A. Bērziņa, A. Bērziņš

# Diferencēti uzdevumi skaitļu teorijā

Rīga 1996

# Anotācija

Diferencētu uzdevumu krājums elementārajā skaitļu teorijā paredzēts vidusskolu skolotājiem un skolniekiem, apgūstot profilkursu skaitļu teorijā. Uzdevumi klasificēti pa tēmām un grūtības pakāpēm. Uzdevumiem doti izvērsti atrisinājumi. Katras nodaļas sākumā dots īss teorijas apraksts, kas nepieciešams uzdevumu risināšanai.

# Satura rādītājs

# Ievads

Šis ir uzdevumu krājums elementārajā skaitļu teorijā, kuru var izmantot gan skolotāji, gan skolnieki apgūstot skaitļu teoriju profilkursā. Ņemot vērā, ka skaitļu teorijas kurss mūsu skolās ir samērā jauna disciplīna, veidojot šo uzdevumu krājumu bija jāievēro vairākas prasības. Pirmkārt, uzdevumu krājumam jāsatur pietiekami liels vingrinājuma tipa uzdevumu, jo praktiski mums nav uzdevumu krājuma, kur ņemt pašus vienkāršākos piemērus. Otrkārt, uzdevumiem jādod pietiekoši plaši un skaidri atrisinājumi, nevis vienkārši atbildes vai īsi norādījumi, jo atbilstošu mācību grāmatu pagaidām nav, un ar atrisinājumu metodēm jāiepazīstina ne tikai skolēni, bet arī skolotāji.

Šādam nolūkam tika izvēlēta diferencēta uzdevumu krājuma forma, kurā, pirmkārt, uzdevumi sadalīti pa nodaļām - galvenajām skaitļu teorijas profilkursa tēmām un, otrkārt, pa grupām A, B, C un D, kas atbilst dažādām grūtības pakāpēm.

Kaut gan nav iespējams pilnīgi precīzi noteikt uzdevuma atbilstību kādai no grupām, tomēr mēģināsim formulēt, kādi uzdevumi iekļauti atbilstošajās grupās. A grupa satur uzdevumus - elementāros vingrinājumus, kuros tiešā veidā var pārbaudīt, kā izprasti atbilstošās nodaļas skaitļu teorijas jēdzieni.

Arī B grupas uzdevumi neprasa no skolnieka izdomāt jaunus paņēmienus, vai veikt garus, kombinētus, tehniski sarežģītus pārveidojumus, bet tomēr atšķirībā no A grupas tie ir vairāku soļu uzdevumi, kuros jāpielieto vairākas īpašības vai metodes.

C grupa satur uzdevumus, kuros kombinējas vairākas metodes un kuri var prasīt tehniski sarežģītus garus pārveidojumus, vai arī tādu īpašību izmantošanu, kuras nav acīmredzamas no uzdevuma formulējuma.

D grupa savukārt atšķiras no visām iepriekšējām, ka satur tā saucamos olimpiāžu vai konkursa tipa uzdevumus. Tas nozīmē, ka D grupā var būt gan vieglāki, gan grūtāki uzdevumi, bet, lai atrisinātu D grupas uzdevumu, ir jāatrod kāda ''ideja'' - savs piegājiens uzdevumam, jo tieši standarta paņēmieni, kas ļāva atrisināt iepriekšējo grupu uzdevumus, šeit neko nedos. Aplūkojot D grupas uzdevumus varēsim redzēt, ka tur ir gan ļoti sarežģīti uzdevumi, gan samērā ''viegli'', taču katram no šiem uzdevumiem, lai cik īss nebūtu to atrisinājums, ir kāds netriviāls moments, kas arī nosaka uzdevuma vietu grupā D.

Jāsaka, ka veidojot C un D grupas uzdevumus pamatā varēja jau izmantot esošos uzdevumu krājumus, veicot atbilstošo atlasi un klasifikāciju. Veidojot A un B grupu uzdevumus, vajadzēja pievienot daudz jaunu uzdevumu (apmēram puse no A un B grupas uzdevumiem ir jauni), jo atbilstošo elementāro uzdevumu esošajos krājumos ir pārāk maz. Protams, lielākā dala šo uzdevumu ir analoģiski vecajiem, bet, veidojot uzdevumu krājumu skolām, bija ļoti nepieciešami izveidot pietiekoši lielu tieši elementāro uzdevumu sarakstu.

Katras nodaļas sākumā ir neliels izziņu materiāls, kas, protams, nedod iespēju apgūt skaitļu teoriju, bet norāda, ko vajadzētu zināt, lai varētu risināt atbilstošās nodaļas uzdevumus. Rakstot atrisinājumus mēs atsaucamies uz šo materiālu.

# 1. Dalāmības īpašības

**Definīcija**. Saka, ka skaitlis a ir b *dalītājs*, jeb b *dalās* ar a, un apzīmē $a|b$, jeb $b \vdots a$, ja eksistē tāds skaitlis c, ka $ac = b$.

**Dalāmības īpašības:**

D1. ja $a|b$ un $a|c$, tad $a|(b \pm c)$,

D2. ja $a|b$, tad $a|kb$,

D3. ja $a|b_1$, $a|b_2$, ... , $a|b_n$, tad $a|(k_1b_1 + k_2b_2 + ... + k_nb_n)$,

D4. ja $a|b$ un $b|c$, tad $a|c$,

D5. ja $a|c$ un $b|d$, tad $ab|cd$,

D6. ja a un b ir naturāli skaitļi, $a|b$ un $b|a$, tad $a = b$.

**Pirmskaitļa definīcija.** Naturālu skaitli $n>1$ sauc par *pirmskaitli*, ja tam nav citu naturālu dalītāju, izņemot 1 un n.

**Pirmskaitļu īpašības:**

1. Naturāls skaitlis $n>1$ nav pirmskaitlis tad un tikai tad, kad eksistē tāds skaitļa n dalītājs $m>1$, kurš nepārsniedz $\sqrt{n}$ .
2. Ja p ir pirmskaitlis, un $p|ab$, tad $p|a$ vai $p|b$.

# Uzdevumi

## A grupa

**1.1**. Dots, ka $5|a$ un $5|b$. Pierādiet, ka $5|(a^2 + 7b)$.

**1.2.** Dots, ka $7|a$. Pierādiet, ka $7|(a^2 + 3a + 7b - 21)$.

**1.3**. Dots, ka $n|a$ un $n|(5a + b)$. Pierādiet, ka $n|b$.

**1.4.** Dots, ka $n|(a - b)$. Pierādiet, ka $n|(a^2 + a - b^2 - b)$.

**1.5.** Dots, ka $n|3a$ un $n|(12a + 5b)$. Pierādiet, ka $n|10b$.

**1.6.** Dots, ka $5|(a - b)$ un $7|(a + b)$. Pierādiet, ka $35|(a^2 - b^2)$.

**1.7.** Doti tādi naturāli skaitļi a, b, c, ka $a|b$, $b|c$, $c|a$. Pierādiet, ka $a = b = c$.

**1.8.** Dots, ka $3|(a - 1)$ un $5|(a +2)$. Pierādiet, ka $15|(a^2 + a - 2)$.

**1.9.** Kuri no skaitļiem 101, 111, 141, 143, 155, 161, 163 ir pirmskaitļi?

**1.10.** Atrodiet visus pirmskaitļus intervālā [100, 120].

**1.11.** Atrodiet visus pirmskaitļus intervālā [180, 200].

**1.12.** Ar kādām naturālām n vērtībām skaitlis $n^2 - 1$ ir pirmskaitlis?

**1.13.** Dots, ka $5|12a$. Pierādiet, ka $5|a$.

**1.14.** Dots, ka $7|a$ un $7|(2a + 3b)$. Pierādiet, ka $7|b$.

**1.15.** Dots, ka $5|7b$ un $7|5a$. Pierādiet, ka $35|ab$.

## B grupa

**1.16.** Dots, ka $n|(5a + 3b)$ un $n|(3a + 2b)$. Pierādiet, ka $n|a$ un $n|b$.

**1.17.** Dots, ka $n|(3a + 7b)$ un $n|(2a + 5b)$. Pierādiet, ka $n|a$ un $n|b$.

**1.18.** Dots, ka $5|(3a + 4b)$ un $5|(2a + 3b)$. Pierādiet, ka $25|ab$.

**1.19.** Pierādiet, ka visiem naturāliem n skaitlis $n^2 + n + 6$ dalās ar 2.

**1.20.** Dots, ka $n|(a - b)$. Pierādiet, ka $n|(a^3 + a^2 - b^3 - b^2)$.

**1.21.** Dots, ka $n|(a + 2b)$. Pierādiet, ka $n|(a^3 + 2a + 8b^3 + 4b)$.

**1.22.** Dots, ka daļa a/b ir saīsināma. Vai dala (a - b)/(a + b) ir saīsināma? Un otrādi, ja zināms, ka dala (a - b)/(a + b) ir saīsināma, vai dala a/b noteikti ir saīsināma?

**1.23.** Dots, ka $11|(3x + 7y)$ un $11|(2x + 5y)$. Pierādiet, ka $121|(x^2 + y^2)$.

**1.24.** Doti tādi naturāli skaitļi a, b, ka $a|(a + b)$ un $b|(a + b)$. Pierādiet, ka $a = b$.

**1.25.** Dots, ka $2|(a - 1)$ un $3|(a + 1)$. Pierādiet, ka $6|(a^2 + 5)$.

**1.26.** Dots, ka $6|(a - b)$ un $6|(a + b)$. Pierādiet, ka $3|(a^2 + 8b^2)$.

**1.27.** Ar kādām naturālām n vērtībām skaitlis $n^3 - 1$ ir pirmskaitlis?

**1.28.** Ar kādām naturālām n vērtībām skaitlis $n^2 + 5n +6$ ir pirmskaitlis?

**1.29.** Ar kādām naturālām a un b vērtībām skaitlis $ab + a + b + 1$ ir pirmskaitlis?

**1.30.** Dots, ka $4|x$ un $3|y$. Pierādiet, ka $12|(xy + 8y + 9x)$.

**1.31.** Dots, ka $11|(4a + b)$ un $11|(a +4b)$. Pierādiet, ka $11|a$ un $11|b$.

**1.32.** Dots, ka $7|(3a + b)$ un $7|(a + 3b)$. Pierādiet, ka $49|ab$.

**C grupa.**

**1.33.** Dots, ka $7|(2a + 3b)$. Pierādiet, ka $7|(a + 5b)$.

**1.34.** Dots, ka $13|(a + 4b)$. Pierādiet, ka $13|(10a + b)$.

**1.35.** Dots, ka $11|(3a + 7b)$. Pierādiet, ka $11|(4a + 2b)$.

**1.36.** Pierādiet, ka skaitlis $4a + 5b$ dalās ar 17 tad un tikai tad, kad skaitlis $7a - 4b$ dalās ar 17.

**1.37.** Ar kādām naturālām n un m vērtībām skaitlis $(n - m)(n^2+ m -1)$ ir pirmskaitlis?

**1.38.** Atrodiet vismaz vienu naturālu skaitli n, lai intervālā $[n, n + 10]$ nebūtu neviena pirmskaitļa.

**D grupa.**

**1.39.** Doti tādi skaitļi u un v, ka skaitlis $u^2 + uv + v^2$ dalās ar 9. Pierādiet, ka abi skaitļi u un v dalās ar 3.

**1.40**. Vai dažādu pirmskaitļu apgriezto lielumu summa var būt vesels skaitlis?

**1.41**. Pierādiet, ka naturāls skaitlis n ir pirmskaitlis tad un tikai tad, kad eksistē vienīgais naturālo skaitu pāris (x, y), kuram izpildās vienādība $1/x - 1/y = 1/n$.

**1.42.** Pirmo n naturālo skaitļu summa ir trīsciparu skaitlis, kuram visi cipari vienādi. Atrast skaitli n.

**1.43.** Vai iespējams norādīt tādu galīgu skaitu ģeometrisko progresiju, kuru locekļi ir naturāli skaitļi, ka jebkurš naturāls skaitlis piederētu vismaz vienai progresijai?

**1.44.** Atņemot no divciparu skaitļa $\overline{ab}$ divciparu skaitli $\overline{ba}$, ieguva naturāla skaitļa kvadrātu. Atrast visus tādus skaitļus, kuriem izpildās šī īpašība.

# 2. Skaitu dalīšana ar atlikumu, LKD un MKD

**Definīcijas.**

1. Dots vesels skaitlis a un naturāls skaitlis b. *Izdalīt a ar b ar atlikumu* nozīmē izteikt skaitli a formā $a = bq + r$, kur $0 \le r < b$. Skaitli a sauc par *dalāmo*, skaitli b par *dalītāju*, skaitli q par *nepilno dalījumu*, skaitli r par *atlikumu*.

2. Lielāko no skaitļu a un b kopīgajiem dalītājiem sauc par skaitļu a un b *lielāko kopīgo dalītāju* un apzīmē LKD(a, b) (vai īsāk (a, b)).

3. Mazāko no naturāliem skaitļiem, kuri dalās gan ar a, gan ar b, sauc par skaitļu a un b *mazāko kopīgo dalāmo* un apzīmē MKD(a,b) (vai īsāk [a, b]).

4. Skaitļus a un b sauc par *savstarpējiem pirmskaitļiem*, ja $(a, b) = 1$.

**LKD īpašības:**

L1. $(a, b) = (a, b + ka)$;

L2. $(ta, tb) = t\,(a, b)$;

L3. $a/(a, b)$ un $b/(a, b)$ ir savstarpēji pirmskaitļi;

L4. $(a, b)\,[a, b] = ab$ (a un b ir naturāli skaitļi);

L5. ja $a|x$, $b|x$ un $(a, b) = 1$, tad $ab|x$;

L6. ja $x|ab$ un $(a, x) = 1$, tad $x|b$.

Naturālu skaitļu a un b LKD atrašanai izmanto *Eiklīda algoritmu*. Skaitu a un b LKD var izteikt formā $(a, b) = ua + vb$.

**Daudzkārtņu skaits intervālā.** Intervālā [1, m] atrodas [m/n] (veselā dala) skaitļa n daudzkārtņu.

**Skaitļa n! īpašības:**

1. Visi naturālie skaitļi, kas nepārsniedz n, ir n! dalītāji.

2. Visi skaitļa n! + 1 naturālie dalītāji (izņemot vieninieku) ir lielāki par n.

3. Visi skaitļi intervālā [n! +2, n! + n] ir salikti skaitļi.

# Uzdevumi

## A grupa

**2.1.** Izdalīt ar atlikumu:

a) 1996 ar 11,
b) 200 ar 10,
c) 15 ar 1,
d) 0 ar 5,
e) - 17 ar 3,
f ) 3 ar 12,
g) - 3 ar 12,
h) -18 ar 3,
i ) - 111 ar 7.

**2.2.** Ar Eiklīda algoritmu aprēķināt:

a) (33, 18),
b) (1260, 406),
c) (56, 39),
d) (312, 138).

**2.3.** Izmantojot formulu [a, b] = ab / (a, b), aprēķināt [a, b]:

a) [30, 18],
b) [55, 25],
c) [143, 91],
d) [200, 150].

**2.4.** Saīsināt daļas:

a) 39 / 24,
b) 60 / 16,
c) 612 / 522,
d) 3053 / 4343.

**2.5.** Ar Eiklīda algoritmu aprēķināt d = (a, b) un izteikt skaitli d formā ua + vb.

a) (15, 9),
b) (187, 68),
c) (200, 325),
d) (200, 40).

**2.6.** Dots, ka a - b dalās ar 5 un a + b dalās ar 5. Pierādiet, ka abi skaitļi a un b dalās ar 5.

**2.7.** Cik daudz ir naturālu skaitļu, kas ir mazāki par 1000 un dalās ar 11?

**2.8.** Dalot skaitli a ar 13, iegūstam nepilno dalījumu 17. Noteikt skaitļa a lielāko iespējamo vērtību.

**2.9.** Dalot skaitli x ar 7, iegūstam nepilno dalījumu 11. Kādas vērtības var pieņemt skaitlis x?

**2.10.** Skaitli a dalot ar 12, atlikumā iegūstam 7. Kādu atlikumu iegūsim, skaitli a dalot ar 6?

**2.11.** Skaitli a dalot ar 18, atlikumā iegūstam 12. Kādu atlikumu iegūsim, skaitli a dalot ar 3?

## B grupa

**2.12.** Dots, ka (a, b) = 6. Kādas vērtības var pieņemt sekojošie skaitļi?
a) (a, b + 5a),
b) (8a + 3b, 5a + 2b),
c) (4a, 4b),
d) (a, 2b),
e) (5a, 2b),
f ) (4a + 6b, 6a + 8b).

**2.13.** Dots, ka (x, y) = 10. Kādas vērtības var pieņemt sekojošie skaitļi?
a) (x, y+3x),
b) (3x + 7y, 2x + 5y),
c) (x, 2y),
d) (3x, 3y),
e) (3x, 2y),
f ) (2x + 2y, 3x +4y),
g) (4x + 6y, 6x + 10y),
h) (30x +14 y, 21x + 10y).

**2.14.** Pierādiet, ka visiem naturāliem n skaitlis $n^3 + 3n^2 + 2n$ dalās ar 6.

**2.15.** Aritmētiskā progresija, kuras locekļi ir veseli skaitļi, satur skaitļus 41, 113 un 193. Kāda var būt šīs progresijas diferences lielākā vērtība?

**2.16.** Dots, ka 10|(4a + 3b) un 10|(3a + 5b). Pierādiet, ka 10|a un 10|b.

**2.17.** Pierādiet, ka trīs pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums dalās ar 6.

**2.18.** Dots, ka $6|(3a - 8b)$ un $6|(2a - 3b)$. Pierādiet, ka $36|(a^2 + ab + b^2)$.

**2.19.** Pierādiet, ka skaitļi $(n^3 - 1) / (n - 1)$ un $(n + 1)^2$ ir savstarpēji pirmskaitļi.

**2.20.** Dots, ka $2a + 3b$ dalās ar 5 un $2a + 9b$ dalās ar 5. Pierādiet, ka abi skaitļi a un b dalās ar 5.

**2.21.** Cik daudz ir trīsciparu skaitļu, kas dalās ar 13 ?

**2.22.** Cik daudz ir četrciparu skaitļu, kas dalās ar 7 ?

**2.23.** Pierādiet, ka skaitļi $n^3 + 2n$ un $n^2 + 1$ ir savstarpēji pirmskaitļi visām n vērtībām.

**2.24.** Dalāmais ir vienāds ar 371, bet nepilnais dalījums ir 14. Nosakiet iespējamās dalītāja vērtības un atbilstošos atlikumus.

