* α*, kompleksos skaitļus* i*,* $(1+i\sqrt{3})/2$*,* $(\sqrt{3}+i)/2$*,* $-i$*,* $(1-i\sqrt{3})/2$*,* $(\sqrt{3}-i)/2$ *izteikt kā* $e^{i\alpha}$*.*

3.5. Uzdevums. *Ar Muavra formulas palīdzību pierādīt, ka*

1) $\cos nx$ *var izteikt kā* n*-tās kārtas polinomu no* $\cos x$ *(un atrast šo polinomu gadījumos* $n=2$, 3, 4, 5, 6, 7*);*

2) $\sin nx$ *var izteikt kā* $(n-1)$*-ās kārtas polinomu no* $\cos x$*, kas pareizināts ar* $\sin x$ *(un atrast šo polinomu gadījumos* $n=2$, 3, 4, 5, 6, 7*);*

3) izteiksmi $(\cos x)^m(\sin x)^n$*, kur* m *un* n *ir veseli nenegatīvi skaitļi, var izteikt kā* x *daudzkārtņu kosinusu un sinusu lineāru kombināciju.*

3.6. Uzdevums. *Pierādīt vienādības*

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = 2^{n/2}\cos(\pi n/4) \text{ un} \tag{3.6}$$

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots = 2^{n/2}\sin(\pi n/4), \tag{3.7}$$

kur summēšana tiek veikta pa C_n^k ar, atbilstoši, pāra un nepāra k, kas nepārsniedz n.

3.2. n-tās kārtas saknes no 1

Par n-tās kārtas sakni no 1 sauc tādu kompleksu skaitli z, ka $z^n = 1$. Izmantojot uzdevumus 3.1 un 3.2, var pierādīt sekojošo teorēmu.

3.1. Teorēma. *Pavisam ir n kompleksas n-tās kārtas saknes no 1. Plaknē tās ir izvietotas regulāra n-stūra virsotnēs, kura centrs ir koordinātu sākumpunktā un viena no virsotnēm ir punktā $(1, 0)$.*

3.7. Uzdevums. *Izteikt $x^n - 1$ kā pirmās un otrās kārtas polinomu ar reāliem koeficientiem reizinājumu.*

3.8. Uzdevums. *Kādiem naturāliem k un n polinoms $1 + x^k + x^{2k} + \ldots + x^{nk}$ dalās ar polinomu $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$?*

3.3. Pielietojumi vektoru ģeometrijā

Kompleksu skaitļu saskaitīšana ir analoga plaknes vektoru saskaitīšanai, taču reizināšanai analoga operācija plaknes vektoru algebrā parasti netiek aplūkota. Tomēr vairākos uzdevumos tā var būt noderīga.

Pareizinot kompleksu skaitli ar $e^{i\alpha}$, tas tiek pagriezts par leņķi α pretēji pulksteņa rādītāja virzienam. Līdzīgu operāciju var ieviest arī vektoru algebrā.

Vairākos uzdevumos ir izdevīgi aplūkot pagriešanu par konkrētiem leņķiem. Ja dots vektors $\vec{a}$, ar $\vec{a}'$ apzīmēsim vektoru $\vec{a}$, kas pagriezts par $90°$ pretēji pulksteņa rādītāja virzienam.

3.2. Teorēma. *Ja $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir vektori, bet k skaitlis, tad ir spēkā vienādības*

1) $(\vec{a} + \vec{b})' = \vec{a}' + \vec{b}'$,

2) $(k \cdot \vec{a})' = k \cdot \vec{a}'$, *3)* $\vec{a}'' = -\vec{a}$.

3.9. Uzdevums. *Vienkāršot izteiksmes, atverot iekavas un atbrīvojoties no vairākkārtējām "prim" operācijām:*

1) $(2\vec{a} + \vec{b}' + \vec{a}'' - 4\vec{b})'$,

2) $((\vec{a} + \vec{b}')' - 2\vec{a})'$,

3) $((2\vec{a}' + \vec{b})'' - (\vec{a} + \vec{b})')'$.