**2.25.** Dalot skaitli 100 ar b, atlikumā ieguvām 6. Kādas vērtības var pieņemt skaitlis b ?

**2.26.** Dots, ka $(a, c) = 1$ un $(b, c) = 1$. Pierādiet, ka $(ab, c) = 1$.

**2.27.** Dalot skaitli 85 ar x, ieguva nepilno dalījumu x. Aprēķināt x.

**2.28.** Skaitli n, dalot ar 2, iegūst atlikumā 1, bet, dalot ar 5, atlikumā iegūst 2. Kādu atlikumu iegūsim, skaitli n dalot ar 10 ?

## C grupa

**2.29.** Dots, ka $(a, b) = 1$. Kādas vērtības var pieņemt skaitlis $(a + b, a^2 + b^2)$ ?

**2.30.** Pierādiet, ka četru pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums dalās ar 24.

**2.31.** Dots, ka $5|(4a + 7b)$ un $5|(3a + 8b)$. Pierādiet, ka $250|ab(a+b)$.

**2.32.** Zināms, ka dalot skaitļus 2077 un 100 ar a, iegūti vienādi atlikumi. Kādas var būt skaitļa a vērtības ?

**2.34.** Cik daudz ir tādu naturālu skaitļu $n < 1994$, kuriem $3n + 5$ dalās ar 7 ?

**2.35.** Cik daudz ir tādu naturālu skaitļu $n \leq 1000$, kuri nedalās ne ar 5, ne ar 7 ?

**2.36.** Cik daudz ir tādu piecciparu skaitļu, kuru pēdējais cipars ir 6 un kuri dalās ar 3 ?

**2.37.** Kādas vērtības var pieņemt skaitlis $(n + 1, n^2 - 4)$ ?

**2.38.** Doti veseli skaitļi a, b un p, $p \neq 0$. Pierādiet, ka eksistē tādi savstarpēji pirmskaitļi k un l, ka $ak + bl$ dalās ar p.

**2.39.** Doti naturāli skaitļi a un b. Pierādiet, ka no skaitļiem a, 2a, 3a,..., ba tieši $(a, b)$ dalās ar b.

**2.40.** Doti naturāli skaitļi $a$, $b$, $a_1$, $b_1$. Apzīmēsim $(a, b)$ ar d un $(a_1,b_1)$ ar $d_1$. Pierādiet, ka $(aa_1, ab_1, ba_1, bb_1) = dd_1$.

**2.41.** Pierādiet, ka $(a, b) = (u_1a + v_1b, u_2a + v_2b)$, ja $u_1v_2 - u_2v_1 = 1$.

**2.42.** Pierādiet, ka $(ac, b) = (c, b)$ , ja $(a, b) = 1$.

## D grupa

**2.43.** Naturāls skaitlis A, dalot ar 1981, dod atlikumā 35, bet, dalot ar 1982, dod atlikumā 13. Kādu atlikumu dod A, dalot ar 14 ?

**2.44.** Doti 12 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi. Pierādiet, ka vismaz viens no tiem ir mazāks par savu dalītāju summu. (Tiek aplūkoti skaitļa naturālie dalītāji, kas ir mazāki par pašu skaitli).

**2.45.** Atrodiet mazāko naturālo skaitli, kuru, dalot ar 2, iegūst atlikumā 1; dalot ar 3, iegūst atlikumā 2; dalot ar 4, iegūst atlikumā 3; dalot ar 5, iegūst atlikumā 4; dalot ar 6, iegūst atlikumā 5.

**2.46.** Doti veseli skaitļi a un b. Pierādiet vienādību $(a + b, [a, b]) = (a, b)$.

**2.47.** Kādu lielāko vērtību var pieņemt naturālo skaitļu $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ LKD, ja to summa ir 1001 ?

**2.48.** Doti četri naturāli skaitļi a, b, c, d, kuri ir savstarpēji pirmskaitļi ar skaitli $m = ad - bc$. Pierādiet, ka visiem veseliem skaitļiem x un y, kuriem $ax + by$ dalās ar m, skaitlis $cx + dy$ arī dalās ar m.

**2.49.** Atrodiet divciparu skaitli, kurš ir vienāds ar otrā (vieninieku) cipara kvadrāta un pirmā (desmitnieku) cipara summu.

**2.50.** Atrodiet trīsciparu skaitli, kuru, kāpinot jebkurā naturālā pakāpē, iegūsim skaitli, kura pēdējie trīs cipari veido sākotnējo skaitli.

**2.51.** Atrodiet visas tādas naturālu skaitļu virknes $(a_n)$, kurām izpildās sekojošas īpašības:
a) visiem naturāliem n izpildās nevienādība $a_n \leq n\sqrt{n}$,
b) visiem naturāliem n un m starpība $a_m - a_n$ dalās ar $m - n$.

**2.52.** Dots naturāls skaitlis m. Nosakiet, cik daudz ir tādu veselu nenegatīvu skaitļu k, kuriem $m + k^2$ ir vesela skaitļa kvadrāts.

# 3. Skaitļa sadalījums pirmreizinātājos

Katru naturālu skaitli n var vienīgajā veidā uzrakstīt formā
$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$. Šeit $p_i$ ir pirmskaitļi, $k_i$ - naturāli skaitļi. Sauksim $k_i$ par *pirmskaitļa* $p_i$ *kārtu* naturālam skaitlim n un apzīmēsim to ar
$\mathrm{ord}_p\, n$.
Pirmskaitļa kārtu var noteikt arī, nesadalot skaitli n pirmreizinātājos. Mums ir tikai jānoskaidro, ar kādu lielāko p pakāpi dalās skaitlis n. Ja p nav n dalītājs, tad $\mathrm{ord}_p\, n = 0$.

**Pirmskaitļa kārtas īpašības:**

1. $\mathrm{ord}_p (x y) = \mathrm{ord}_p x + \mathrm{ord}_p y$

2. $\mathrm{ord}_p x^n = n \, \mathrm{ord}_p x$

3. $\mathrm{ord}_p (x + y) \geq \min (\mathrm{ord}_p x, \mathrm{ord}_p y)$

4. Ja $\mathrm{ord}_p x < \mathrm{ord}_p y$, tad $\mathrm{ord}_p (x + y) = \mathrm{ord}_p x$

5. Ja visiem pirmskaitļiem p izpildās īpašība
   a) $\mathrm{ord}_p x \leq \mathrm{ord}_p y$, tad $x \mid y$;
   b) $\mathrm{ord}_p x = \mathrm{ord}_p y$, tad $x = y$, (x ,y - naturāli skaitļi)

6. n ir naturāla skaitļa k-tā pakāpe tad un tikai tad, kad visiem pirmskaitļiem p $\mathrm{ord}_p\, n$ dalās ar k.

Risinot atsevišķus uzdevumus, mēs varam interesēties tikai par vienu skaitļa n pirmreizinātāju p. Tādā gadījumā izmanto skaitļa n pierakstu formā

$$n = p^k u, \text{ turklāt } p \mid u.$$

**Dalītāju skaita un summas formulas:**

Ja $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$ , tad naturālo dalītāju skaitu aprēķina pēc formulas $d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_r + 1)$, bet dalītāju summu - $q(n) = (1 + p_1 + \ldots + p_1^{k_1})(1+ p_2 + \ldots + p_2^{k_2})\ldots(1 + p_r + \ldots + p_r^{k_r})$.

**Pirmskaitļa kārtu skaitlim n! nosaka pēc formulas:**

$$\mathrm{ord}_p\, n! = [n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + \ldots$$

[x] - apzīmē skaitļa x veselo daļu. Summa ir galīga, jo, tiklīdz $p^k$ kļūst lielāks par n, tā $[n/p^k] = 0$.

# Uzdevumi

## A grupa

**3.1.** Sadalīt pirmreizinātājos skaitļus:
a) 1000;
b) 250;
c) 121;
d) 8400;
e) 1440.

**3.2.** Aprēķināt $\mathrm{ord}_2\ 106$.

**3.3.** Aprēķināt $\mathrm{ord}_3\ 216$.

**3.4.** Aprēķināt $\mathrm{ord}_3\ (6^{10} \cdot 18^{20})$.

**3.5.** Aprēķināt $\mathrm{ord}_3\ (12^3 \cdot 18^5 \cdot 25^{10})$.

**3.6.** Aprēķināt $\mathrm{ord}_2\ (10^3 \cdot 15^2 \cdot 8^4)$.

**3.7.** Aprēķināt $\mathrm{ord}_5\ (8^4 \cdot 20^3 \cdot 25^2)$.

**3.8.** Aprēķināt $\mathrm{ord}_3\ (24^3 \cdot 27^5 \cdot 15^7)$.

**3.9.** Aprēķināt $\mathrm{ord}_3\ 200!$ .

**3.10.** Aprēķināt $\mathrm{ord}_2\ 100!$ .

**3.11.** Aprēķināt $\mathrm{ord}_5\ 300!$ .

**3.12.** Ar cik nullēm beidzās skaitlis 200! ?

**3.13.** Cik naturālo dalītāju ir skaitlim 350?

**3.14.** Cik naturālo dalītāju ir skaitlim 600?

**3.15.** Kāda ir skaitļa 350 naturālo dalītāju summa?

**3.16.** Kāda ir skaitļa 600 naturālo dalītāju summa?

## B grupa

**3.17.** Uzrakstīt skaitļa 15! kanonisko sadalījumu pirmreizinātājos.

**3.18.** Ar kādu mazāko naturālo skaitli jāpareizina skaitlis 90, lai iegūtu vesela skaitļa kvadrātu.

**3.19.** Ar kādu mazāko naturālo skaitli jāpareizina skaitlis 150, lai iegūtu naturāla skaitļa kubu?

**3.20.** Atrodiet mazāko naturālo skaitli, kuru reizinot ar 2, iegūstam naturāla skaitļa kvadrātu, bet reizinot ar 3 - naturāla skaitļa kubu.

**3.21.** Cik naturālu dalītāju ir skaitlim 20! ?

**3.22.** Pierādiet, ka skaitlis $5 \cdot 2^k + 2$ nav naturāla skaitļa kvadrāts nevienai k vērtībai.

**3.23.** Pierādiet, ka skaitlis $3^k + 3$ nav naturāla skaitļa kvadrāts.

**3.24.** Ar cik nullēm beidzas skaitlis ((3!)!)! ?

## C grupa

**3.25.** Atrodiet mazāko naturālo skaitli n, kuram vienlaicīgi izpildās šādas īpašības:

a) n / 2 - naturāla skaitļa kvadrāts,
b) n / 3 - naturāla skaitļa kubs,
c) n / 5 - naturāla skaitļa piektā pakāpe.

**3.26.** Atrodiet visus naturālos skaitļu x, y pārus, kuriem (x, y) = 6 un [x, y] = 120.

**3.27.** Pierādiet, ka n! + 2 nav naturāla skaitļa kvadrāts, ja n > 2.

**3.28.** Atrisiniet vienādojumu naturālos skaitļos $x! + 3 = y^3$.

## D grupa

**3.29.** Vai skaitļa n! pēdējie cipari var būt šādi 199400 ... 0?

**3.30.** Aprēķināt $\text{ord}_2$ [(n+1)(n+2) ... (2n)].

**3.31.** Zināms, ka skaitlim A ir tieši 62 naturāli dalītāji. Pierādiet, ka A nedalās ar 36.

**3.32.** Pierādiet, ka skaitļa 1234 ... 19941995 dalītāju skaits nav vienāds ar 25323.

**3.33.** Pierādiet, ka skaitlis, kuram ir nepāra skaits dalītāju, ir naturāla skaitļa kvadrāts.

**3.34.** a) Atrodiet kaut vienu skaitli k, kurš dalās ar 18 un kuram ir tieši 14 naturāli dalītāji.

b) Pierādiet, ka aizvietojot iepriekšējā uzdevumā skaitli 14 ar 15, uzdevumam būs vairāki atrisinājumi, bet, aizvietojot 14 ar 17, atrisinājumu vispār nebūs.

**3.35.** Pierādiet, ka no četriem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem vismaz viens nav uzrakstāms kā naturāla skaitļa pakāpe ar kāpinātāju, kurš lielāks par 1.

# 4. KONGRUENCES

**Definīcija.** Doti veseli skaitļi $a$, $b$ un naturāls skaitlis $n \geq 2$. Saka, ka skaitļi $a$ un $b$ ir kongruenti pēc moduļa $n$ un pieraksta
$a \equiv b \pmod{n}$, ja $a - b$ dalās ar $n$.

**Teorēma.** $a \equiv b \pmod{n}$ tad un tikai tad, ja $a$ un $b$ dod vienādus atlikumus, dalot ar $n$.

**Īpašības.**

1. Ja $a$, dalot ar $n$, dod atlikumā $r$, tad $a \equiv r \pmod{n}$.

2. Ja $a \equiv b \pmod{n}$ un $c \equiv d \pmod{n}$, tad
   $a + c \equiv b + d \pmod{n}$,
   $a - c \equiv b - d \pmod{n}$,
   $a c \equiv b d \pmod{n}$,
   $a^m \equiv b^m \pmod{n}$.

3. Refleksivitāte: visiem skaitļiem $a$ $a \equiv a \pmod{n}$.

4. Simetriskums: ja $a \equiv b \pmod{n}$, tad $b \equiv a \pmod{n}$.

5. Transivitāte: ja $a \equiv b \pmod{n}$ un $b \equiv c \pmod{n}$, tad $a \equiv c \pmod{n}$.

Ar šīm īpašībām pietiek, lai veiktu aprēķinus pēc jebkura konkrēta moduļa $n$, taču, lai aprēķinātu lielas skaitļu pakāpes, izmantosim šādas īpašības.

**Teorēma.** Virkne $x_n = a^n$ pēc moduļa $m$ ir periodiska.

($x$ pēc moduļa $m$ nozīmē skaitļa $x$ atlikumu, dalot ar $m$). Perioda garumu un tajā ietilpstošos skaitļus var atrast, rakstot pēc kārtas skaitļus $a^n$ pēc moduļa $m$. Tiklīdz virknē $a^n \pmod{m}$ parādās vienādi skaitļi, mēs esam atraduši periodu.

**Mazā Fermā teorēma (MFT).** Ja $p$ ir pirmskaitlis un $a$ nedalās ar $p$, tad $a^{p-1} - 1$ dalās ar $p$.

Izmantojot kongruences, šo teorēmu pieraksta šādi: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. No MFT seko, ka virknes $a^n$ periods pēc moduļa $p$ ir skaitļa $p - 1$ dalītājs. Atzīmēsim arī, ka virkne $a^n \pmod{p}$, ja $p$ ir pirmskaitlis (tas ir arī spēkā skaitlim $p$, kas ir dažādu pirmskaitļu reizinājums), ir tīri periodiska, t.i., periods sākas ar pirmo virknes locekli.

No kongruenču īpašībām seko, ka, ja $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ir patvaļīga vesela izteiksme un $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$, ... , $a_k \equiv b_k \pmod{n}$, tad $f(a_1, a_2, \ldots, a_k) \equiv f(b_1, b_2, \ldots, b_k) \pmod{n}$. Tas nozīmē, ka, veicot aprēķinus pēc moduļa n, mēs varam jebkuru skaitli izteiksmē aizvietot ar jebkuru citu tam kongruentu skaitli. Parasti skaitli a aizvieto ar a atlikumu pēc moduļa n, bet var atsevišķos gadījumos ņemt citu tam kongruentu skaitli.

# Uzdevumi

## A grupa

**4.1.** Vai ir patiesas sekojošas kongruences?
a) $4 \equiv 54 \pmod{10}$;
b) $-7 \equiv 11 \pmod{6}$;
c) $-4 \equiv 13 \pmod{9}$;
d) $8^6 \equiv 1 \pmod{9}$;
e) $11^2 \equiv 12^2 \pmod{23}$;
f) $12^3 \equiv 14^3 \pmod{13}$.

**4.2.** Nosakiet katram no dotajiem skaitļu pāriem, vai tie ir kongruenti pēc moduļa 7?
a) 1, 15;
b) 0, 42;
c) 2, 99;
d) - 1, 8;
e) - 9, 5;
f) - 1, 699.

**4.3.** Kuri no dotajiem skaitļiem ir kongruenti savā starpā pēc moduļa 9?

13, 27, 103, 201, - 5, - 13.

**4.4.** Kuri no dotajiem skaitļiem ir kongruenti savā starpā pēc moduļa 10?

7, 13, 117, - 33, 35, - 38, 8.

**4.5.** Atrodiet mazāko nenegatīvo skaitli ar kuru ir kongruents katrs no dotajiem skaitļiem pēc moduļa 13.
a) 22;
b) 100;
c) 1001;
d) - 1;
e) - 100.

**4.6.** Pēc kādiem moduļiem n ir kongruenti savā starpā skaitļi:
a) 12 un 19;
b) - 3 un 7;
c) 0 un 18 ?

**4.7.** Norādiet, kuri no dotajiem skaitļiem ir kongruenti ar skaitli 2 pēc moduļa 7:

- 5, - 2, 2, 5, 30, 100, - 9.

**4.8.** Uzrakstiet saskaitīšanas tabulu pēc moduļa 6.

**4.9.** Uzrakstiet atņemšanas tabulu pēc moduļa 6.

**4.10.** Uzrakstiet reizināšanas tabulu pēc moduļa 6.

**4.11.** Kādu atlikumu dod skaitlis A, dalot ar n?

a) $A = 10^3 \cdot 20^2 \cdot 30$, ja $n = 7$;
b) $A = 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24$, ja $n = 11$;
c) $A = 14^5 \cdot 15^4 \cdot 16^3$, ja $n = 13$.

**4.12.** Aprēķiniet pēc dotā moduļa n:
a) $1234 + 5678 + 9876 \pmod{10}$;
b) $1 + 22 + 333 + 4444 + 55555 \pmod{9}$;
c) $1995 + 1996 + 1997 \pmod{11}$;
d) $666 \cdot 777 + 888 \cdot 999 \pmod{9}$;
e) $771 \cdot 772 + 773 \cdot 774 \pmod{7}$;
f) $1000 \cdot 1001 + 1002 \cdot 1003 \pmod{12}$.

**4.13.** Aprēķiniet izteiksmes vērtību pēc dotā moduļa n.
a) $11 \cdot 12^2 \cdot 13^3 \cdot 14^4 \pmod{5}$;
b) $13 \cdot 14^2 \cdot 15^3 \pmod{11}$;
c) $100^3 \cdot 200^2 \cdot 300 \pmod{7}$.

**4.14.** Atrast virknes $2^n$ periodu pēc moduļa 10.

**4.15.** Atrast virknes $3^n$ periodu pēc moduļa 10.

**4.16.** Atrast virknes $3^n$ periodu pēc moduļa 8.

**4.17.** Atrast virknes $2^n$ periodu pēc moduļa 7.

**4.18.** Aprēķināt dotās pakāpes pēc moduļa n.
a) $5^5 \pmod{7}$;
b) $2^{23} \pmod{10}$;
c) $3^{99} \pmod{10}$;
d) $3^{101} \pmod{8}$;
e) $2^{200} \pmod{31}$;
f) $19^{96} \pmod{11}$;
g) $10^{100} \pmod{12}$;
h) $8^{88} \pmod{9}$.

## B grupa

**4.19.** Uzrakstiet virknes $a^n$ periodu pēc moduļa n:
a) $2^n$ (mod 100);
b) $3^n$ (mod 16);
c) $10^n$ (mod 19);
d) $5^n$ (mod 17).

**4.20.** Aprēķiniet dotās pakāpes pēc moduļa n:
a) $2^{333}$ (mod 10);
b) $3^{1000}$ (mod 16);
c) $10^{100}$ (mod 19);
d) $5^{555}$ (mod 17).

**4.21.** Aprēķiniet pēc moduļa n:
a) $7^{70} + 13^{130}$ (mod 10);
b) $2^{200} + 3^{300}$ (mod 12);
c) $6^{60} + 7^{70} + 8^{80}$ (mod 11).

**4.22.** Kāds ir skaitļa $19^{91} + 91^{19}$ pēdējais cipars ?

**4.23.** Kāds ir skaitļa $33^{77} + 77^{33}$ pēdējais cipars ?

**4.24.** Pierādiet, ka skaitlis $2222^{5555} + 5555^{2222}$ dalās ar 7.

**4.25.** Atrodiet skaitļu $2^{999}$ un $3^{999}$ pēdējos divus ciparus.

**4.26.** Aprēķiniet dotās pakāpes pēc moduļa n, izmantojot MFT:

a) $17^{1002}$ (mod 101);
b) $5^{641}$ (mod 17);
c) $19^{92}$ (mod 11);
d) $8^{902}$ (mod 31);
e) $4^{444}$ (mod 23);
f ) $63^{365}$ (mod 61).

**4.27.** Izmantojot MFT, pierādiet, ka
a) $3^{10000} - 1$ dalās ar 17;
b) $7^{1000} - 1$ dalās ar 11;
c) $10^{30} - 1$ dalās ar 77;
d) $12^{120} - 1$ dalās ar 91;
e) $9^{90} - 1$ dalās ar 341.

**4.28.** Aprēķiniet izteiksmi 1! + 2! + 3! + ... + 100! pēc moduļiem a) 2, b) 7, c) 12, d) 25.

## C grupa

**4.29.** Aprēķināt:

a) $5^{5^5}$ (mod 13);

b) $5^{5^5}$ (mod 7);

c) $7^{7^7}$ (mod 10);

d) $6^{6^6}$ (mod 10);

e) $13^{14^{15}}$ (mod 11);

f ) $31^{42^{53}}$ (mod 11);

g) $10^{10^{10}}$ (mod 19).

**4.30.** Aprēķināt izteiksmi $3^{4^5}+6^{7^8}+9^{10^{11}}$ pēc moduļa 13.

**4.31.** Pierādiet, ka skaitlis $122^{132}$ - 1 dalās ar 451.

**4.32.** Pierādiet, ka skaitlis $246^{133^{77}}+77^{246^{133}}+133^{77^{246}}$ dalās ar 190.

**4.33.** Izmantojot MFT, pierādiet, ka

a) $3^{1974} + 5^{1974}$ dalās ar 13;

b) $2^{70} + 3^{70}$ dalās ar 13;

c) $11^{1977} + 1$ dalās ar 37.

**4.34.** Pierādiet, ka skaitlis $29^{10k+1} + 30^{10k+3} + 31^{10k+1}$ dalās ar 165 visām naturālām k vērtībām.

**4.35.** Pierādiet, ka jebkuram naturālam k skaitlis $2^{2^{6k+2}}+3$ dalās ar 19.

**4.36.** Pierādiet, ka skaitlis $5^{3^{4m}}-2^{2^{4k+2}}$ dalās ar 11 jebkurām naturālām k un m vērtībām.

**4.37.** Pierādiet, ka Fibonači virknes ($u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$, ja n > 1) loceklis $u_{5k}$ dalās ar 5 visām naturālām k vērtībām.

**4.38.** Pierādiet, ka skaitlis $20^{15} - 1$ dalās ar $11 \cdot 31 \cdot 61$.

**4.39.** Pierādiet, ka skaitlis $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ dalās ar 8 visiem naturāliem n.

**4.40.** Pierādiet, ka jebkuram naturālam $n$ skaitlis $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ dalās ar 84.

**4.41.** Pierādiet, izmantojot matemātisko indukciju, ka visiem naturāliem skaitļiem $n$ izpildās sekojošas kongruences:

a) $4^n \equiv 1 + 3n \pmod 9$,

b) $5^n \equiv 1 + 4n \pmod{16}$.

**4.42.** Aprēķiniet
a) $6! \pmod 7$;
b) $10! \pmod{11}$;
c) $12! \pmod{13}$;
d) $16! \pmod{17}$.
Kādu hipotēzi varat izteikt no iegūtajiem rezultātiem ?

## 5. Kongruenču klases pēc moduļa

Kongruences pēc moduļa n sadala visus skaitļus n klasēs. Katrā klasē ietilpst skaitļi, kas dod vienādus atlikumus pēc moduļa n. Katru šādu klasi var aprakstīt šādi: $\{qn + r \mid q \in Z\}$, r - fiksēts skaitlis no kopas $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$. Tā, piemēram, pēc moduļa 3 visi skaitļi ir sadalīti trīs kongruences klasēs: 3Z (skaitļi, kuri, dalot ar 3, dod atlikumā 0), 3Z+1 (skaitļi, kuri, dalot ar 3, dod atlikumā 1), 3Z+2 (skaitļi, kuri, dalot ar 3, dod atlikumā 2). Var teikt arī, ka pēc moduļa 3 naturāls skaitlis var pieņemt 3 vērtības 0, 1, 2. Pierakstīsim to šādi $n \in \{0, 1, 2\} \pmod 3$.

Izmantojot to, ka klašu skaits pēc jebkura moduļa ir galīgs, mēs varam īpašību, kas jāpierāda visiem veseliem skaitļiem, pierādīt katras kongruences klases skaitļiem atsevišķi.

# Uzdevumi

## A grupa

**5.1.** Kādu atlikumus var dot vesela skaitļa kvadrāts dalot ar n? $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

**5.2.** Kādas vērtības var pieņemt vesela skaitļa kubs pēc moduļa n? $n = 3, 4, 5, 6, 7, 9, 13$.

**5.3.** Pierādiet, ka $n^2 + 1$ nedalās ar 3 nekādiem veseliem skaitļiem n.

**5.4.** Pierādiet, ka $n^3 + 3$ nedalās ar 7 nekādiem veseliem skaitļiem n.

**5.5.** Pierādiet, ka $n^3 + 2$ nedalās ar 9 nekādiem veseliem skaitļiem n.

**5.6.** Pierādiet, ka $n^2 + 4$ nedalās ar 7 nekādiem veseliem skaitļiem n.

**5.7.** Pierādiet, ka $n^2 + 2n + 3$ nedalās ar 5 nekādiem veseliem skaitļiem n.

**5.8.** Pierādiet, ka $n^2 - 4n + 6$ nedalās ar 13 nekādiem veseliem skaitļiem n.

**5.9.** Pierādiet, ka $n^2 + 7n + 4$ nedalās ar 5 nekādiem veseliem skaitļiem n.

**5.10.** Pierādiet, ka $n^2 + 5n +3$ nedalās ar 7 nekādiem veseliem skaitļiem n.

**5.11.** Pierādiet, ka $n^5 + 4n$ dalās ar 5 visiem veseliem skaitļiem n.

**5.12.** Pierādiet, ka $a^4 - 1$ dalās ar 5, ja a nedalās ar 5.

**5.13.** Pierādiet, ka visiem veseliem skaitļiem n skaitlis $n^3 - n$ dalās ar 6.

**5.14.** Pierādiet, ka $n^3 + 2n$ dalās ar 3 visiem veseliem skaitļiem n.

**5.15.** Pierādiet, ka $n^7 + 6n$ dalās ar 7 visiem veseliem skaitļiem n.

## B grupa

**5.16.** Pierādiet, ka $n^3 - n$ dalās ar 24 visiem nepāra skaitļiem n.

**5.17.** Dots, ka $a + b + c$ dalās ar 6. Pierādiet, ka $a^3+ b^3+ c^3$ arī dalās ar 6.

**5.18.** Pierādiet, ka visiem skaitļiem a, kuriem $(a, 12) = 1$, $a^2 - 1$ dalās ar 12.

**5.19.** Dots, ka $a^2 + b^2$ dalās ar 3. Pierādiet, ka a un b dalās ar 3.

**5.20.** Dots, ka $a^2 + b^2$ dalās ar 7. Pierādiet, ka a un b dalās ar 7.

**5.21.** Dots, ka $a^2 + b^2$ dalās ar 21. Pierādiet, ka $a^2 + b^2$ dalās ar 441.

**5.22.** Doti naturāli skaitļi x, y, z, kuriem izpildās vienādība $x^2 + y^2 = z^2$. Pierādiet, ka vismaz viens no šiem skaitļiem dalās ar 3.

**5.23.** Pierādiet, ka visiem naturāliem n
a) $n(2n + 1)(n+1)$ dalās ar 6,
b) $n^2 (n^2 - 1)$ dalās ar 4,
c) $n(n^6 -1)$ dalās ar 7,
d) $n^5 - n$ dalās ar 30,
e) $n^5 - 5n^3 + 4n$ dalās ar 120.

**5.24.** Pierādiet, ka trīs naturālu skaitļu kvadrātu summa, pamazināta par 7, nedalās ar 8.

## C grupa

**5.25.** Pierādiet, ka $p^2 - 1$ dalās ar 24, ja p ir pirmskaitlis un $p > 3$.

**5.26.** Pierādiet, ka $p^2 - q^2$ dalās ar 24, ja p un q ir pirmskaitļi, kas lielāki par 3.

**5.27.** Pierādiet, ka pirmo n naturālo skaitļu summas pēdējais cipars nevar būt 2, 4, 7 vai 9.

**5.28.** Pierādiet, ka skaitļus, kuri uzrakstāmi formā $8k + 3$ vai $8k + 5$, nevar izteikt formā $x^2 - 2y^2$ ar veseliem skaitļiem x un y.

**5.29.** Pierādiet, ka eksistē bezgalīgi daudz tādu veselu skaitļu n, kuriem $n^2 + 1$ dalās gan ar 5, gan 13.

**5.30.** Pierādiet, ka skaitlis $a^2 + b^2 + c^2$ nav vesela skaitļa kvadrāts, ja a, b, c ir nepāra skaitļi.

**5.31.** Pierādiet, ka neeksistē tādi naturāli skaitļi a un b, kuriem $a^2 - 3b^2 = 8$.

## D grupa

**5.32.** Trīs naturālu skaitļu kvadrātu summa dalās ar 9. Pierādiet, ka no šiem kvadrātiem var izvēlēties divus, kuru starpība dalās ar 9.

**5.33.** Vai skaitlis, kura ciparu summa ir 1994, var būt vesela skaitļa kvadrāts?

**5.34.** Atrodiet visus tādus pirmskaitļus p, kuriem skaitļi $p + 10$ un $p + 14$ arī ir pirmskaitļi.

**5.35.** Vai skaitlis $4p + 1$ var būt pirmskaitlis, ja skaitļi p un $2p+1$ ir pirmskaitļi un $p > 3$.

**5.36.** Atrodiet skaitli p, ja zināms, ka p un $8p^2 + 1$ ir pirmskaitļi.

**5.37.** Atrodiet visus naturālos skaitļus n, kuriem $n\ 2^n + 1$ dalās ar 3.

**5.38.** p un $p^2 + 2$ ir pirmskaitļi. Pierādiet, ka $p^3 + 2$ arī ir pirmskaitlis.

**5.39.** p, $4p^2 + 1$ un $6p^2 + 1$ ir pirmskaitļi. Atrodiet p.

**5.40.** Pierādiet, ka $a^3 + b^3 + 4$ nav vesela skaitļa kubs.

**5.41.** Pierādiet, ka $6n^3 + 3$ nav vesela skaitļa sestā pakāpe.

**5.42.** Doti tādi naturāli skaitļi x, y, z, kuriem $x^2 + y^2 = z^2$. Pierādiet, ka x y dalās ar 12.

# 6. Kongruenču vienādojumi

Kongruenci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{m}$, kur f - polinoms ar veseliem koeficientiem, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - mainīgie, sauc par kongruenču vienādojumu. Kongruenču vienādojuma atrisinājums ir skaitļu kortežs $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, kurus ievietojot mainīgo vietās vienādojumā, iegūstam patiesu kongruenci.

Ja $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ir kongruences atrisinājums un $d_1 \equiv c_1 (\mathrm{mod}\ m)$, $d_2 \equiv c_2 (\mathrm{mod}\ m)$, ... , $d_n \equiv c_n (\mathrm{mod}\ m)$, tad arī $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ ir dotās kongruences atrisinājums. Tas nozīmē, ka, norādot vienu atrisinājumu, mēs faktiski iegūstam veselu atrisinājumu sēriju, kurā jebkuru $c_i$ var aizvietot ar tam kongruentu skaitli. Tāpēc mēs no visas šīs sērijas izvēlamies tikai vienu kortēžu $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, kur $0 \le c_i < m$ , un atrisinājumu pierakstām $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \pmod{m}$. Tā kā dažādo kortēžu skaits pēc moduļa m ir galīgs - $m^n$, tad principā jebkuru kongruenču vienādojumu var atrisināt ar pārbaudes metodi. Taču lieliem moduļiem m tas praktiski nav iespējams. Tāpēc aplūkosim arī citas risināšanas metodes, ar kurām varēsim praktiski iepazīties, lasot uzdevumu atrisinājumus.

**1. Lineāro kongruenču atrisināšanas metode.**

Dota lineāra kongruence $ax \equiv b \pmod{m}$. Apzīmēsim $(a, m) = d$.
Ja $d = 1$, tad kongruencei eksistē vienīgais atrisinājums.
Ja $d \mid b$, tad kongruencei nav atrisinājuma.
Ja $d \mid b$, tad kongruencei ir tieši d atrisinājumi.
Kongruenču atrisināšanā bieži tiek izmantota ķīniešu teorēma.

**Ķīniešu teorēma**. Ja $x \equiv a_1 \pmod{m_1}$, $x \equiv a_2 \pmod{m_2}$ un

$(m_1, m_2) = 1$, tad eksistē vienīgais skaitlis a $0 \le a < m_1 m_2$,

ka $x \equiv a \pmod{m_1 m_2}$.

**2. Kongruences $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ atrisināšana ar pacelšanas metodi.**

Tās būtība ir šāda. No sākuma ar pārlases metodi atrisina kongruenci $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$. Pēc tam katru no šiem atrisinājumiem paceļ, pakāpeniski risinot kongruences pēc moduļiem $p^2, p^3, \ldots, p^k$.

**3. Kongruences $f(x) \equiv 0 \pmod{p_1^k \; p_2^k \; \ldots \; p_s^k}$ atrisināšana.** Vispirms atrisina s kongruences $f(x) \equiv 0 \pmod{p_1^k}$, $f(x) \equiv 0 \pmod{p_2^k}$, ... , $f(x) \equiv 0 \pmod{p_s^k}$. Pēc tam šos atrisinājumus apvieno, izmantojot ķīniešu teorēmu.

# Uzdevumi.

## A grupa

Uzdevumos 6.1. - 6.17. ir jārisina kongruenču vienādojumi, izmantojot pārlases metodi.

**6.1.** $3x \equiv 2 \pmod{5}$.

**6.2.** $5x \equiv 1 \pmod{7}$.

**6.3.** $4x \equiv 2 \pmod{6}$.

**6.4.** $9x \equiv 6 \pmod{12}$.

**6.5.** $8x \equiv 3 \pmod{11}$.

**6.6.** $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

**6.7.** $x^2 \equiv 3 \pmod{5}$.

**6.8.** $3x^2 + 2x + 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

**6.9.** $2x^2 + 5x + 2 \equiv 0 \pmod{6}$.

**6.10.** $x^3 + x + 2 \equiv 2 \pmod{7}$.

**6.11.** $2x^3 - 3 \equiv 0 \pmod{5}$.

**6.12.** $x^5 + x + 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

**6.13.** $x^3 \equiv 1 \pmod{7}$.

**6.14.** $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{3}$.

**6.15.** $x^2 + 2y^2 \equiv 2 \pmod{4}$.

**6.16.** $x^3 + y^3 \equiv 1 \pmod{7}$.

**6.17.** $x^3 + y^3 \equiv 2 \pmod{5}$.

## B grupa

Uzdevumos 6.18. - 6.26. ir jārisina lineārās kongruences, pazeminot kongruences moduli.

**6.18.** $17x \equiv 11 \pmod{25}$.

**6.19.** $13x \equiv 3 \pmod{30}$.

**6.20.** $16x \equiv 14 \pmod{40}$.

**6.21.** $26x \equiv 14 \pmod{42}$.

**6.22.** $24x \equiv 16 \pmod{27}$.

**6.23.** $30x \equiv 1 \pmod{59}$.

**6.24.** $46x \equiv 12 \pmod{58}$.

**6.25.** $111x \equiv 10 \pmod{120}$.

**6.26.** $19x \equiv 5 \pmod{45}$.

Uzdevumos 6.27. - 6.32. jāatrod $x \pmod{m_1 m_2}$, ja dots
$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$ un $x \equiv a_2 \pmod{m_2}$.

**6.27.** $x \equiv 4 \pmod{5}$ $\quad x \equiv 1 \pmod{2}$.

**6.28.** $x \equiv 3 \pmod{6}$ $\quad x \equiv 4 \pmod{5}$.

**6.29.** $x \equiv 7 \pmod{11}$ $\quad x \equiv 2 \pmod{7}$.

**6.30.** $x \equiv 1 \pmod{8}$ $\quad x \equiv 5 \pmod{27}$.

**6.31.** $x \equiv 2 \pmod{10}$ $\quad x \equiv 5 \pmod{11}$.

**6.32.** $x \equiv 5 \pmod{9}$ $x \equiv 2 \pmod{16}$.

## C grupa

Uzdevumos 6.33. - 6.42. atrisināt kongruenci pēc moduļa $p^k$ ar pacelšanas metodi.

**6.33.** $x^3 \equiv 6 \pmod{25}$.

**6.34.** $x^2 \equiv 5 \pmod{27}$.

**6.35.** $x^2 \equiv 7 \pmod{27}$.

**6.36.** $x^2 \equiv 13 \pmod{125}$.

**6.37.** $x^3 \equiv 4 \pmod{27}$.

**6.38.** $x^3 \equiv 22 \pmod{125}$.

**6.39.** $x^3 \equiv 9 \pmod{49}$.

**6.40.** $x^3 \equiv 13 \pmod{49}$.

**6.41.** $7x^4 + 19x + 25 \equiv 0 \pmod{27}$.

**6.42.** $x^3 + 2x + 2 \equiv 0 \pmod{125}$.

Uzdevumos 6.43. - 6.47. atrisināt kongruenci pēc salikta moduļa, sadalot to reizinātājos un lietojot ķīniešu teorēmu.