3.10. Uzdevums. *Doti* 2 *kvadrāti ABCD un CEFG ar kopīgu virsotni C; abu kvadrātu virsotnes uzrādītas pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam. Punkts M ir nogriežņa DG viduspunkts. Pierādīt, ka*

1) $2|CM| = |BE|$,

2) nogriežņi CM un BE ir savstarpēji perpendikulāri.

3.11. Uzdevums. *Uz trijstūra ABC malām AB un BC ārpus trijstūra ir uzkonstruēti kvadrāti (viena no kvadrāta malām sakrīt ar attiecīgo trijstūra malu). Apzīmēsim kvadrātu centrus ar K un L un AC viduspunktu ar M. Pierādīt, ka nogriežņi KM un LM ir savstarpēji perpendikulāri un kongruenti.*

Līdzīgi operācijai "prim" var ieviest operāciju * "zvaigznīte", kas pagriež vektoru par $60°$ pretēji pulksteņa rādītāja virzienam.

3.3. Teorēma. *Ja* $\vec{a}$ *un* $\vec{b}$ *ir vektori, bet* k *skaitlis, tad ir spēkā vienādības*

1) $(\vec{a} + \vec{b})^* = \vec{a}^* + \vec{b}^*$,

2) $(k \cdot \vec{a})^* = k \cdot \vec{a}^*$,

3) $\vec{a}^{***} = -\vec{a}$,

4) $\vec{a} + \vec{a}^{**} = \vec{a}^*$.

3.12. Uzdevums. *Uz trijstūra ABC malām ārpus trijstūra ir uzkonstruēti regulāri trijstūri (kuriem viena no malām sakrīt ar attiecīgo trijstūra malu). Pierādīt, ka triju regulāro trijstūru centri paši veido regulāru trijstūri.*

3.4. Dažādi uzdevumi

3.13. Uzdevums. *Atrisināt vienādojumu sistēmas kompleksos skaitļos.*

1.

$$\begin{cases} x - \frac{x-3y}{x^2+y^2} = 2 \\ y + \frac{3x+y}{x^2+y^2} = 3 \end{cases} . \tag{3.8}$$

2.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 2 \\ 2xy - \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \end{cases} . \tag{3.9}$$

3.14. Uzdevums. *Virknes* $\{x_n\}$ *un* $\{y_n\}$ *ir definētas ar sākuma nosacījumiem* $x_1 = y_1 = 1$ *un rekurentajām sakarībām*

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - 4y_n \\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n \end{cases} \tag{3.10}$$

visiem $n \geq 1$. *Atrast šo virkņu vispārīgo locekļu formulas.*

4. nodaļa

Polinomi

Par mainīgā x polinomu $P(x)$ sauc algebrisku izteiksmi

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0, \tag{4.1}$$

kur n ir vesels nenegatīvs skaitlis, kuru sauc par polinoma kārtu un apzīmē ar $\deg P$, un a_i ir koeficienti no kādas skaitļu kopas k, piemēram, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ vai $\mathbb{C}$, turklāt $a_n \neq 0$. Ar $k[x]$ apzīmēsim šādu polinomu kopu. Uzskatīsim, ka nulles polinoma kārta ir $-\infty$.

4.1. Hornera shēma

Nākamajā uzdevumā aplūkots piemērs Hornera shēmai, kas ļauj polinomu no x pārveidot par polinomu no $x - a$.

4.1. Uzdevums. *Vienādība* $x^5 - 2x^3 + x + 1 = (x-2)^5 + 10(x-2)^4 + 38(x-2)^3 + 68(x-2)^2 + 57(x-2) + 19$ *ir iegūta, izveidojot šādu tabulu:*

	1	0	−2	0	1	1
2	1	2	2	4	9	**19**
2	1	4	10	24	**57**	
2	1	6	22	**68**		
2	1	8	**38**			
2	1	**10**				
2	**1**					

Atrast šīs tabulas izveidošanas principu un pamatot tā korektumu.

4.2. Uzdevums. *Izmantojot Hornera shēmu, sadalīt polinomu* $p(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i$ *pa* $(x+i)$ *pakāpēm.*

4.3. Uzdevums. *Polinoms* $p(x)$ *kādam skaitlim* a *apmierina identitāti* $p(x) = p(a-x)$. *Pierādīt, ka* $p(x)$ *var izteikt kā polinomu no* $(x - a/2)^2$.