**6.43.** $x^2 \equiv 1 \pmod{40}$.

**6.44.** $x^3 \equiv 10 \pmod{55}$.

**6.45.** $x^3 \equiv 15 \pmod{35}$.

**6.46.** $6x^3 + 27x^2 + 17x + 20 \equiv 0 \pmod{30}$.

**6.47.** $31x^4 + 57x^3 + 96x + 191 \equiv 0 \pmod{225}$.

# Atrisinājumi

**1.1.** $5|a$, tātad $5|a^2$ (īpašība D2); $5|b$, tātad $5|7b$ (īpašība D2). No īpašības D1 seko, ka $5|(a^2 + 7b)$.

**1.2.** $7|a$, tātad $7|a^2$ un $7|3a$ (īpašība D2); $7|7b$ un $7|21$. No īpašības D3 seko, ka $7|(a^2 + 3a + 7b - 21)$.

**1.3.** $b = (5a + b) - 5a$. Tā kā $n|(5a + b)$ un $n|5a$ (jo $n|a$), tad n ir šo skaitļu starpības dalītājs, t.i., $n|b$.

**1.4.** Izteiksmi $a^2 + a - b^2 - b$ var sadalīt reizinātājos $(a - b)(a + b + 1)$. Tā kā $n|(a - b)$, tad no īpašības D2 seko, ka $n|(a^2 + a - b^2 - b)$.

**1.5.** No īpašības D3 seko, ka $n|5b = (12a +5b) - 4 \cdot 3a$. Tātad n dala arī 10b (īpašība D2).

**1.6.** No īpašības D5 seko, ka $5 \cdot 7 = 35 \mid (a - b)(a +b) = a^2 - b^2$.

**1.7.** No tā, ka $b|c$ un $c|a$ seko, ka $b|a$ (īpašība D4). Tā kā $a|b$ un $b|a$, tad $a = b$ (īpašība D6). Līdzīgi pierāda, ka $b = c$.

**1.8.** Apgalvojums seko no vienādības $a^2 + a - 2 = (a -1)(a + 2)$ un īpašības D5.

**1.9.** Visi no dotajiem skaitļiem ir mazāki par $13^2 = 169$. Tātad, lai noskaidrotu, vai dotie skaitļi ir pirmskaitļi, jāpārbauda to dalāmība ar pirmskaitļiem, kuri ir mazāki par 13. Tie ir 2, 3, 5, 7 un 11. Pārbaudot redzam, ka pirmskaitļi ir skaitļi 101, 141, 163.

**1.10.** Tā kā $\sqrt{120} < 11$, tad pietiek pārbaudīt dalāmību ar pirmskaitļiem, kas ir mazāki par 11. Tie ir 2, 3, 5 un 7. Uzrakstīsim visus dotos skaitļus pēc kārtas un pasvītrosim visus, kas dalās ar 2, 3, 5 un 7.
100 101 102 103 104 105 106 107 108 109
110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120.
Nepasvītrotie skaitļi 101, 103, 107, 109, 113 ir pirmskaitļi.

**1.11.** Dotajā intervālā pirmskaitļi ir skaitļi 181, 191, 193, 197 un 199.

**1.12.** Zināms, ka $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$. Tātad, ja $n - 1 > 1$, tad $n^2 -1$ nav pirmskaitlis, jo $n -1$ ir tā dalītājs, turklāt $n -1 \neq 1$ un $n-1 \neq n^2 -1$. Atliek pārbaudīt n vērtības $n = 1$ un $n = 2$. Ja $n =1$, tad $n^2 - 1 = 0$ nav pirmskaitlis. Ja $n = 2$, tad $n^2 - 1 = 3$ ir pirmskaitlis.

**1.13.** No pirmskaitļu 2. īpašības seko, ka $5|12$ vai $5|a$. Tā kā 12 nedalās ar 5, tad $5|a$.

**1.14.** No īpašības D3 seko, ka $7|(2a + 3b) - 2a = 3b$. No pirmskaitļu 2. īpašības seko, ka $7|b$.

**1.15.** No pirmskaitļu 2. īpašības seko, ka $5|b$ un $7|a$. Tātad $35|ab$ (īpašība D5).

**1.16.** Pareizinot $5a + 3b$ ar 2 un $3a + 2b$ ar 3 un atņemot otro izteiksmi no pirmās, iegūsim: $2 (5a + 3b) - 3 (3a + 2b) = a$. Tā kā $n|(5a + 3b)$ un $n|(3a + 2b)$, tad $n|a$ (īpašība D3). Izmantojot vienādību $b = 5 (3a + 2b) - 3 (5a + 3b)$, pierāda, ka $n|b$.

**1.17.** Seko no tā, ka $a = 5 (3a + 7b) - 7 (2a + 5b)$ un
$b = 3 (2a + 5b) - 2 (3a + 7b)$.

**1.18.** $5|a$, jo $a = 3 (3a + 4b) - 4 (2a + 3b)$.
$5|b$, jo $b = 3 (2a + 3b) - 2 (3a + 4b)$.
No īpašības D5 seko, ka $25|ab$.

**1.19.** Viens no skaitļiem $n$ vai $n + 1$ ir pāra skaitlis, tāpēc $n^2 + n = n (n + 1)$ dalās ar 2. Tātad $2|(n^2 + n + 6)$.

**1.20.** Seko no tā, ka $a^3 + a^2 - b^3 - b^2 = (a^3 - b^3) + (a^2 - b^2) =$
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a - b)(a + b)$.

**1.21.** Seko no tā, ka $a^3 + 2a + 8b^3 + 4b = (a^3 + 8b^3) + 2(a + 2b) =$
$(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2) + 2(a + 2b)$.

**1.22.** Jā, ir saīsināma. Ja $n|a$ un $n|b$, tad $n|(a - b)$ un $n|(a + b)$. Apgrieztais apgalvojums neizpildās, jo, ņemot, piemēram, $a = 5$ un $b = 3$, redzam, ka daļa $5/3$ nav saīsināma, bet daļa $(5 - 3) / (5 + 3)$ ir saīsināma.

**1.23.** $11|x$, jo $x = 5 (3x + 7y) - 7 (2x + 5y)$ un $11|y$, jo $y = 3 (2x + 5y) - 2 (3x + 7y)$. Tātad $11^2 |x^2$, $11^2 |y^2$, un $121|( x^2 + y^2)$.

**1.24.** No $a|(a + b)$ seko, ka $a|b$. Līdzīgi iegūstam, ka $b|a$. No īpašības D6 seko, ka $a = b$.

**1.25.** No īpašības D5 seko, ka $6|(a - 1)(a + 1) = a^2 - 1$. Tātad

$6|(a^2 + 5)$, jo $a^2 + 5 = (a^2 - 1) + 6$.

**1.26.** No tā, ka $6|(a - b)$ seko, ka $6|(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$. No īpašības D1 seko, ka $6|(a^2 - b^2 + 6b^2) = a^2 + 5b^2$. Tā kā $3|6$, tad arī $3|(a^2 + 5b^2)$.

**1.27.** Zināms, ka $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$. Tātad, ja $n - 1 > 1$, tad $n^3 -1$ nav pirmskaitlis, jo $n -1$ ir tā dalītājs, turklāt $n -1 \neq 1$ un $n -1 \neq n^3 -1$. Atliek pārbaudīt $n$ vērtības $n = 1$ un $n = 2$. Ja $n =1$, tad $n^3 - 1 = 0$ nav pirmskaitlis. Ja $n = 2$, tad $n^3 - 1 = 7$ ir pirmskaitlis.

**1.28.** Skaitlis $n^2 + 5n + 6 = (n + 2)(n + 3)$ nav pirmskaitlis nevienai n vērtībai, jo tas sadalās reizinātājos, kuri ir lielāki par 1.

**1.29.** Izteiksmi $ab + a + b + 1$ sadalām reizinātājos $(a +1)(b +1)$. Tātad šis skaitlis nav pirmskaitlis nekādām a un b vērtībām, jo abi reizinātāji ir lielāki par 1.

**1.30.** $12|xy$, jo $4|x$ un $3|y$ (īpašība D5); $12|8y$, jo $4|8$ un $3|y$; $12|9x$, jo $3|9$ un $4|x$. Tātad 12 dala arī šo skaitļu summu $xy + 8y + 9x$.

**1.31.** No uzdevuma nosacījumiem seko, ka skaitlis $4(a + 4b) - (4a +b) = 15b$ dalās ar 11. No pirmskaitļu 2. īpašības izriet, ka $11|b$. Līdzīgi pierāda, ka $11|a$.

**1.32.** $7|(3(a + 3b) - (3a + b)) = 8b$. Tātad, $7|b$. Līdzīgi pierāda, ka $7|a$. No īpašības D5 seko, ka $49|ab$.

**1.33.** No dotā seko, ka $7|4(2a +3b) = 8a + 12b$. Tātad arī skaitlis $a + 5b = 8a + 12b - 7(a + b)$ dalās ar 7.

**1.34.** No dotā seko, ka $13|10(a +4b) = 10a + 40b$. Tātad arī skaitlis $10a + b = (10a + 40b) - 39b$ dalās ar 13.

**1.35.** No dotā seko, ka $11|5(3a +7b) = 15a + 35b$. Tātad arī skaitlis $4a + 2b = 15a + 35b - 11(a + 3b)$ dalās ar 11.

**1.36.** Ja $17|(4a +5b)$, tad arī skaitlis $6(4a +5b) = 24a + 30b$ dalās ar 17. Tas nozīmē, ka skaitlis $7a - 4b = 24a + 30b - 17(a + 2b)$ dalās ar 17. Līdzīgi pierāda apgriezto apgalvojumu.

**1.37.** Nav tādu n un m vērtību.

**1.38.** Uzdevuma nosacījumus apmierina, piemēram, skaitlis $12! +2$. Tiešām, ja $1 < k < 13$, tad $12! + k$ ir salikts skaitlis, jo k ir šā skaitļa dalītājs.

**1.39.** Dots, ka skaitlis $u^2 + uv + v^2 = (u -v)^2 + 3uv$ dalās ar 9. No šejienes seko, ka $(u - v)^2$ dalās ar 3, $3|(u - v)$, un $9|(u - v)^2$. Tādā gadījumā $9|3uv$, un $3|uv$. Redzam, ka vismaz viens no skaitļiem u un v dalās ar 3, bet, ņemot vērā, ka skaitļu u un v starpība arī dalās ar 3, iegūstam, ka abi skaitļi dalās ar 3.

**1.40.** Nē, nevar būt. Pieņemsim pretējo, ka

$$1/p_1 + 1/p_2 + ... + 1/p_n = m.$$

Pareizinot vienādību ar skaitli $p_1 p_2 ... p_{n-1}$ , iegūsim vienādību

$$p_2 p_3 ... p_{n-1} + p_1 p_3 ... p_{n-1} + ... + (p_1 p_2 ... p_{n-1})/p_n = p_1 p_2 ... p_{n-1} m.$$

Redzam, ka skaitlim $p_1 p_2 \ldots p_{n-1}$ jādalās ar $p_n$ , taču tas nav iespējams, jo visi $p_i$ ir dažādi pirmskaitļi. Iegūtā pretruna pierāda, ka pieņēmums bija nepareizs.

**1.41.** Pieņemsim, ka $1/x - 1/y = 1/n$. Tad $x < n$ un $n \neq 1$. Apzīmēsim $x = n - k$ $(0 < k < n)$. Ievietojot dotajā vienādībā, iegūsim

$$1/(n - k) - 1/n = 1/y, \quad \text{jeb} \quad y = n(n - k)/k.$$

Skaidrs, ka vienmēr eksistē viens atrisinājums $k = 1$, $x = n - 1$, $y = n(n - 1)$. Tam atbilst identitāte

$$1/(n -1) - 1/n(n -1) = 1/n.$$

Ja $n$ ir pirmskaitlis, tad $(n, k) =1$, un no tā, ka $k \mid n(n - k)$ seko, ka $k|(n - k)$ un $k|n$. Tātad, $k = 1$, un šajā gadījumā citu atrisinājumu nav. Ja $n$ nav pirmskaitlis, t.i. $n = ab$, tad varam uzrakstīt vēl citu atrisinājumu $k = a$, $x = n - a$, $y = (n - a)b$, kuram atbilst identitāte

$$1/(ab -a) - 1/(ab - a)b = 1/ab.$$

**1.42.** Uzdevuma nosacījumus pierakstām šādi:

$1 + 2 + \ldots + n = \overline{kkk}$, jeb $n(n + 1)/2 = 111\,k = 3 \cdot 37\,k$ , $0 < k <10$.

Viens no skaitļiem $n$ vai $n + 1$ dalās ar 37, bet tā kā $73 \cdot 74/2 > 999$, tad $n = 37$ vai $n + 1 = 37$. Ja $n = 37$, tad $n + 1 = 38$, un šo skaitļu reizinājums nedalās ar 3. Atliek vērtība $n = 36$. Šajā gadījumā iegūstam prasīto vienādību $1 + 2 + \ldots + 36 = 666$.

**1.43.** Nē, tādas ģeometriskas progresijas neeksistē. Aplūkosim galīgu skaitu ģeometrisko progresiju

$$\{a_1q_1^k\} , \{a_2q_2^k\} , \ldots , \{a_nq_n^k\} , k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

un ņemsim visu skaitļu $a_1, a_2, \ldots , a_n, q_1, q_2, \ldots , q_n$ visus pirmreizinātājus. To ir galīgs skaits, bet pirmskaitļu skaits ir bezgalīgs. Tāpēc var izvēlēties tādu pirmskaitli $p$, kurš nepieder norādītajai pirmreizinātāju kopai. Šis skaitlis nepiederēs nevienai no dotajām ģeometriskajām progresijām.

**1.44.** Tā kā $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9(a -b)$ dalās ar 9, tad iegūtais kvadrāts varēja būt 9, 36 vai 81. No šejienes seko, ka $a - b$ vienāds ar 1, 4, vai 9. Tātad uzdevuma nosacījumus apmierina skaitļi 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 51, 62, 73, 84, 95.

**2.1.** a) $1996 = 11 \cdot 181 + 5$; 181 ir nepilnais dalījums, 5 ir atlikums.
b) $200 = 10 \cdot 20 + 0$;
c) $15 = 1 \cdot 15 + 0$;

d) $0 = 5 \cdot 0 + 0$;
e) $-17 = 3 \cdot (-6) + 1$;
f ) $3 = 12 \cdot 0 + 3$;
g) $-3 = 12 \cdot (-1) + 9$;
h) $-18 = 3 \cdot (-6) + 0$;
i ) $-111 = 7 \cdot (-16) + 1$.

**2.2.** a)

$33 = 18 \cdot 1 + 15$
$18 = 15 \cdot 1 + 3$
$15 = 3 \cdot 5$
Tātad, $(33, 18) = 3$.
b)
$1260 = 406 \cdot 3 + 42$
$406 = 42 \cdot 9 + 28$
$42 = 28 \cdot 1 + 14$
$28 = 14 \cdot 2$
$(1260, 406) = 14$.
c)
$56 = 39 \cdot 1 + 17$
$39 = 17 \cdot 2 + 5$
$17 = 5 \cdot 3 + 2$
$5 = 2 \cdot 2 + 1$
$2 = 1 \cdot 2$
$(56, 39) = 1$.
d)
$312 = 138 \cdot 2 + 36$
$138 = 36 \cdot 3 + 30$
$36 = 30 \cdot 1 + 6$
$30 = 6 \cdot 5$
$(312, 138) = 6$.

**2.3.** a) $(30, 18) = 6$, $[30,18] = \frac{30 \cdot 18}{6} = 90$.

b) $(55, 25) = 5$, $[55, 25] = \frac{55 \cdot 25}{5} = 275$.

c) $(143, 91) = 13$, $[143, 91] = \frac{143 \cdot 91}{13} = 1001$.

d) $(200, 150) = 50$, $[200, 150] = \dfrac{200 \cdot 150}{50} = 600$.

**2.4.** Atbildes: a) 13 / 8; b) 15 / 4; c) 34 / 29; d) 71 / 101.

**2.5.** a)
$15 = 9 \cdot 1 + 6$
$9 = 6 \cdot 1 + 3$
$6 = 3 \cdot 2$
$(15, 9) = 3$.
Pārrakstām šādā formā:
$a_1 = a_2 \cdot 1 + a_3$
$a_2 = a_3 \cdot 1 + a_4$
$a_3 = a_4 \cdot 2$.
$(a_1, a_2) = a_4 = a_2 - a_3 = a_2 - (a_1 - a_2) = - a_1 + 2 a_2$.
Tātad $(15, 9) = 3 = (-1) \cdot 15 + 2 \cdot 9$;
b) $(187, 68) = 17 = (-1) \cdot 187 + 3 \cdot 68$;
c) $(200, 325) = 25 = 5 \cdot 200 - 3 \cdot 325$;
d) $(200, 40) = 40 = 0 \cdot 200 + 1 \cdot 40$.

**2.6.** $2a = (a - b) + (a + b)$ dalās ar 5. Tā kā $(2, 5) = 1$, tad a dalās ar 5. Līdzīgi pierāda, ka b dalās ar 5.

**2.7.** Tādu skaitļu pavisam ir $[999 / 11] = 90$.

**2.8.** $a = 13 \cdot 17 + r$, $0 \le r < 13$. Tātad lielākā iespējamā a vērtība ir $a = 13 \cdot 17 + 12 = 233$.

**2.9.** $x = 7 \cdot 11 + r$, $0 \le r < 7$. Tātad x var pieņemt vērtības 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83.

**2.10.** $a = 12 q + 7 = 6 (2q + 1) + 1$. Skaitli a dalot ar 6, atlikumā iegūsim 1.

**2.11.** $a = 18 q + 12 = 3 (6 q + 4) + 0$. Skaitli a dalot ar 3, atlikumā iegūsim 0.

**2.12.** a) $(a, b + 5a) = (a, b + 5a - 5a) = (a, b) = 6$;
b) Izmantojot LKD 1.īpaųību, pārveidojam izteiksmes tā, lai samazinātos koeficients pie b, līdz tas kļūs vienāds ar 0.
$(8a + 3b, 5a + 2b) = (8a + 3b - (5a + 2b), 5a + 2b) = (3a + b, 5a + 2b) = (3a + b, 5a + 2b - 2(3a + b)) = (3a + b, -a) = (3a + b - 3a, -a) = (b, -a) = (b, - a) = (b, a) = 6$.
Rēķinot LKD, neņem vērā skaitļa zīmi.
c) $(4a, 4b) = 4 (a, b) = 24$ (īpašība L2).
d) Apzīmēsim $(a, 2b) = x$.

Skaidrs, ka $(a, b) \mid (a, 2b)$ un $(a, 2b) \mid (2a, 2b) = 2(a, b)$; t.i. $6|x$ un $x|12$. Tātad $x = 6$ vai $x = 12$. Parādīsim, ka ir iespējamas abas atbildes:
ja $a = 6$, $b = 18$, tad $(a, b) = 6$ un $(a, 2b) = 6$;
ja $a = 12$, $b = 6$, tad $(a, b) = 6$ un $(a, 2b) = 12$.
e) Apzīmēsim $(5a, 2b) = x$; pastāv šādas sakarības:
$(a, b) \mid (5a, 2b)$ un $(5a, 2b) \mid (10a, 10b) = 10 (a, b)$, jeb $6|x$ un $x|60$. Tātad x var pieņemt vērtības 6, 12, 30, 60. (Ar piemēriem jāparāda, ka tādas vērtības tiešām realizējas).
f) $(4a + 6b, 6a + 8b) = (4a + 6b, (6a + 8b) - (4a + 6b)) = (4a + 6b, 2a + 2b) = (4a + 6b - 2(2a + 2b), 2a + 2b) = (2b, 2a + 2b) = (2b, 2a) = 2(b, a) = 12$.

**2.13.** Atbildes: a) 10; b) 10; c) 10; 20; d) 30; e)10; 20; 30; 60; f) 10; 20; g) 20; h) 10; 20; 30; 60.

**2.14.** Sadalām izteiksmi reizinātājos:
$A = n^3 + 3n^2 + 2n = n(n + 1)(n + 2)$.
a) Šī izteiksme dalās ar 2, jo viens no skaitļiem $n$, $n + 1$ ir pāra skaitlis,
b) šī izteiksme dalās ar 3, jo no trim pēc kārtas ņemtiem skaitļiem $n$, $n + 1$, $n + 2$ viens dalās ar 3, un to reizinājums dalās ar 3.
Tātad A dalās ar 2 un A dalās ar 3. Tā kā $(2, 3) = 1$, tad A dalās ar $2 \cdot 3 = 6$ (īpašība L5).

**2.15.** Diferences d lielākā vērtība var būt 8. Tiešām $d \mid 113 - 41 = 72$ un $d \mid 193 - 113 = 80$, un $d \mid (72, 80) = 8$. Tātad lielākā iespējamā d vērtība var būt 8. Šāda vērtība ir iespējama, jo dotie skaitļi pieder aritmētiskai progresijai $a_n = 8n + 1$ ar diferenci 8.

**2.16.** $11a = 5(4a + 3b) - 3(3a + 5b)$ dalās ar 10 (īpašība D3). Tā kā $(10, 11) = 1$, tad $10 \mid a$ (īpašība L5). $3(4a +3b) - 4(3a + 5b) = - 11b$ dalās ar 10. Tātad arī b dalās ar 10.

**2.17.** Pierāda, ka šis reizinājums dalās ar 2 un ar 3.

**2.18.** $2(3a - 8b) - 3(2a - 3b) = - 7b$ dalās ar 6. Tātad b dalās ar 6. Līdzīgi pierāda, ka a dalās ar 6. No īpašības D5 seko, ka skaitļi $a^2$, $ab$ un $b^2$ dalās ar 36. Tātad $(a^2 + ab + b^2)$ dalās ar 36.

**2.19.** $((n^3 - 1) / (n - 1), (n + 1)^2) = (n^2 + n + 1, n^2 + 2n +1) =$
$(n^2 + n + 1, (n^2 + 2n +1) - (n^2 + n + 1)) =(n^2 + n + 1, n) =$
$(n^2 + n + 1 - (n +1)n, n) = (1, n) = 1$.

**2.20.** $6b = (2a + 9b) - (2a + 3b)$ dalās ar 5. Tā kā $(6, 5) = 1$, tad arī b dalās ar 5; $2a = (2a + 3b) - 3b$ dalās ar 5, un arī a dalās ar 5.

**2.21.** Trīsciparu skaitļi atrodas intervālā [100; 999]. Intervālā [1; 999] atrodas [999 / 13] = 76 skaitļi, kas dalās ar 13. Intervālā [1; 99] atrodas [99 / 13] = 7 skaitļi, kas dalās ar 13. Tātad trīsciparu skaitļu, kas dalās ar 13, pavisam ir 76 - 7 = 69.

**2.22.** Četrciparu skaitļu, kas dalās ar 7, pavisam ir [9999 / 7] - [999 / 7] = 1286.

**2.23.** $(n^3 + 2n, n^2 + 1) = (n^3 + 2n - n(n^2 + 1), n^2 + 1) = (n, n^2 + 1) =$
$(n, n^2 + 1 - n\ \ n) = (n, 1) = 1$.

**2.24.** $371 = x \cdot 14 + r,\ \ 0 \le r < x$.
$14x \le 371$, tātad $x < [371 / 14] = 26$.
$371 = 14x + r < 14x + x = 15x$, tātad $x > 371 / 15 > 24$.
Atbilde: dalījums $x = 25$, atlikums $r = 21$;
dalījums $x = 26$, atlikums $r = 7$.

**2.25.** $100 = bq + 6,\ \ b > 6.\ \ bq = 94 = 2 \cdot 47$. b ir skaitļa 94 dalītājs, kas lielāks par 6. Tātad $b = 47$ vai $b = 94$.

**2.26.** Pieņemsim pretējo, ka $(ab, c) = d \ne 1$. Ar p apzīmēsim kādu no skaitļa d pirmreizinātājiem, t.i. $p|c$ un $p|ab$. No pirmskaitļu 2.īpaųības seko, ka $p|a$ vai $p|b$. Pirmajā gadījumā $p|a$ un $p|c$, bet tas ir pretrunā ar vienādību $(a, c) = 1$. Otrajā gadījumā $p|b$ un $p|c$, bet tas ar pretrunā ar vienādību $(b, c) = 1$. Iegūtā pretruna parāda, ka pieņēmums ir aplams. Tas nozīmē, ka $(ab, c) = 1$.

**2.27.** $85 = x \cdot x + r,\ \ 0 \le r < x$. Tātad $x^2 \le 85$, un $x < 9$. No otras puses $85 = x^2 + r < x^2 + x$, un $x > 8$. Tātad $x = 9$.

**2.28.** Ja skaitlis n, dalot ar 5, atlikumā dod 2, tad, dalot ar 10, tas atlikumā var dot 2 vai 7. Tā kā n ir nepāra skaitlis, tad šis atlikums var būt tikai 7.

**2.29.** Pieņemsim, ka p ir kopīgs skaitļu $a + b$ un $a^2 + b^2$ nepāra pirmreizinātājs. Tad $p \mid (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$ un $p \mid a$ vai $p \mid b$. Bet tā kā $p \mid (a + b)$, tad $p \mid a$ un $p \mid b$, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem, ka $(a, b) = 1$. Abi skaitļi a un b nedrīkst vienlaicīgi būt pāra skaitļi. Atliek divas iespējas:
1) viens no skaitļiem ir pāra skaitlis, bet otrs nepāra skaitlis un $(a + b,\ a^2 + b^2) = 1$;
2) abi skaitļi ir nepāra skaitļi. Tādā gadījumā gan $a + b$, gan $a^2 + b^2$ dalās ar 2 un viegli pārbaudīt, ka $a^2 + b^2$ ar 4 nedalās. Tas nozīmē, ka $(a + b, a^2 + b^2) = 2$.

**2.30.** Pierāda, ka četru pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums dalās ar 3 un ar 8.

**2.31.** $5 \mid 3(4a + 7b) - 4(3a + 8b) = -11b$, tātad $5|b$; līdzīgi pierāda, ka $5|a$. No tā seko, ka $5|(a + b)$. Ja viens no skaitļiem a, b ir pāra skaitlis, tad $2|ab$. Ja abi ir nepāra skaitļi, tad $2|(a + b)$. Visos gadījumos $2|ab(a + b)$. Tātad $2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 250 \mid ab(a + b)$.

**2.32.** No vienādībām $2077 = aq_1 + r$ un $100 = aq_2 + r$ seko, ka $2077 - 100 = a(q_1 - q_2)$ un $a \mid 1977$. Tātad a var pieņemt sekojošas vērtības $\{1, 3, 659, 1977\}$.

**2.33.** No vienādības $1987 = aq + 9$, $9 < a$, seko, ka a ir skaitļa $1987 - 9 = 1987$ dalītājs, kas ir lielāks par 9. Tā kā $1978 = 2 \cdot 23 \cdot 43$, tad a var pieņemt vērtības 23, 43, 46, 86, 989, 1978.

**2.34.** $3n + 5$ dalās ar 7 tad un tikai tad, kad $5(3n + 5) - 7(2n + 3) = n + 4$ dalās ar 7. Ja n pieder intervālam $[1, 1994)$, tad $(n + 4)$ pieder intervālam $[5, 1998)$. Tātad mums jānosaka, cik skaitļi intervālā $[5, 1998]$ dalās ar 7. Tādu skaitļu pavisam ir $[1997 / \mathbf{7}] - [4 / 7] = 285$.

**2.35.** Apzīmēsim ar $D(a)$ skaitļu skaitu intervālā $[1, 1000]$, kas dalās ar a. Tad $D(5) = [1000 / 5] = 200$, $D(7) = [1000 / 7] = 142$, $D(35) = [1000 / 35] = 28$. Pavisam ir $D(5) + D(7) - D(35) = 314$ skaitļu, kas dalās ar 5 un 7 (summējot $D(5) + D(7)$, katrs skaitlis, kas dalās ar 35, tiek ieskaitīts divas reizes). Nedalās ne ar 5, ne ar 7 atlikušie $1000 - 314 = 686$ skaitļi.

**2.36.** Meklējamie piecciparu skaitļi ir uzrakstāmi formā $\overline{abcd6} = 10\ \overline{abcd} + 6 = 10A + 6$, A patvaļīgs četrciparu skaitlis. $10A + 6$ dalās ar 3 tad un tikai tad, kad $10A$ dalās ar 3, jeb A dalās ar 3. Tātad prasīto skaitļu skaits ir $[9999 / 3] - [999 / 3] = 3000$.

**2.37.** $d = (n + 1, n^2 - 4) = (n + 1, n^2 - 4 - (n + 1)(n - 1)) = (n + 1, 3)$. Tātad $d \mid 3$, t.i. $d = 1$ vai $d = 3$. Abas vērtības tiešām var iegūt: ja $n = 3$, tad $d = (4, 5) = 1$; ja $n = 5$, tad $d = (6, 21) = 3$.

**2.38.** Var ņemt, piemēram, šādus skaitļus $k = b / (a, b)$ un $l = -a / (a, b)$. Tad $(k, l) = (a, b) / (a, b) = 1$ un $p \mid (ak + bl) = 0$.

**2.39.** Apzīmēsim $(a, b) = d$; tad $a = dr$, $a = ds$, $(r, s) = 1$. Skaitļus a, 2a, 3a, ... , ba dalot ar b iegūstam skaitļus r/s, 2r/s, 3r/s, ..., (ds)r/s. Skaitlis kr /s ir vesels skaitlis tad un tikai tad, ja $s \mid k$, jo $(r, s) = 1$. Starp pirmajiem ds skaitļiem šādu skaitļu ir tieši d. Apgalvojums pierādīts.

**2.40.** Izmantojot LKD īpašības, iegūstam $(aa_1, ab_1, ba_1, bb_1) = ((aa_1, ab_1),( ba_1, bb_1)) = (a\ (a_1\ b_1), b\ (a_1, b_1)) = (ad_1, bd_1) = (a, b)\ d_1 = dd_1$.

**2.41.** Ja $d|a$ un $d|b$, tad $d \mid (u_1a + v_1b)$ un $d \mid (u_2a + v_2b)$. Un otrādi, ja $d \mid (u_1a + v_1b)$ un $d \mid (u_2a + v_2b)$, tad

$d \mid u_2(u_1a + v_1b) - u_1(u_2a + v_2b) = (u_2v_1 - u_1v_2)b = -b$. Līdzīgi pierāda, ka $d|a$.

**2.42.** Ja $d|c$ un $d|b$, tad $d|b$ un $d|ac$. Otrādi, dots, ka $d|b$ un $d|ac$. Jāpierāda, ka $d|c$. Tas seko no īpašības L6, jo dots, ka $(a, b) = 1$, un tātad arī $(d, a) = 1$. Ja $d|ac$ un $(d, a) = 1$, tad $d|c$.

**2.43.** $A = 1981q + 35$. Tā kā 1981 un 35 dalās ar 7, tad arī A dalās ar 7. Tas nozīmē, ka, dalot A ar 14, atlikumā varam iegūt 0 vai 7. No tā, ka $A = 1982m + 13$, seko, ka A ir nepāra skaitlis. Tātad, dalot A ar 14, atlikumā iegūsim 7.

**2.44.** No 12 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem var izvēlēties tādu skaitli n, kurš dalās ar 12. Tādā gadījumā $n/2$, $n/3$, $n/4$ ir skaitļa n naturālie dalītāji, kuru summa ir lielāka par n. Protams, ka arī visu skaitļa n naturālo dalītāju summa ir lielāka par n.

**2.45.** Ja a ir meklētais skaitlis, tad $a + 1$ dalās ar 2, 3, 4, 5 un 6. Tātad $a + 1$ ir šo skaitļu MKD, $a + 1 = [2, 3, 4, 5, 6] = 60$ un $a = 59$.

**2.46.** Pierāda, ka jebkuru skaitļu a un b kopīgais dalītājs ir arī skaitļu $a + b$ un $[a, b]$ dalītājs, un otrādi.

**2.47.** Apzīmēsim $(a_1, a_2, ..., a_{10})$ ar d; tad
1) $d \mid a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 1001$,
2) $d \mid \min (a_i)$, t.i. $d \leq (1001 / 10)$, $d \leq 100$.
Skaitļa 1001 lielākais dalītājs, kas nepārsniedz 100 ir 91. Piemērs, kad šāda vērtība realizējas, ir sekojošs
$a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_9 = 91$, $a_{10} = 1001 - 9 \cdot 91 = 182$.

**2.48.** Uzrakstīsim sekojošu identitāti:
$d(ax + by) - (cx + dy) = x(ad - bc) = xm$. Tātad, ja $m \mid (ax + by)$, tad
$m \mid b(cx + dy)$. Ņemot vērā, ka $(m, b) = 1$, iegūstam, ka $m \mid (cx +dy)$.

**2.49.** Apzīmēsim meklējamo skaitli ar $\overline{ab}$. Tad $\overline{ab} = a + b^2$, jeb $9a = b^2 - b$ un $b(b -1)$ dalās ar 9. Tas ir iespējams tikai, ja cipars b ir 9. Tādā gadījumā $9a = 9^2 - 9$ un $a = 8$. Meklējamais skaitlis ir 89.

**2.50.** Apzīmēsim meklējamo skaitli ar N. Tad $N^2 - N$ dalās ar 1000 un $N(N - 1)$ dalās ar $8 \cdot 125$. Tā kā N un $N - 1$ ir savstarpēji primitīvi un neviens no tiem nevar dalīties ar $8 \cdot 125$, tad pastāv divas iespējas:
1) N dalās ar 8 un $N - 1$ dalās ar 125, jeb $N = 376$;
2) N dalās ar 125 un $N -1$ dalās ar 8, jeb $N = 625$.
Skaidrs, ka jebkuram naturālam skaitlim k
$N^k - N = N(N^{k-1} - 1)$ dalās ar $N(N - 1)$ un tāpēc iegūtās N vērtības $N = 376$ un $N = 625$ apmierina uzdevuma nosacījumus.

**3.1.** a) $1000 = 2^3\ 5^3$; b) $250 = 2 \cdot 5^3$; c) $121 = 11^2$; d) $8400 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2\ 7$; e) $1440 = 2^5\ 3^2\ 5$.

**3.2.** $\mathrm{ord}_2\ 106 = 2$.

**3.3.** $\mathrm{ord}_3\ 216 = 3$.

**3.4.**$\mathrm{ord}_3\ (6^{10}\ 18^{20}) = 10\ \mathrm{ord}_3\ 6 + 20\ \mathrm{ord}_3\ 18 = 10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 = 50$.

**3.5.** $\mathrm{ord}_3\ (12^3\ 18^5\ 25^{10}) = 3\ \mathrm{ord}_3\ 12 + 5\ \mathrm{ord}_3\ 18 + 10\ \mathrm{ord}_3\ 25 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 0 = 13$.

**3.6.** $\mathrm{ord}_2\ (10^3\ \ 15^2\ 8^4) = 3\ \mathrm{ord}_2\ 10 + 2\ \mathrm{ord}_2\ 15 + 4\ \mathrm{ord}_2\ 8 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 = 15$.

**3.7.** $\mathrm{ord}_5\ (8^4\ \ 20^3\ \ 25^2) = 4\ \mathrm{ord}_5\ 8 + 3\ \mathrm{ord}_5\ 20 + 2\ \mathrm{ord}_5\ 25 = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$.

**3.8.** $\mathrm{ord}_3\ (24^3\ \ 27^5\ \ 15^7) = 3\ \mathrm{ord}_3\ 24 + 5\ \mathrm{ord}_3\ 27 + 7\ \mathrm{ord}_3\ 15 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 1 = 25$.

**3.9.** $\mathrm{ord}_3\ 200! = [200 / 3] + [200 / 9] + [200 / 27] + [200 / 81] = 66 + 22 + 7 + 2 = 97$.

**3.10.** $\mathrm{ord}_2\ 100! = [100 / 2] + [100 / 4] + [100 / 8] + [100 / 16] + [100/32] + [100 / 64] = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$.

**3.11.** $\mathrm{ord}_5\ 300! = [300 / 5] + [300 / 25] + [300 / 125] = 60 + 12 + 2 = 74$.

**3.12.** $\mathrm{ord}_2\ 200! = 197$, $\mathrm{ord}_5\ 200! = 49$. Tātad 200! beidzas ar 49 nullēm.

**3.13.** $350 = 2\ \ 5^2\ 7$. Tātad, $d\ (350) = (1 + 1)(1 + 2)(1 + 1) = 12$.

**3.14.** $600 = 2^3\ 3\ \ 5^2$. Tātad, $d\ (600) = (1 + 3)(1 + 1)(1 + 2) = 24$.

**3.15.** $350 = 2\ \ 5^2\ 7$. Tātad, $S\ (350) = (1 + 2)(1 + 5 + 5^2)(1 + 7) = 744$.

**3.16.** $600 = 2^3\ 3\ \ 5^2$. Tātad, $S\ (600) = (1+2+2^2+2^3)(1+3)(1+5+5^2) = 1860$.

**3.17.** 15! pirmreizinātāji ir 2, 3, 5, 7, 11 un 13.

$\mathrm{ord}_2\ 15! = [15 / 2] + [15 / 4] + [15 / 8] = 7 + 3 + 1 = 11$;
$\mathrm{ord}_3\ 15! = [15 / 3] + [15 / 9] = 6$;
$\mathrm{ord}_5\ 15! = [15 / 5] = 3$;
$\mathrm{ord}_7\ 15! = [15 / 7] = 2$;
$\mathrm{ord}_{11} 15! = [15 /11] = 1$;
$\mathrm{ord}_{13} 15! = [15 /13] = 1$.