4.2. Eiklīda algoritms

4.1. Teorēma. *Ja $f(x)$ un $g(x)$ ir polinomi no $\mathbb{R}[x]$, $g(x)$ nav nulles polinoms, tad pastāv tāds unikāls n un tādi unikāli polinomi q_1, q_2, ..., q_{n+1}, r_1, r_2, ..., r_n, ka*

$$\begin{array}{rcl} f & = & q_1 g + r_1 \\ g & = & q_2 r_1 + r_2 \\ r_1 & = & q_3 r_2 + r_3 \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ r_{n-2} & = & q_n r_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} & = & q_{n+1} r_n \end{array}$$

un $\deg g > \deg r_1 > \deg r_2 > \ldots > \deg r_n$. *Turklāt r_n ir polinomu f un g lielākais kopīgais dalītājs* $\mathrm{LKD}(f, g)$.

Eiklīda algoritms ļauj atrast lielāko kopīgo dalītāju ne tikai polinomiem ar reāliem koeficientiem, bet arī polinomiem no $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ un vispār no $k[x]$, kur k ir lauks: tāda kopa, kurā definētas saskaitīšanas, atņemšanas, reizināšanas un dalīšanas operācijas ar tām raksturīgajām īpašībām. Piemēram, $\mathbb{Q}$ ir lauks, bet $\mathbb{Z}$ nav, jo, veselu skaitli dalot ar veselu skaitli ne vienmēr tiek iegūts vesels skaitlis.

4.4. Uzdevums.

1. *Izmantojot Eiklīda algoritmu, atrast polinomu $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ un $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ lielāko kopīgo dalītāju.*

2. *Atrast tādus polinomus $u(x)$ un $v(x)$, ka $x + 1 = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.*

4.5. Uzdevums. *Dots: $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$, $g(x) = x^2 - x + 1$, α ir polinoma g sakne.*

1. *Izmantojot Eiklīda algoritmu, atrast tādus polinomus $u(x)$ un $v(x)$, ka*

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1. \tag{4.2}$$

2. *Atbrīvoties no irracionalitātes daļas $1/(3\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha + 2)$ saucējā.*

4.6. Uzdevums. *Atbrīvoties no irracionalitātes daļas $\alpha/(\alpha+1)$ saucējā, kur $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$.*

4.3. Polinoma saknes un sadalījums nereducējamu polinomu reizinājumā

Skaitli α sauc par polinoma $P(x)$ sakni, ja, ievietojot to x vietā, iegūstam izteiksmi, kas vienāda ar nulli: $P(\alpha) = 0$.

Viens no svarīgākajiem rezultātiem polinomu algebrā ir sekojošā teorēma.

4.2. Teorēma. *(Algebras pamatteorēma.) Katram nekonstantam polinomam ar kompleksiem koeficientiem ir vismaz viena kompleksa sakne.*

4.3. Teorēma. *(Bezū teorēma.) Ja α ir polinoma $P(x)$ sakne, tad $P(x)$ dalās ar $x - \alpha$, tas ir, eksistē tāds polinoms $Q(x)$, ka $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$, turklāt* $\deg Q = \deg P - 1$.

Ja $\deg Q \geq 1$, tad arī polinomam Q ir kāda kompleksa sakne. Tādējādi no algebras pamatteorēmas un no Bezū teorēmas izriet

4.1. Sekas. *Katram n-tās kārtas polinomam $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ eksistē tādi kompleksi skaitļi α_1, α_2, ..., α_n, ne obligāti dažādi, ka*

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n). \tag{4.3}$$

Ja skaitlis α ir sastopams starp skaitļiem α_1, α_2, ..., α_n k reizes, tad saka, ka α ir k-tās kārtas sakne. Tātad katram komplekso skaitļu polinomam ir tieši n saknes, ja k-tās kārtas sakni ieskaita k reizes.