$15! = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$.

**3.18.** $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ ir jāpareizina ar $2 \cdot 5 = 10$, lai iegūtu kvadrātu.

**3.19.** $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Uzrakstīsim papildreizinātāju formā

$x = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot m$. Ja $x \cdot 150 = 2^{a+1} \cdot 3^{b+1} \cdot 5^{c+2} \cdot m$ ir kubs, tad a+1 dalās ar 3, b+1 dalās ar 3, c+2 dalās ar 3. Mazākie veselie nenegatīvie skaitļi ar šādām īpašībām ir $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$. Tātad mazākais papildreizinātājs ir $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 180$.

**3.20.** Meklējamo skaitli uzrakstīsim formā $A = 2^a \cdot 3^b \cdot k$, 2 nav k dalītājs, 3 nav k dalītājs. Tā kā $2 \cdot A = 2^{a+1} \cdot 3^b \cdot k$ ir jābūt kvadrātam, tad a+1 dalās ar 2 un b dalās ar 2; tā kā $3 \cdot A = 2^a \cdot 3^{b+1} \cdot k$ ir kubs, tad a dalās ar 3 un b+1 dalās ar 3. Mazākās (veselās nenegatīvās) a un b vērtības, kas apmierina dotos nosacījumus, ir $a = 3$ un $b = 2$. Tātad meklējamais skaitlis ir $2^3 \cdot 3^2 = 72$.

**3.21.** $20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$; $d(20!) = 19 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 41040$.

**3.22.** Ja $k = 1$, tad $5 \cdot 2^1 + 2 = 12$ nav kvadrāts. Ja $k \geq 2$, tad $5 \cdot 2^k + 2 = 2(5 \cdot 2^{k-1} + 1)$, pie kam $5 \cdot 2^{k-1} + 1$ ir nepāra skaitlis. Tātad $\mathrm{ord}_2(5 \cdot 2^k + 2) = 1$ un $5 \cdot 2^k + 2$ nav naturāla skaitļa kvadrāts.

**3.23.** Ja $k = 1$, tad $3^k + 3 = 6$ nav kvadrāts. Ja $k > 1$, tad $3^k + 3 = 3(3^{k-1} + 1)$, t.i. $\mathrm{ord}_3(3^k + 3) = 1$ un šis skaitlis nav naturāla skaitļa kvadrāts ($\mathrm{ord}_3 A$ nedalās ar 2).

**3.24.** Skaitlis $((3!)!)! = 720!$ beidzas ar 178 nullēm.

**3.25.** Skaitli meklējam formā $A = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$.

Atbilde: $A = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$.

**3.26.** No vienādības $[a, b] = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ seko, ka skaitļus a un b jāmeklē formā $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$. Atbilde: (6, 120), (120,6), (24,30), (30,24).

**3.27.** Ja $n = 3$, tad $n! + 2 = 8$ nav kvadrāts. Ja $n \geq 4$, tad $n! + 2 = 2((n! / 2) + 1)$, $(n! / 2) + 1$ ir nepāra skaitlis, t.i. $\mathrm{ord}_2(n! + 2) = 1$ un dotais skaitlis nav naturāla skaitļa kvadrāts.

**3.28.** Pārbaudot skaitļus $x = 1, 2, ..., 8$, atrodam vienu atrisinājumu $x = 4$, $y = 3$. Citu atrisinājumu nav, jo, ja $x \geq 9$, tad $x!$ dalās ar 27 un $x! + 3 = 3((x! / 3) + 1)$, jeb $\mathrm{ord}_3(x! + 3) = 1$, bet $\mathrm{ord}_3 y^3 = 3\,\mathrm{ord}_3 y$ dalās ar 3.

**3.29.** Nevar, jo $\mathrm{ord}_2 19940...0 = \mathrm{ord}_5 19940...0 + 1$, bet $\mathrm{ord}_2 n! > \mathrm{ord}_5 n! + 1$, ja $n \geq 4$.

**3.30.** $\mathrm{ord}_2[(n+1)(n+2)...(2n)] = \mathrm{ord}_2 (2n)!/ n! = \mathrm{ord}_2(2n)! - \mathrm{ord}_2 n! =$

$[2n/2] + [2n/2^2] + [2n/2^3] + ... - ([n/2] + [2n/2^2] + [2n/2^3] + ...) = [2n/2] = n.$

**3.31.** Ja A dalās ar 36, tad $A = 2^a \cdot 3^b \cdot k$, $a \geq 2$, $b \geq 2$, un $d(a) = (a+1)(b+1) \cdot m$ nevar būt vienāds ar $62 = 2 \cdot 31$, jo $a+1>2$ un $b+1>2$.

**3.32.** Dotais skaitlis n dalās ar 5, bet nedalās ar 25, t.i., $n = 5 \cdot p_2^{k_2} p_3^{k_3} \ldots p_r^{k_r}$. No šejienes seko, ka $d(n) = (1+1)(k_2+1)...(k_r+1)$ ir pāra skaitlis, tātad nav vienāds ar 25323.

**3.33.** Ja $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$, tad $d(n) = (k_1+1)(k_2+1)...(k_r+1)$. No tā, ka d(n) ir nepāra skaitlis, seko, ka visi skaitļi $k_1+1$, $k_2+1$ .... $k_r+1$ ir nepāra skaitļi. Tātad $k_1$, $k_2$ .... $k_r$ ir pāra skaitļi, un n ir naturāla skaitļa kvadrāts.

**3.34.** a) $k = 3^6 \cdot 2$,

b) $k = 2^2 \cdot 3^4$, $k = 2^4 \cdot 3^2$,

c) ja k dalās ar 18, tad $k = 2^a \cdot 3^b \cdot m$, $a \geq 1$, $b \geq 2$. Līdz ar to $d(k) = (a+1)(b+1) \cdot r$ nav pirmskaitlis, un tātad $d(k) \neq 17$.

**3.35.** Viens no šiem skaitļiem ir uzrakstāms formā $4k+2 = 2(2k+1)$. Tā kā $ord_2(4k+2) = 1$, tad šis skaitlis nevar būt naturāla skaitļa pakāpe ar kāpinātāju, kurš lielāks par 1.

**4.1.** a) Jā, $4 \equiv 54 \pmod{10}$, jo pēc kongruentu skaitļu definīcijas $54 - 4 = 50$, 50 dalās ar 10;
b) jā, $-7 \equiv 11 \pmod 6$, jo $11 - (-7) = 18 \vdots 6$;
c) nē, $-4 \not\equiv 13 \pmod 9$, jo $13 - (-4) = 17$, bet 17 nedalās ar 9;
d) jā, $8^6 \equiv 1 \pmod 9$, jo $8 \equiv -1 \pmod 9$, $8 - (-1) = 9$, tātad dalās ar 9.
$8^6 \equiv (-1)^6 \equiv 1 \pmod 9$ (īpašība $a^n \equiv b^n \pmod n$);
e) jā, $11^2 \equiv 12^2 \pmod{23}$, jo $11 \equiv -12 \pmod{23}$, $11^2 \equiv (-12)^2 \equiv 12^2 \pmod{23}$;
f) nē, $12^3 \not\equiv 14^3 \pmod{13}$, jo $12 \equiv -1 \pmod{13}$, $12^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \pmod{13}$, savukārt $14 \equiv 1 \pmod{13}$, $14^3 \equiv 1^3 \pmod{13}$, bet $1 \not\equiv -1 \pmod{13}$.

**4.2.** Pēc definīcijas šo skaitļu starpībai jādalās ar 7, lai tie būtu kongruenti pēc moduļa 7.
a) $15 - 1 = 14$, 14 dalās ar 7, tātad $1 \equiv 15 \pmod 7$;
b) $42 - 0 = 42$, 42 dalās ar 7, tātad $42 \equiv 0 \pmod 7$;
c) $99 - 2 = 97$, 97 nedalās ar 7, tātad $99 \not\equiv 2 \pmod 7$;
d) $8 - (-1) = 9$, 9 nedalās ar 7, tātad $-1 \not\equiv 8 \pmod 7$;
e) $5 - (-9) = 14$, 14 dalās ar 7, tātad $-9 \equiv 5 \pmod 7$;
f) $699 - (-1) = 700$, 700 dalās ar 7, tātad $-1 \equiv 699 \pmod 7$.

**4.3.** Noteiksim doto skaitļu atlikumu dalot ar 9:

$13 = 1 \cdot 9 + 4$, atlikums 4,
$27 = 3 \cdot 9 + 0$, atlikums 0,
$103 = 11 \cdot 9 + 4$, atlikums 4,
$201 = 22 \cdot 9 + 3$, atlikums 3,
$-5 = (-1) \cdot 9 + 4$, atlikums 4,
$-13 = (-2) \cdot 9 + 5$, atlikums 5.
Tātad savā starpā kongruenti pēc moduļa 9 ir skaitļi 13, 103, - 5.

**4.4.** $7 \equiv 7 \pmod{10}$, $13 \equiv 3 \pmod{10}$, $117 \equiv 7 \pmod{10}$, $-33 \equiv 7 \pmod{10}$, $35 \equiv 5 \pmod{10}$, $-38 \equiv 2 \pmod{10}$, $8 \equiv 8 \pmod{10}$. Tātad $7 \equiv 117 \equiv -33 \pmod{10}$.

**4.5.** a) $22 \equiv 9 \pmod{13}$;
b) $100 \equiv 9 \pmod{13}$;
c) $1001 \equiv 0 \pmod{13}$;
d) $-1 \equiv 12 \pmod{13}$;
e) $-100 \equiv 4 \pmod{13}$.

**4.6.** a) skaitļi 12 un 19 ir kongruenti pēc moduļa 7, jo $19 - 12 = 7$; b) $7 - (-3) = 10$, 10 dalītāji ir 2, 5 un 10, tātad 7 ir kongruents ar - 3 pēc moduļiem 2, 5 un 10.
c) $18 - 0 = 18$, tā kā 18 dalītāji ir 2, 3, 6, 9, 18, tad 0 ir kongruenta ar 18 pēc moduļiem 2, 3, 6, 9 un 18.

**4.7.** $2 - (-5) = 7$,
$2 - (-2) = 4$,
$2 - 2 = 0$,
$2 - 5 = -3$,
$2 - 30 = -28$,
$2 - 100 = -98$,
$2 - (-9) = 11$. Ar 7 dalās 7, 0, - 28, - 98. Tātad skaitļi -5, 2, 30,100 ir kongruenti ar skaitli 2 pēc moduļa 7.

**4.8.**

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

**4.9.**

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 5 | 4 | 3 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 | 5 | 4 |
| 4 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 5 |

**4.10.**

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 0 | 2 | 4 |
| 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| 4 | 0 | 4 | 2 | 0 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

**4.11.**

a) $10 \equiv 3 \pmod 7$,
$20 \equiv -1 \pmod 7$,
$30 \equiv 2 \pmod 7$,

$10^3 \cdot 20^2 \cdot 30 \equiv 3^3 \cdot (-1)^2 \cdot 2 = 54 \pmod 7$, 54 dalot ar 7, dod atlikumā 5.

Tātad, $10^3 \cdot 20^2 \cdot 30 \equiv 5 \pmod 7$;

b) $20 \equiv -2 \pmod{11}$,
$21 \equiv -1 \pmod{11}$,
$22 \equiv 0 \pmod{11}$,
$23 \equiv 1 \pmod{11}$,
$24 \equiv 2 \pmod{11}$, tātad

$20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 = (-2)(-1) \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 \equiv 0 \pmod{11}$;

c) $14 \equiv 1 \pmod{13}$,
$15 \equiv 2 \pmod{13}$,
$16 \equiv 3 \pmod{13}$. Tātad

$14^5 \cdot 15^4 \cdot 16^3 \equiv 1^5 \cdot 2^4 \cdot 3^3 \equiv 16 \cdot 27 \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \pmod{13}$.

**4.12.**

a) $1234 \equiv 4 \pmod{10}$,
$5678 \equiv 8 \pmod{10}$,
$9876 \equiv 6 \pmod{10}$.

Tātad $1234 + 5678 + 9876 \equiv 4 + 8 + 6 \equiv 8 \pmod{10}$;

b) $1 \equiv 1 \pmod 9$,
$22 \equiv 4 \pmod 9$,
$333 \equiv 0 \pmod 9$,
$4444 \equiv 7 \pmod 9$,
$55555 \equiv 7 \pmod 9$.

Tātad $1 + 22 + 333 + 4444 + 55555 \equiv 1 + 4 + 0 + 7 + 7 \equiv 1 \pmod 9$;

c) $1995 \equiv 4 \pmod{11}$,

$1996 \equiv 5 \pmod{11}$,
$1997 \equiv 6 \pmod{11}$.
$1995 + 1996 + 1997 \equiv 4 + 5 + 6 \equiv 4 \pmod{11}$;
d) $666 \equiv 0 \pmod 9$,
$777 \equiv 3 \pmod 9$,
$888 \equiv 6 \pmod 9$,
$999 \equiv 0 \pmod 9$.
$666 \cdot 777 + 888 \cdot 999 \equiv 0 \cdot 3 + 6 \cdot 0 \equiv 0 \pmod 9$;
e) $771 \equiv 1 \pmod 7$,
$772 \equiv 2 \pmod 7$,
$773 \equiv 3 \pmod 7$,
$774 \equiv 4 \pmod 7$.
Tātad, $771 \cdot 772 + 773 \cdot 774 \equiv 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 0 \pmod 7$;
f) $1000 \equiv 4 \pmod{12}$,
$1001 \equiv 5 \pmod{12}$,
$1002 \equiv 6 \pmod{12}$,
$1003 \equiv 7 \pmod{12}$.
Tātad, $1000 \cdot 1001 + 1002 \cdot 1003 \equiv 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 \equiv 2 \pmod{12}$.

**4.13.** a) $11 \equiv 1 \pmod 5$,
$12 \equiv 2 \pmod 5$,
$13 \equiv 3 \pmod 5$,
$14 \equiv 4 \pmod 5$.
Tātad, $11 \cdot 12^2 \cdot 13^3 \cdot 14^4 \equiv 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \equiv 3 \pmod 5$.
b) $13 \equiv 2 \pmod{11}$,
$14 \equiv 3 \pmod{11}$,
$15 \equiv 4 \pmod{11}$.
Tātad, $13 \cdot 14^2 \cdot 15^3 \equiv 2 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \equiv 8 \pmod{11}$.
c) $100^3 \cdot 200^2 \cdot 300 \equiv 2^3 \cdot 4^2 \cdot 6 \equiv 5 \pmod 7$.
d) $10^3 + 11^3 + 12^3 \equiv 1^3 + 2^3 + 3^3 \equiv 0 \pmod 9$.
e) $9^5 + 10^5 + 11^5 \equiv (-1)^5 + 0 + 1^5 \equiv 0 \pmod{10}$.

**4.14.** Uzrakstām virkni $2^n$ (mod 10).

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ... |
| $2^n$ (mod 10) | 2 | 4 | 8 | 6 | 2 | 4 | 8 | 6 | 2 | 4 | ... |

Virknē atkārtojas skaitļi 2, 4, 8, 6. Tātad perioda garums ir 4, un tas sastāv no skaitļiem (2, 4, 8, 6).

**4.15.** Uzrakstām virkni $3^n$ (mod 10).

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ... |
| $3^n$ (mod 10) | 3 | 9 | 7 | 1 | 3 | 9 | 7 | 1 | 3 | 9 | ... |

Tātad periods ir (3, 9, 7, 1), tā garums ir 4.

**4.16.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
| $3^n$ (mod 8) | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | ... |

Periods ir (3, 1), tā garums ir 2; $3^{2k+1} \equiv 3 \pmod 8$, $3^{2k} \equiv 1 \pmod 8$.

**4.17.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
| $2^n$(mod 7) | 2 | 4 | 1 | 2 | 4 | 1 | ... |

Periods ir (2, 4, 1), tā garums ir 3; $2^{3k+1} \equiv 2 \pmod 7$, $2^{3k+2} \equiv 4 \pmod 7$, $2^{3k} \equiv 1 \pmod 7$.

**4.18.** $5^1 \equiv 5 \pmod 7$,

$5^2 \equiv 25 \equiv 4 \pmod 7$,

$5^3 \equiv 5^2 \cdot 5 \equiv 4 \cdot 5 \equiv 20 \equiv 6 \pmod 7$,

$5^4 \equiv 5^3 \cdot 5 \equiv 6 \cdot 5 \equiv 30 \equiv 2 \pmod 7$,

$5^5 \equiv 5^4 \cdot 5 \equiv 2 \cdot 5 \equiv 10 \equiv 3 \pmod 7$.

Tātad $5^5 \equiv 3 \pmod 7$.

b)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
| $2^n$ (mod 10) | 2 | 4 | 8 | 6 | 2 | 4 | ... |

Tātad, $2^{4k+1} \equiv 2 \pmod{10}$, $2^{4k+2} \equiv 4 \pmod{10}$, $2^{4k+3} \equiv 8 \pmod{10}$, $2^{4k} \equiv 6 \pmod{10}$.

$2^{23} \equiv 2^{4\cdot5+3} \equiv 8 \pmod{10}$.

c)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |

$3^n$ (mod 10) 3 9 7 1 3 9 ...

Tātad, $3^{4k+1} \equiv 3 \pmod{10}$, $3^{4k+2} \equiv 9 \pmod{10}$, $3^{4k+3} \equiv 7 \pmod{10}$, $3^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$.
$3^{99} \equiv 3^{4\cdot 24+3} \equiv 7 \pmod{10}$.

d) Izmantojot virkni $3^n$ (mod 8) no 4.16. uzdevuma, $3^{101} = 3^{2\cdot 50+1} \equiv 3 \pmod{8}$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| e) | n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 ... |
| $2^n$ (mod 31) | | 2 | 4 | 8 | 16 | 1 | 2 ... |

Periods ir (2, 4, 8, 16, 1), tā garums 5. $2^{5k+1} \equiv 2 \pmod{31}$, $2^{5k+2} \equiv 4 \pmod{31}$, $2^{5k+3} \equiv 8 \pmod{31}$, $2^{5k+4} \equiv 16 \pmod{31}$, $2^{5k} \equiv 1 \pmod{31}$.
$2^{200} = 2^{5\cdot 40} \equiv 1 \pmod{31}$.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f) | n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 ... |
| $19^n$ (mod 11) | | 8 | 9 | 6 | 4 | 10 | 3 | 2 | 5 | 7 | 1 ... |

Iegūstot vieninieku, varam apstāties, jo tālāk viss atkārtosies. Perioda garums ir 10. Tātad $19^{96} \equiv (19^{10})^9 \cdot 19^6 \equiv 1^9 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{11}$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g) | n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 ... |
| $10^n$ (mod 12) | | 10 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 ... |

Perioda garums ir viens. Tātad $10^{100} \equiv 4 \pmod{12}$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h) | n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 ... |
| $8^n$ (mod 9) | | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 ... |

Perioda garums ir 2. Tātad $8^{88} \equiv 8^{2\cdot 44} \equiv 1 \pmod{9}$.

**4.19.** a) Uzrakstām virkni $2^n$ pēc moduļa 100:
2, 4, 8, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52, 4, ... Tātad perioda garums ir 20.

b) Virknes $3^n$ (mod 16) periods ir (3, 9,11, 1), tā garums ir 4.

c) Uzrakstām virkni $10^n$ pēc moduļa 19:
10, 5, 12, 6, 3, 11, 15, 17, 18, 9, 14, 7, 13, 16, 8, 4, 2, 1, ...
Perioda garums ir 18.

d) Uzrakstām virkni $5^n$ pēc moduļa 17:
5, 8, 6, 13, 14, 2, 10, 16, 12, 9, 11, 4, 3, 15, 7, 1, ...
Perioda garums ir 16.

**4.20.** a) Uzrakstām virkni $2^n$ (mod 10), tās periods ir (2, 4, 8, 6). Tātad $2^{4k+1} \equiv 2$, $2^{4k+2} \equiv 4$, $2^{4k+3} \equiv 8$, $2^{4k} \equiv 6$ (mod 10).
$2^{333} \equiv 2^{4 \cdot 83+1} \equiv 2$ (mod 10).

b) Uzrakstām virkni $3^n$ (mod 16), tās periods ir (3, 9, 11, 1). Tātad $3^{1000} = 3^{4 \cdot 250} \equiv 1$ (mod 16).

c) Uzrakstām virkni $10^n$ (mod 19), tās periods ir (10, 5, 12, 6, 3, 11, 15, 17, 18, 9, 14, 7, 13, 16, 8, 4, 2, 1). Perioda garums ir 18. Tātad $10^{100} = 10^{18 \cdot 5+10} \equiv 10^{10} \equiv 9$ (mod 19).

d) Uzrakstām virkni $5^n$ (mod 17), tās periods ir (5, 8, 6, 13, 14, 2, 10, 16, 12, 9, 11, 4, 3, 15, 7, 1). Perioda garums 16. Tātad $5^{555} = 5^{16 \cdot 34+11} \equiv 5^{11} \equiv 11$ (mod 17).

**4.21.** a) Uzrakstām virkni $7^n$ (mod 10), tās periods ir (7, 9, 3, 1) un virkni $13^n$ (mod 10), tās periods ir ( 3, 9, 7, 1).
Tātad $7^{70} + 13^{130} = 7^{4 \cdot 17+2} + 13^{4 \cdot 32+2} \equiv 9 + 9 \equiv 8$ (mod 10).
b) Uzrakstām virkni $2^n$ (mod 12), tās periods ir (4, 8) un virkni $3^n$ (mod 12), tās periods ir (3, 9). Tātad $2^{200} + 3^{300} = 2^{2 \cdot 100} + 3^{2 \cdot 150} \equiv 4 + 9 \equiv 1$ (mod 12).
c) Izmantojot MFT, $6^{10} \equiv 1$ (mod 11), $7^{10} \equiv 1$ (mod 11), $8^{10} \equiv 1$ (mod 11).
Tātad $6^{60}+7^{70}+8^{80} \equiv 6^{10 \cdot 6} + 7^{10 \cdot 7} + 8^{10 \cdot 8} \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3$ (mod 11).

**4.22.** Uzrakstām virkni $19^n$ (mod 10), tās periods ir (9, 1) un virkni $91^n$ (mod 10), tās periods ir (1). Tātad $19^{91} + 91^{19} \equiv 9 + 1 \equiv 0$ (mod 10).

**4.23.** Uzrakstām virkni $33^n$ (mod 10), tās periods ir (3, 9, 7, 1) un virkni $77^n$ (mod 10), tās periods ir (7, 9, 3, 1). Tātad $33^{77} + 77^{33} = 33^{4 \cdot 19+1} + 77^{4 \cdot 8+1} \equiv 3 + 7 \equiv 0$ (mod 10).

**4.24.** Uzrakstām virkni $2222^n$ (mod 7), tās periods ir (3, 2, 6, 4, 5, 1). Perioda garums ir 6. Uzrakstām virkni $5555^n$ (mod 7), tās periods ir (4, 2, 1). Perioda garums ir 3. Tātad $2222^{5555} + 5555^{2222} = 2222^{6 \cdot 925+5} + 5555^{3 \cdot 740+2} \equiv 5 + 2 \equiv 0$ (mod 7).

**4.25.** a) Uzrakstām virkni $2^n$ (mod 100): (2, 4, 8, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52, 4, ...). Perioda garums ir 20. Tātad $2^{999} \equiv 2^{20 \cdot 49+19} \equiv 2^{19} \equiv 88$ (mod 100).

b) Uzrakstām virkni $3^n$ (mod 100): (3, 9, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 7, 21, 63, 89, 67, 1, ...). Perioda garums ir 20. Tātad $3^{999} = 3^{20 \cdot 49+19} \equiv 67$ (mod 100).

**4.26.** a) No MFT seko, ka $17^{100} \equiv 1$ (mod 101). Tātad $17^{1002} = 17^{100 \cdot 10+2} \equiv 17^2 \equiv 87$ (mod 101).

b) No MFT seko, ka $5^{16} \equiv 1 \pmod{17}$. Tātad $5^{641} = 5^{16 \cdot 40+1} \equiv 5 \pmod{17}$.

c) $19^{92} = 19^{10 \cdot 9+2} \equiv 361 \equiv 9 \pmod{11}$.

d) $8^{902} = 8^{30 \cdot 30+2} \equiv 64 \equiv 2 \pmod{31}$.

e) $4^{444} = 4^{22 \cdot 20+4} \equiv 3 \pmod{23}$.

f) $63^{365} = 63^{60 \cdot 6+5} \equiv 32 \pmod{61}$.

**4.27.** a) No MFT izriet, ka $3^{16} \equiv 1 \pmod{17}$. Tātad $3^{1000} = 3^{16 \cdot 625} \equiv 1$ (mod 17).

b) No MFT seko, ka $7^{10} = 1 \pmod{11}$. Tātad $7^{10 \cdot 1000} \equiv 1 \pmod{11}$.

c) 77 sadalām pirmreizinātājos 7 un 11. Pierādīsim, ka $10^{30}$ - 1 dalās ar 7 un 11. No MFT izriet, ka $10^6 \equiv 1 \pmod 7$, tātad $10^{30} \equiv 1 \pmod 7$. $10^{10} \equiv 1$ (mod 11), tātad $10^{30} \equiv 1 \pmod{11}$. Tā kā $10^{30}$ - 1 dalās ar 7 un 11, tad dalās arī ar 77.

d) Pierādīsim, ka $12^{120}$ - 1 dalās 7 un 13. $12^6 \equiv 1 \pmod 7$ un $12^{12} \equiv 1$ (mod 13). Tātad $12^{120}$ - 1 dalās ar 91.

e) $9^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, $9^{10 \cdot 9} \equiv 1 \pmod{11}$; $9^{30} \equiv 1 \pmod{31}$, $9^{30 \cdot 3} \equiv 1 \pmod{31}$. Tātad $9^{90}$ - 1 dalās ar 341.

**4.28.** Katram skaitlim m sākot no noteiktas vietas n! dalās ar m.
a) $1! + 2! + 3! + ... + 100! \equiv 1 + 0 + 0 + ... + 0 \equiv 1 \pmod 2$.
b) $1! + 2! + 3! + ... + 100! \equiv 1 + 2 + 6 + 3 + 1 + 6 + 0 + ... + 0 \equiv 5 \pmod 7$.
c) $1! + 2! + 3! + ... + 100! \equiv 1 + 2 + 6 + 0 + .... + 0 \equiv 9 \pmod{12}$.
d) $1! + 2! + 3! + ... + 100! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 20 + 20 + 15 + 20 + 5 + 0 + ... + 0 \equiv 13 \pmod{25}$.

**4.29.** a) Uzrakstīsim virkni $5^n \pmod{13}$, tās periods ir (5, 12, 8, 1). Tātad, $5^{4k} \equiv 1 \pmod{13}$, $5^{4k+1} \equiv 5 \pmod{13}$, $5^{4k+2} \equiv 12 \pmod{13}$, $5^{4k+3} \equiv 8 \pmod{13}$. Tālāk jānoskaidro, kādu atlikumu dod $5^5$ dalot ar 4. Uzrakstām virkni $5^n$ (mod 4): (1, 1, 1, ... ). Redzam, ka $5^5 \equiv 1 \pmod 4$. Rezultātā iegūstam $5^{5^5} \equiv 5^{4k+1} \equiv 5 \pmod{13}$.

b) Uzrakstām virkni $5^n \pmod 7$, tās periods ir (5, 4, 6, 2, 3, 1). Tātad, $5^{6k} \equiv 1 \pmod 7$, $5^{6k+1} \equiv 5 \pmod 7$, $5^{6k+2} \equiv 4 \pmod 7$, $5^{6k+3} \equiv 6 \pmod 7$, $5^{6k+4} \equiv 2 \pmod 7$, $5^{6k+5} \equiv 3 \pmod 7$. Noskaidrojam, kādu atlikumu dod $5^5$ dalot ar 6. Uzrakstām virkni $5^5 \pmod 6$: (5, 1, 5, 1, 5, ... ). Rezultātā iegūstam $5^{5^5} \equiv 5^{6k+5} \equiv 3 \pmod 7$.

c) Virknes $7^n$ (mod 10) periods ir (7, 9, 3, 1). Virknes $7^n$ (mod 4) periods ir (3, 1). Tātad $7^{7^7} \equiv 3$ (mod 10).

d) Virknes $6^n$ (mod 10) periods ir (6). Tātad $6^{6^6} \equiv 6$ (mod 10).

e) Uzrakstām virkni $13^n$ (mod 11), tās periods ir (2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1). Perioda garums ir 10. Uzrakstām virkni $14^n$ (mod 10), tās periods ir (4, 6). Perioda garums ir 2. Tātad $14^{15} \equiv 4$ (mod 10).

$13^{14^{15}} \equiv 13^{10k+4} \equiv 5$ (mod 11).

f) Uzrakstām virkni $31^n$ (mod 11), tās periods ir (9, 4, 3, 5, 1). Perioda garums ir 5. Uzrakstām virkni $42^n$ (mod 5), tās periods ir (2, 4, 3, 1). Tātad $42^{53} \equiv 42^{4\cdot 13+1} \equiv 2$ (mod 5).

$31^{42^{53}} \equiv 31^{5k+2} \equiv 4$ (mod 13).

**4.30.** Uzrakstām virkni $3^n$ ( mod 13), tās periods ir (3, 9, 1). Perioda garums 3. Uzrakstām virkni $4^n$ (mod 3), tās periods ir (1). $4^5 \equiv 1$ (mod 3). Tātad $3^{4^5} \equiv 3^{3k+1} \equiv 3$ (mod 13);

uzrakstām virkni $6^n$ (mod 13), tās periods ir (6, 10, 8, 9, 2, 12, 7, 3, 5, 4, 11, 1). Perioda garums ir 12. Uzrakstām virkni $7^n$ (mod 12), tās periods ir (7, 1). Tātad $7^8 \equiv 1$ (mod 12). $6^{7^8} \equiv 6^{12k+1} \equiv 6$ (mod 13);

uzrakstām virkni $9^n$ (mod 13), tās periods ir (9, 3, 1). Uzrakstām virkni $10^n$ (mod 3), tās periods ir (1). $10^{11} \equiv 1$ (mod 3). Tātad $9^{10^{11}} \equiv 9^{3k+1} \equiv 9$ (mod 13).

$3^{4^5} + 6^{7^8} + 9^{10^{11}} \equiv 3 + 6 + 9 \equiv 18 \equiv 5$ (mod 13).

**4.31.** Tā kā 451 ir divu pirmskaitļu 11 un 41 reizinājums, tad pierāda, ka $122^{132} \equiv 1$ (mod 11) un $122^{132} \equiv 1$ (mod 41).

**4.32.** $190 = 2 \cdot 5 \cdot 9$. Pierāda, ka dotā izteiksme ir kongruenta ar 0 pēc moduļiem 2, 5 un 19.

**4.33.** a) No MFT izriet, ka $3^{12} \equiv 1$ (mod 13) un $5^{12} \equiv 1$ (mod 13). $3^{1974} + 5^{1974} = 3^{12\cdot 164+6} + 5^{12\cdot 164+6} \equiv 1 + 12 \equiv 0$ (mod 13).

b) No MFT seko, ka $2^{12} \equiv 1$ (mod 13) un $3^{12} \equiv 1$ (mod 13). Tātad, $2^{70} + 3^{70} = 2^{12\cdot 5+10} + 3^{12\cdot 5+10} \equiv 2^{10} + 3^{10}$ (mod 13). Uzrakstām virkni $2^n$ (mod 13), iegūstam, ka $2^{10} \equiv 10$ (mod 13). Virknes $3^n$ (mod13) periods ir (3, 9, 1); $3^{10} \equiv 3$ (mod 13). Tātad, summa $2^{70} + 3^{70} \equiv 10 + 3 \equiv 0$ (mod 13).

c) $(11^{1977} + 1)\ \ 11^3 \equiv 11^{1980} + 11^3 \equiv 11^{36\ 55} + 11^3 \equiv 1 + 36 = 0 \pmod{37}$. Tā kā $(11^3, 37) = 1$, tad $(11^{1977} + 1)$ dalās ar 37.

**4.34.** $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$. Veicam aprēķinus pēc šiem moduļiem.
$29 \equiv (-1) \pmod{3}$, $30 \equiv 0 \pmod{3}$, $31 \equiv 1 \pmod{3}$. Tātad dotais skaitlis $A = (-1)^{10k+1} + 0^{10k+3} + 1^{10k+1} \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$.
$29 = (-1) \pmod{5}$, $30 = 0 \pmod{5}$, $31 = 1 \pmod{5}$.
Tātad skaitlis $A = (-1)^{10k+1} + 0^{10k+3} + 1^{10k+1} \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$.
$29 \equiv 7 \pmod{11}$, $30 \equiv 8 \pmod{11}$, $31 \equiv 9 \pmod{11}$.
No MFT seko, ka $7^{10} \equiv 8^{10} \equiv 9^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Tātad
$A = 7^{10k+1} + 8^{10k+3} + 9^{10k+1} \equiv 7 + 8^3 + 9 \equiv 0 \pmod{11}$. No tā, ka A dalās ar 3, 5 un 11 seko, ka A dalās ar 165.

**4.35.** Uzrakstīsim virkni $2^m \pmod{18}$: (2, 4, 8, 16, 14, 10, 2, ...). Redzam, ka perioda garums ir 6, un $2^{6k+2} = 4 \pmod{18}$. Tātad $2^{2^{6k+2}} + 3 \equiv 2^{18s+4} + 3 \equiv 1^s \cdot 2^4 + 3 \equiv 0 \pmod{19}$.

**4.36.** Pierāda, ka $3^{4m} \equiv 1 \pmod{10}$ un $2^{4k+2} \equiv 4 \pmod{10}$. No šejienes iegūst, $5^{3^{4m}} - 2^{2^{4k+2}} = 5^{10s+1} - 2^{10t+4} \equiv 5 - 2^4 \equiv 0 \pmod{11}$. Mēs izmantojam MFT, lai pamatotu, ka $5^{10} \equiv 2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$.

**4.37.** Uzrakstām Fibonači virkni pēc moduļa 5: (1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, 0, 1, 1, ...). Tālāk virknes periods atkārtojas un redzams, ka katrs piektais loceklis ir kongruents ar nulli pēc moduļa 5.

**4.38.** Veicam aprēķinus atsevišķi pēc katra no moduļiem 11, 13, 61. $20^{15} \equiv 9^{15} \equiv 3^{10\ 3} \equiv 1 \pmod{11}$. Kongruence $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ seko no MFT. $20^{15} \equiv (20 + 4 \cdot 31)^{15} \equiv 144^{15} \equiv 12^{30} \equiv 1 \pmod{31}$. $20^{15} \equiv 81^{15} \equiv 3^{4 \cdot 15} \equiv 3^{60} \equiv 1 \pmod{61}$. Esam pierādījuši, ka $20^{15} - 1$ dalās ar 11, 31 un 61. Tātad $20^{15} - 1$ dalās ar $11 \cdot 31 \cdot 61$.

**4.39.** Uzrakstām virknes $5^n$ un $3^{n-1}$ pēc moduļa 8. Virknes $5^n \pmod{8}$ periods ir (5, 1), virknes $3^{n-1} \pmod{8}$ periods ir (1, 3). Abas ir periodiskas ar perioda garumu 2. Tātad, ja n ir pāra skaitlis, tad $5^n \equiv 1 \pmod{8}$, $3^{n-1} \equiv 3 \pmod{8}$ un $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1 \equiv 1 + 2 \cdot 3 + 1 \equiv 0 \pmod{8}$. Ja n ir nepāra skaitlis, tad $5^n \equiv 5 \pmod{8}$, $3^{n-1} \equiv 1 \pmod{8}$ un $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1 \equiv 0 \pmod{8}$. Redzam, ka abos gadījumos dotā izteiksme dalās ar 8.

**4.40.** Ņemot vērā, ka $84 = 3 \cdot 4 \cdot 7$, veicam aprēķinus atsevišķi katram modulim 3, 4 un 7.

**4.41.** a) bāze $4^1 \equiv 1+ 3 \cdot 1 \pmod 9$. Pieņemsim, ka $4^k \equiv 1+3k \pmod 9$ un pierādīsim, ka $4^{k+1} \equiv 1 + 3(k+1) \pmod 9$. $4^{k+1} \equiv 4^k \cdot 4 \equiv (1 + 3k)\, 4 \equiv 4 + 12k \equiv 4 + 3k \equiv 1 + 3(k+1) \pmod 9$.

b) bāze $5^1 \equiv 1 + 4 \cdot 1 \pmod{16}$. Pieņemsim, ka $5^k \equiv 1 + 4k \pmod{16}$. Pierādīsim, ka $5^{k+1} \equiv 1 + 4(k+1) \pmod{16}$. $5^{k+1} \equiv 5^k \cdot 5 \equiv (1 + 4k)\, 5 \equiv 5 + 20k \equiv 1 + 4(k+1) \pmod{16}$.