Vienādība (4.3) izsaka arī kompleksu skaitļu polinoma sadalījumu nereducējamu polinomu reizinājumā. Polinomu sauc par nereducējamu, ja tas nav konstante un to nevar sadalīt zemākas kārtas polinomu reizinājumā. Nereducējami polinomi ir pirmskaitļu analogs polinomu algebrā. Ja k ir lauks, tad sadalījums nereducējamu polinomu reizinājumā ir unikāls ar precizitāti līdz reizinātāju secībai un nenulles skaitļu (jeb lauka elementu) piereizināšanu reizinājumā esošajiem polinomiem.

No vienādības (4.3) redzams, ka kompleksiem skaitļiem nereducējamie polinomi ir visi pirmās kārtas polinomi. Kā ir reālu skaitļu polinomiem?

4.4. Teorēma. *Ja $P \in \mathbb{R}[x]$ un kompleksais skaitlis $s + it$ ir P sakne, tad arī $s - it$ ir P sakne.*

4.5. Teorēma. *Ja $P \in \mathbb{R}[x]$, $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$; r_1, r_2, ..., r_k ir P reālās saknes, un $s_1 + it_1$, $s_2 + it_2$, ..., $s_l + it_l$, $s_1 - it_1$, $s_2 - it_2$, ..., $s_l - it_l$ ir P kompleksās saknes (starp kurām daudzkārtējās saknes ir sastopamas attiecīgo skaitu reižu), tad $n = k + 2l$ un P var šādi sadalīt nereducējamu polinomu reizinājumā:*

$$P(x) = a_n(x - r_1) \cdot \ldots \cdot (x - r_k)(x^2 - 2s_1 x + s_1^2 + t_1^2) \cdot \ldots \cdot (x^2 - 2s_l x + s_l^2 + t_l^2). \tag{4.4}$$

No skolas kursa zināms, ka kvadrāttrinomiem ar negatīvu diskriminantu nav reālu sakņu, tādēļ tos nevar sadalīt divu lineāru polinomu reizinājumā. Tādējādi vienādība (4.4) dod reālu skaitļu polinomu sadalījumu nereducējamu polinomu reizinājumā, un nereducējamie polinomi šajā gadījumā ir visi lineārie polinomi un kvadrātiskie polinomi ar negatīvu diskriminantu.

4.7. Uzdevums. *Dots: P_1, P_2, ..., $P_n \in \mathbb{R}[x]$. Pierādīt, ka pastāv tādi polinomi A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, $B_3 \in \mathbb{R}[x]$, ka*

$$\sum_{i=1}^{n} P_i^2(x) = A_1^2(x) + B_1^2(x) = A_2^2(x) + xB_2^2(x) = A_3^2(x) - xB_3^2(x). \quad (4.5)$$

4.8. Uzdevums. *$P(x)$ ir polinoms ar reāliem koeficientiem un visiem $x \geq 0$: $P(x) > 0$. Pierādīt, ka eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka $(1+x)^n P(x)$ ir polinoms ar nenegatīviem koeficientiem.*

Racionālu un veselu skaitļu polinomu gadījumā sadalījumu nereducējamu polinomu reizinājumā un pašus nereducējamos polinomus vairs nevar tik vienkārši aprakstīt.

4.4. Vjeta teorēma

Vienādības (4.3) labajā pusē atverot iekavas un pielīdzinot rezultātu vienādībai (4.1), iegūstam sekojošo teorēmu.

4.6. Teorēma. *(Vjeta teorēma.) Katram veselam k no 0 līdz $n-1$:*

$$(-1)^{n-k}\frac{a_k}{a_n} = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_{n-k}} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdot\ldots\cdot\alpha_{i_{n-k}}. \quad (4.6)$$

4.9. Uzdevums. *Atrast polinoma $p(x) = x^n + nx^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ saknes x_1, x_2, ..., x_n, ja dots, ka $x_1^{16} + x_2^{16} + \ldots + x_n^{16} = n$.*

4.10. Uzdevums. *Pierādīt, ka to reālo skaitļu kopa, kas apmierina nevienādību*

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}, \quad (4.7)$$

ir tādu nepārklājošos intervālu apvienojums, kuru garumu summa ir 1988.

4.11. Uzdevums. *Dots: vienādojums $\log_2^2 x - 4\log_2 x - m^2 - 2m - 13 = 0$ attiecībā pret mainīgo x. Pierādīt, ka*

1) visiem $m \in \mathbb{R}$ vienādojumam ir divi dažādi atrisinājumi;

2) atrisinājumu reizinājums nav atkarīgs no m;

3) viens no atrisinājumiem ir mazāks par 1, bet otrs lielāks par 1.

Atrast lielākā atrisinājuma minimālo un mazākā atrisinājuma maksimālo vērtību.

4.5. Galīgās starpības

Funkcijas $f(x)$ atvasinājumu definē kā attiecības $(f(x+\Delta x)-f(x))/\Delta x$ robežu, kad Δx tiecas uz 0. Tomēr izrādās, ka arī, nepārejot pie bezgalīgi mazām starpībām, izpildās vairākas atvasinājumam raksturīgās īpašības.

Pieņemsim, ka $f(x)$ ir polinoms $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ un paņemsim $\Delta x = 1$. Apzīmēsim $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

4.12. Uzdevums. *Pierādīt sekojošās Δf īpašības.*

1. $\Delta f(x)$ arī ir polinoms.

2. Ja f nav nulles polinoms, tad $\deg \Delta f = \deg f - 1$.

3. $\Delta f(x)$ vecākais koeficients jeb koeficients pie x^{n-1} ir na_n.

4. $\Delta(x^n) = \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i x^i$.

5. Definēsim $\Delta^0 f(x) = f(x)$, $\Delta^1 f(x) = \Delta f(x)$ un tālāk

$$\Delta^{n+1} f(x) = \Delta\Delta^n f(x).$$

Pierādīt, ka $\Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i} C_n^i f(x+i)$.

4.13. Uzdevums. *Dots, ka polinoms $P(x)$ apmierina nevienādības*

$$\begin{aligned}
P(0) &> 0; \\
P(1) &> P(0); \\
P(2) &> 2P(1) - P(0); \\
P(3) &> 3P(2) - 3P(1) + P(0); \\
P(n+4) &> 4P(n+3) - 6P(n+2) + 4P(n+1) - P(n) \text{ visiem } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Pierādīt, ka visiem $n \in \mathbb{N}$: $P(n) > 0$.

4.14. Uzdevums. *Dots $n \in \mathbb{N}$. Atrast visus polinomus $P(x)$, kuru kārta nepārsniedz n un kuri apmierina vienādību*

$$\sum_{i=0}^{n} P(i)(-1)^i \binom{n}{i} = 0. \tag{4.8}$$

4.6. Zīmju maiņu skaits

Pieņemsim, ka polinoms $P \in \mathbb{R}[x]$ ir izteikts standarta veidā $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Teiksim, ka koeficienti a_i un a_j $(i < j)$ veido zīmju maiņu, ja tie nav vienādi ar 0 un ir ar pretējām zīmēm, turklāt visi koeficienti starp tiem $(a_{i+1}, \ldots, a_{j-1})$ ir vienādi ar 0. Polinoma P zīmju maiņu skaitu apzīmēsim ar $\mathrm{ZMS}(P)$.

Piemēram, polinomam $2x^7 - x^5 - 3x^2 + x - 5$ ir trīs zīmju maiņas: starp koeficientiem pie x^7 un x^5, x^2 un x, x un brīvo locekli. Tātad $\mathrm{ZMS}(2x^7 - x^5 - 3x^2 + x - 5) = 3$.

4.15. Uzdevums. *Ja $P \in \mathbb{R}[x]$ un $a > 0$, tad $\mathrm{ZMS}((x-a)P)$ ir par nepāra skaitli lielāks nekā $\mathrm{ZMS}(P)$.*

Nākamā teorēma parāda, ka zīmju maiņu skaits ļauj novērtēt polinoma pozitīvo sakņu skaitu.

4.7. Teorēma. *(Dekarta teorēma par zīmju maiņu skaitu.) Ja $P \in \mathbb{R}[x]$ un N ir polinoma P pozitīvo sakņu skaits, tad $\mathrm{ZMS}(P) \geq N$ un $\mathrm{ZMS}(P) - N$ ir pāra skaitlis.*

Lai atrisinātu nākamo uzdevumu, jāsaprot, kā ar zīmju maiņu skaita palīdzību novērtēt ne tikvien pozitīvo, bet gan visu reālo sakņu skaitu.

4.16. Uzdevums. *Polinomam $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{k+1}x^{k+1} + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_0$ ir n dažādas reālas saknes. Pierādīt, ka $a_{k-1} \cdot a_{k+1} < 0$.*

4.7. Lagranža interpolācijas polinoms

Ja zināms, ka polinoms ir konstante, ar vienu tā grafika punktu mēs to viennozīmīgi definējam. Ja zināms, ka polinoms ir lineārs, tad pietiek ar diviem punktiem. Kvadrātisku polinomu definē trīs grafika punkti. Tas rosina hipotēzi, ka, ja zināms, ka polinoma kārta nepārsniedz n, tad $n+1$ tā grafika punkti to viennozīmīgi definē. Nākamā teorēma ne tikai apstiprina šo hipotēzi, bet arī izsaka polinomu ar šiem uzdotajiem grafika punktiem.

4.8. Teorēma. *Ja $P \in \mathbb{C}[x]$, tad pastāv tieši viens polinoms, kura kārta nepārsniedz n un kurš dotajām $n+1$ dažādām argumenta vērtībām x_0, x_1, $\ldots$, x_n pieņem dotās vērtības: $P(x_i) = y_i$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, un šo polinomu var izteikt ar šādu summu:*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}\, y_i \tag{4.9}$$

Šo polinomu sauc par Lagranža interpolācijas polinomu.

4.17. Uzdevums. *Dots: n-tās kārtas polinoms P,* $P(k) = 1/C_{n+1}^k$ *visiem* $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$*. Kāda ir* $P(n+1)$ *vērtība?*

4.18. Uzdevums. *Dots: polinoms P, kura kārta nepārsniedz* $2k$*; visiem veseliem i no intervāla* $[-k, k]$*:* $|P(i)| \le 1$*. Pierādīt, ka visiem reāliem x no intervāla* $[-k, k]$*:* $|P(x)| \le (2k+1)C_{2k}^k$*.*

4.19. Uzdevums. *Dots, ka p ir pirmskaitlis un f ir d-tās kārtas polinoms ar veseliem koeficientiem, tāds, ka*

1) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$*;*

2) katram veselam pozitīvam n: atlikums, dalot $f(n)$ *ar p, ir* 0 *vai* 1*.*

Pierādīt, ka $d \ge p - 1$*.*

4.8. Polinomi ar veseliem vai racionāliem koeficientiem

Polinomu ar racionāliem koeficientiem var pareizināt ar tā koeficientu kopsaucēju, pārvēršot to par polinomu ar veseliem koeficientiem un nemainot tā sakņu kopu un skaņu kārtas.

Ja ir dots polinoms ar veseliem koeficientiem, viens no pamatuzdevumiem ir atrast tā racionālās saknes. Nākamajā uzdevumā aplūkotie kritēriji ļauj ievērojami atvieglot meklēšanu.

4.20. Uzdevums. *Dots: nesaīsināma racionāla daļa* p/q *ir polinoma ar veseliem koeficientiem* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ *sakne. Pierādīt sekojošos apgalvojumus.*

1. a_n *dalās ar q.*

2. a_0 *dalās ar p.*

3. *Katram veselam m:* $f(m)$ *dalās ar* $p - mq$*.*

4.21. Uzdevums. *Atrast polinomu racionālās saknes:*

1) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$.

2) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$.

4.22. Uzdevums. *$P(x)$ ir polinoms ar veseliem koefiecientiem, kurš apmierina sakarību $P(m_1) = P(m_2) = P(m_3) = P(m_4) = 7$ dotiem dažādiem veseliem skaitļiem m_1, m_2, m_3, m_4. Pierādīt, ka nav tāda vesela skaitļa m, ka $P(m) = 14$.*

4.23. Uzdevums. *Pierādīt, ka katram veselam $n > 1$ polinomam*

$$\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1 \tag{4.10}$$

nav racionālu sakņu.

4.24. Uzdevums. *Dots: α ir polinoma $x^2 - 1989x - 1$ positīvā sakne. Pierādīt, ka bezgalīgi daudziem naturāliem n ir spēkā vienādība*

$$[\alpha n + 1989\alpha[\alpha n]] = 1989n + (1989^2 + 1)[\alpha n]. \tag{4.11}$$

4.9. Redukcija pēc vesela skaitļa moduļa

Aplūkojot polinomus ar veseliem koeficientiem, vairākos uzdevumos ir svarīga tikai koeficientu, argumenta un polinoma vērtību dalāmība ar kādu veselu pozitīvu skaitli n. Šādos gadījumos ir ērti aizvietot polinoma koeficientus ar to atlikumiem pēc moduļa n un visas darbības ar polinomiem arī aplūkot pēc moduļa n. Atlikumu pēc moduļa n kopu ar šiem atlikumiem definētajām saskaitīšanas un reizināšanas operācijām apzīmē ar $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

4.9. Teorēma. *Ja $f \in \mathbb{Z}[x]$, tad ar $\overline{f} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[x]$ apzīmēsim polinomu, kurš iegūts no f, aizvietojot tā koeficientus ar to atlikumiem pēc moduļa n.*

Tādā gadījumā visiem f, $g \in \mathbb{Z}[x]$ izpildās identitātes

1) $\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$;

2) $\overline{fg} = \overline{f} \cdot \overline{g}$.

Svarīgi zināt, ka, ja n ir pirmskaitlis, tad $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ir lauks, jo tajā var jebkuru atlikumu dalīt ar jebkuru nenulles atlikumu. Saliktam n šī īpašība nav spēkā. Piemēram, aplūkojot atlikumus pēc moduļa 6, nav iespējams 1 izdalīt ar 2, jo nav tāda k, ka $2k$ dotu 1 atlikumā, dalot ar 6. Toties pēc moduļa 5 tas ir iespējams: $2 \cdot 3$ dod 1 atlikumā, dalot ar 5, tātad $1/2 = 3$ pēc moduļa 5.

Tā kā 2 ir pirmskaitlis, tad $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ir lauks un polinomiem ar koeficientiem no tā var izmantot Eiklīda algoritmu.

4.25. Uzdevums. *Izmantojot Eiklīda algoritmu, atrast polinomu $f, g \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ lielāko kopīgo dalītāju:*

1) $f(x) = x^5 + x^4 + 1$, $g(x) = x^4 + x^2 + 1$*;*

2) $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$, $g(x) = x^4 + 1$.

4.26. Uzdevums. *Pierādīt, ka polinomam $(x + 1)^{2^n}$ visi koeficienti, izņemot vecāko koeficientu un brīvo locekli, ir pāra skaitļi.*

4.27. Uzdevums. *Atrast polinoma $(x+1)^{1998}$ nepāra koefiecientu skaitu.*

4.28. Uzdevums. *C_n^k ir kombināciju no n pa k skaits. Pierādīt, ka*

1) C_n^k ir pāra skaitlis visiem k no 1 līdz $n - 1$ tad un tikai tad, ja $n = 2^s$ kādam veselam nenegatīvam s.

2) C_n^k ir nepāra visiem k no 0 līdz n tad un tikai tad, ja $n = 2^s - 1$ kādam veselam nenegatīvam s.

Bibliogrāfija

[1] A. Andžāns, A. Kalniņa. *Daži vektoru nestandarta lietojumi planimetrijā.* A. Liepas Neklātienes matemātikas skola, Latvijas Valsts universitāte, Rīga, 1985.

[2] J. Vīksna. *Nevienādību pierādīšanas metodes.* A. Liepas Neklātienes matemātikas skola, Latvijas Valsts universitāte, Rīga, 1988.

[3] О. А. Иванов. Избранные главы элементарной математики. Издательство С.-Петербургского университета, Санкт-Петербург, 1995.

[4] П. П. Коровкин. Неравенства. Наука, Москва, 1983.

[5] Л. П. Купцов. Комплексные числа. Задание для подготовки к международной олимпиаде. МГУ, Москва, 1989.

[6] А. М. Слинько, А. А. Фомин. Многочлены. Задание для подготовки к международной олимпиаде. МГУ, Москва, 1989.