**4.42.** a) $6! \equiv 6 \pmod 7$;
b) $10! \equiv 10 \pmod{11}$;
c) $12! \equiv 12 \pmod{13}$;
d) $16! \equiv 16 \pmod{17}$.
Vispārīgā gadījumā, ja p ir pirmskaitlis, tad $(p - 1)! \equiv -1 \pmod p$. Tā ir Vilsona teorēma.

**5.1.** $n = 3$; ja $k \equiv 0 \pmod 3$, tad $k^2 \equiv 0 \pmod 3$; ja $k \equiv 1 \pmod 3$, tad $k^2 \equiv 1 \pmod 3$; ja $k \equiv 2 \pmod 3$, tad $k^2 \equiv 1 \pmod 3$. Redzam, ka iespējami atlikumi 0 un 1. Īsāk to pieraksta šādi:

| k (mod 3) | $k^2$ (mod 3) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |

$k^2 \in \{0, 1\} \pmod 3$;
$k^2 \in \{0, 1\} \pmod 4$;
$k^2 \in \{0, 1, 4\} \pmod 5$;
$k^2 \in \{0, 1, 3, 4\} \pmod 6$;
$k^2 \in \{0, 1, 2, 4\} \pmod 7$;
$k^2 \in \{0, 1, 4, 7\} \pmod 9$;
$k^2 \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\} \pmod{10}$.

**5.2.** Veselu skaitļu kubi pieņem sekojošas vērtības pēc moduļa n:
(mod 3) 0, 1, 2;
(mod 4) 0, 1, 3;
(mod 5) 0, 1, 2, 3, 4;
(mod 6) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6;
(mod 7) 0, 1, 6;
(mod 9) 0, 1, 8;
(mod 13) 0, 1, 5, 8, 12.

**5.3.** Aplūkojam visus gadījumus pēc moduļa 3:

| n (mod 3) | $n^2 + 1$ (mod 3) |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 2 |

Redzam, ka $n^2 + 1 \neq 0 \pmod 3$ nevienā gadījumā. Tātad $n^2 + 1$ nedalās ar 3 nekādiem veseliem skaitļiem n.

**5.4. - 5.10.** Uzdevumu atrisinājumi ir līdzīgi 5.3. uzdevuma atrisinājumam.

**5.11.** Aplūkojam visus gadījumus pēc moduļa 5:

| n (mod 5) | $n^5$ | 4n | $n^5 + 4n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 4 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 |
| 3 | 3 | 2 | 0 |
| 4 | 4 | 1 | 0 |

Redzam, ka visos gadījumos $n^5 + 4n$ dalās ar 5.

**5.12. - 5.15.** Uzdevumu atrisinājumi ir līdzīgi 11. uzdevuma atrisinājumam.

**5.16.** Aplūkojam visus gadījumus pēc moduļa 3:

| n (mod 3) | $n^3 - n$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0 |
| 2 | 0 |

Redzam, ka visiem n $n^3 - n$ dalās ar 3. Aplūkojam visus nepāra skaitļus pēc moduļa 8.

| n (mod 8) | $n^3 - n$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 3 | 0 |
| 5 | 0 |
| 7 | 0 |

Redzam, ka visiem nepāra skaitļiem n $n^3 - n$ dalās ar 8. Tātad visiem nepāra skaitļiem n $n^3 - n$ dalās ar 24.

**5.17.** Pārbaudām, ka visos gadījumos pēc moduļa 6 $n^3 \equiv n \pmod 6$. No tā seko, ka $a^3 + b^3 + c^3 \equiv a + b + c \equiv 0 \pmod 6$.

**5.18.** Aplūkojam visus gadījumus pēc moduļa 12, kuros (a, 12) = 1.

| a (mod 12) | $a^2 - 1$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 5 | 0 |
| 7 | 0 |
| 11 | 0 |

Redzam, ka $a^2 - 1$ dalās ar 12.

**5.19.** $n^2$ pēc moduļa 3 pieņem vērtības 0 un 1. Tātad $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 3$ tikai tad, kad $a^2 \equiv 0 \pmod 3$ un $b^2 \equiv 0 \pmod 3$. Tas iespējams tikai tad, kad a un b dalās ar 3.

**5.20.** $n^2$ pēc moduļa 7 pieņem vērtības 0, 1, 2 un 4. Tātad $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 7$ tikai tad, kad $a^2 \equiv b^2 \equiv 0 \pmod 7$, jeb a un b dalās ar 7.

**5.21.** No 4. un 5. uzdevuma seko, ka a un b dalās ar 3 un 7. Tātad $a^2 + b^2$ dalās ar $(3 \cdot 7)^2 = 441$.

**5.22.** $n^2$ pēc moduļa 3 pieņem vērtības 0 un 1. Ja neviens no skaitļiem x, y un z nedalās ar 3, tad vienādība $x^2 + y^2 = z^2$ pēc moduļa 3 nozīmētu, ka $1 + 1 \equiv 1 \pmod 3$, bet tas nav iespējams. Tātad vismaz viens no skaitļiem dalās ar 3.

**5.23.** a) Sastādām tabulu pēc moduļa 6:

| n (mod 6) | 2n + 1 | n + 1 | n(2n + 1)(n + 1) |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 3 | 2 | 0 |
| 2 | 5 | 3 | 0 |
| 3 | 1 | 4 | 0 |
| 4 | 3 | 5 | 0 |
| 5 | 5 | 0 | 0 |

Redzam, ka visiem n  n(2n+1)(n+1) dalās ar 6. Pārējos gadījumus pierādām, sastādot atbilstošās tabulas pēc dotajiem modumiem. Lai pierādītu,  ka skaitlis dalās ar 30, pārbaudām pēc modumiem 2, 3 un 5. Lai pierādītu, ka skaitlis dalās ar 120, pārbaudām pēc modumiem 3, 5 un 8.

**5.24.** $n^2$ pēc moduļa 8 pieņem vērtības 0, 1 un 4. Redzam, ka trīs šādu skaitļu summa nav vienāda ar 7 pēc moduļa 8.

**5.25.** Aplūkojam visas iespējamās p vērtības pēc moduļa 24. Ņemot vērā, ka p ir pirmskaitlis, tās var būt tikai šādas: 1, 5, 7, 13, 17, 19, 23. Visos šajos gadījumos $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{24}$.

**5.26.** Iepriekšējā uzdevumā pierādīts, ka $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$ un $q^2 \equiv 1 \pmod{24}$. Tātad $p^2 - q^2$ dalās ar 24.

**5.27.** Pirmo n naturālu skaitļu summa ir vienāda ar  n(n+1) / 2. Ja šīs summas pēdējais cipars būtu 2, 4, 7 vai 9, tad  n(n+1) pēc moduļa 10 pieņemtu vērtības 4 vai 8. sastādot atbilstošo tabulu redzam, ka n(n+1) šādas vērtības nepieņem.

**5.28.** $n^2$ pēc moduļa 8 pieņem vērtības 0, 1, 4. Pārbaudot redzam, ka $x^2 - 2y^2$ pēc moduļa 8 nevar pieņemt vērtības 3 un 5.

**5.29.** Ja $n \equiv 2 \pmod 5$, tad $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$. Ja $n \equiv 5 \pmod{13}$, tad $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{13}$. Ņemsim n = 65k + 57. Tādā gadījumā $n \equiv 2 \pmod 5$ un $n \equiv 5$

(mod 13). Šādu skaitļu ir bezgalīgi daudz, un visiem šiem skaitļiem $n^2 + 1$ dalās gan ar 5, gan ar 13.

**5.30.** Nepāra skaitļa kvadrāts pēc moduļa 8 pieņem tikai vērtību 1. Tātad $a^2 + b^2 + c^2 = 3 \pmod 8$, bet vesela skaitļa kvadrāts pēc moduļa 8 vērtību 3 nepieņem.

**5.31.** Pēc moduļa 4 vesela skaitļa kvadrāts pieņem vērtības 0 un 1. Tātad, ja $a^2 - 3b^2 = 8$, tad $0 \equiv a^2 - 3b^2 \equiv a^2 + b^2 \pmod 4$, kas iespējams tikai tad, ja $a^2 \equiv b^2 \equiv 0 \pmod 4$. Tātad a un b ir pāra skaitļi: $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $a_1^2 - 3b_1^2 = 2$. Pēc moduļa 8 vesela skaitļa kvadrāti pieņem vērtības 0, 1 un 4. Redzam, ka kongruence $a_1^2 - 3b_1^2 \equiv 2 \pmod 8$ nav iespējama.

**5.32.** Naturālu skaitļu kvadrāti pēc moduļa 9 pieņem vērtības 0, 1, 4 un 7, Trīs šādi skaitļi pēc moduļa 9 summā dod 0 tikai tādā gadījumā, ja starp tiem ir vienādi skaitļi: (4+4+1, 1+1+7, 7+7+4, 0+0+0). Izvēloties šos kongruentos pēc moduļa 9 skaitļus, mēs iegūsim prasīto skaitļu pāri.

**5.33.** Nevar būt, jo šis skaitlis ir kongruents ar 2 pēc moduļa 3, bet vesela skaitļa kvadrāts pēc moduļa 3 nav vienāds ar 2.

**5.34.** Ja $p = 2$, tad $p + 10$ nav pirmskaitlis; ja $p = 3$, tad visi skaitļi $p$, $p + 10$ un $p + 14$ ir pirmskaitļi. Ja $p > 3$, tad aplūkojam 3 gadījumus: $p \equiv 0 \pmod 3$, tad p nav pirmskaitlis, jo p dalās ar 3;
$p \equiv 1 \pmod 3$, tad $p + 14 \equiv 0 \pmod 3$ un $p + 14$ nav pirmskaitlis;
$p \equiv 2 \pmod 3$, tad $p + 10 \equiv 0 \pmod 3$ un $p + 14$ nav pirmskaitlis.
Atbilde: $p = 3$.

**5.35.** Aplūkojam 3 gadījumus pēc moduļa 3:
$p \equiv 0 \pmod 3$, p nav pirmskaitlis, izņemot gadījumu $p = 3$;
$p \equiv 1 \pmod 3$, $2p+1 \equiv 0 \pmod 3$ un $2p+1$ nav pirmskaitlis;
$p \equiv 2 \pmod 3$, $4p+1 \equiv 0 \pmod 3$ un $4p+1$ nav pirmskaitlis.
Tātad, ja p un $2p+1$ ir pirmskaitļi, tad $4p+1$ nevar būt pirmskaitlis.

**5.36.** Ja $p = 3$, tad $8p^2 + 1 = 73$ ir pirmskaitlis. Ja $p > 3$, tad p nedalās ar 3, un tātad $p \equiv 1 \pmod 3$ vai $p \equiv -1 \pmod 3$. Abos gadījumos $8p^2+1 \equiv 8 + 1 \equiv 0 \pmod 3$, t.i. $8p^2 + 1$ dalās ar 3 un nevar būt pirmskaitlis.
Atbilde: $p = 3$.

**5.37.** Aplūkojam n vērtības pēc moduļa 6.
Ja $n \equiv 0 \pmod 6$, tad $n\,2^n+1 \equiv 0 \cdot 2^n+1 \equiv 1 \pmod 3$.
Ja $n \equiv 1 \pmod 6$, tad $n\,2^n+1 \equiv 1 \cdot 2^n+1 \equiv 2^{6k+1}+1 \equiv 1^k\,2+1 \equiv 0 \pmod 3$.
Ja $n \equiv 2 \pmod 6$, tad $n\,2^n+1 \equiv 2 \cdot 2^n+1 \equiv 2^{n+1}+1 \equiv 2^{6k+3}+1 \equiv 2^3+1 \equiv 0 \pmod 3$.

Ja $n \equiv 3 \pmod 6$, tad $n\,2^n+1 \equiv 0 \cdot 2^n+1 \equiv 1 \pmod 3$.
Ja $n \equiv 4 \pmod 6$, tad $n\,2^n+1 \equiv 4 \cdot 2^n+1 \equiv 2^n+1 \equiv 2^{6k+4}+1 \equiv 2^4+1 \equiv 2 \pmod 3$.
Ja $n \equiv 5 \pmod 6$, tad $n\,2^n+1 \equiv 5 \cdot 2^n+1 \equiv 2 \cdot 2^n+1 \equiv 2^{n+1}+1 \equiv 2^{6k+6}+1 \equiv 1^{k+1}+1 \equiv 2 \pmod 3$.
Redzam, ka $n\,2^n+1$ dalās ar 3 tad un tikai tad, kad $n = 6k+1$ vai $n = 6k+2$.

**5.38.** Ja $p \neq 3$, tad aplūkojam 3 gadījumus:
$p \equiv 0 \pmod 3$, nevar būt, jo p jābūt pirmskaitlim.
$p \equiv 1 \pmod 3$, $p^2+ 2 \equiv 0 \pmod 3$ un $p^2+2$ nav pirmskaitlis.
$p \equiv 2 \pmod 3$, $p^2+ 2 \equiv 0 \pmod 3$ un $p^2+2$ nav pirmskaitlis.
Tātad atliek vienīgā iespēja $p = 3$. Šajā gadījumā $p^3+2 = 29$ ir pirmskaitlis.

**5.39.** Ja $p \neq 5$, tad aplūkojam visus gadījumus:
$p \equiv 0 \pmod 5$, p nav pirmskaitlis.
$p \equiv \pm1 \pmod 5$, $4p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$ un $4p^2+1$ nav pirmskaitlis.
$p \equiv \pm2 \pmod 5$, $6p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$ un $6p^2+1$ nav pirmskaitlis.
Tātad atliek vienīgā iespēja $p = 5$.

**5.40.** Pēc moduļa 9 veselu skaitļu kubi pieņem vērtības 0, 1 un 8. Redzam, ka $a^3+ b^3+4$ pēc moduļa 9 nevar pieņemt nevienu no šīm vērtībām.

**5.41.** $6n^3+3 = 3\,(2n^3+1)$ dalās ar 3. Tātad, ja šis skaitlis būtu vesela skaitļa sestā pakāpe, tad $(2n^3+1)$ būtu jādalās ar $3^5$, tātad arī ar 9. Pēc moduļa 9, $n^3$ var pieņemt vērtības 0, 1 un 8. Tātad $2n^3+1$ pieņem vērtības 1, 3 un 8. Redzam, ka šis skaitlis ar 9 nedalās.

**5.42.** Pēc moduļa 3 kvadrāti pieņem vērtības 0 un 1. Tātad, ja $x^2+ y^2 \equiv z^2 \pmod 3$, tad vai nu x vai y dalās ar 3. Tas nozīmē, ka x y dalās ar 3.
Abi skaitļi x un y nevar būt nepāra skaitļi, jo tādā gadījumā $z^2 = x^2+y^2 \equiv 2 \pmod 4$, bet tā nevar būt. Ja abi skaitļi x un y ir pāra skaitļi, tad x y dalās ar 4. Atliek pēdējais gadījums: viens no skaitļiem (teiksim x) ir pāra, bet otrs - y ir nepāra. Tādā gadījumā pēc moduļa 8 iegūstam $x^2+ 1 \equiv 1 \pmod 8$ (nepāra skaitļa kvadrāts pēc moduļa 8 ir kongruents ar 1). Tātad $x^2$ dalās ar 8, un x dalās ar 4. Redzam, ka visos gadījumos x y dalās ar 12.

**6.1.** Ievietojam x vietā vērtības {0, 1, 2, 3 4} (mod 5). Iegūstam

$3 \cdot 0 \equiv 0 \pmod 5$,
$3 \cdot 1 \equiv 3 \pmod 5$,
$3 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 5$,
$3 \cdot 3 \equiv 4 \pmod 5$,

$3 \cdot 4 \equiv 2 \pmod{5}$.
Redzam, ka prasītā kongruence $3x \equiv 2$ izpildās tikai x vērtībai $x \equiv 4 \pmod{5}$.

**6.2.** $x \equiv 3 \pmod{7}$.

**6.3.** $x \in \{2, 5\} \pmod{6}$.

**6.4.** $x \in \{2, 6, 10\} \pmod{12}$.

**6.5.** $x \equiv 10 \pmod{11}$.

**6.6.** $x \in \{1, 3\} \pmod{4}$.

**6.7.**

**6.8.**

**6.9.** $x \equiv 4 \pmod{6}$.

**6.10.** $x \in \{4, 6\} \pmod{7}$.

**6.11.** $x \equiv 4 \pmod{5}$.

**6.12.** $x \in \{2, 4\} \pmod{7}$.

**6.13.** $x \in \{1, 2, 4\} \pmod{7}$.

**6.14.** $x \equiv 0 \pmod{3}$, $y \equiv 0 \pmod{3}$.

**6.15.** $\{(0; 1), (0; 3), (2; 1), (2; 3)\} \pmod{4}$.

**6.16.** $\{(0; 1), (0; 2), (0; 4), (1; 0), (2; 0), (4; 0)\} \pmod{7}$.

**6.17.** $\{(0; 3), (1; 1), (2; 4), (3; 0), (4; 2)\} \pmod{5}$.

**6.18.** $x \equiv 8 \pmod{25}$.

**6.19.** $x \equiv 21 \pmod{30}$.

**6.20.** $16x \equiv 14 \pmod{40}$. Tā kā $(16, 40) = 8$, un 14 nedalās ar 8, tad kongruencei nav atrisinājumu.

**6.21.** $26x \equiv 14 \pmod{42}$. Tā kā $(26, 42) = 2$, un $2 \mid 14$, tad kongruencei ir divi atrisinājumi. Izdalām kongruenci ar 2:

$13x \equiv 7 \pmod{21}$,
$0 \equiv 7 + 21y \pmod{13}$,
$0 \equiv 7 + 8y \pmod{13}$,
$13z = 7 + 8y$,
$13z \equiv 7 \pmod{8}$,
$5z \equiv 7 \pmod{8}$,

$5z = 7 + 8u$,
$0 \equiv 7 + 8u \pmod 5$,
$0 \equiv 2 + 3u \pmod 5$,
$u \equiv 1 \pmod 5$; $u = 1$; $z = 3$; $y = 4$; $x = 7$.
$x \equiv 7 \pmod{21}$. Mums jānosaka x vērtības pēc sākotnējā kongruences moduļa 42.
Ja $x \equiv 7 \pmod{21}$, tad $x \equiv 7 \pmod{42}$ vai $x \equiv 7 + 21 = 28 \pmod{42}$.
Atbilde: $x \in \{7, 28\} \pmod{42}$.

**6.22.** $24x \equiv 16 \pmod{27}$.

Tā kā $(24, 27) = 3$, un 16 nedalās ar 3, tad kongruencei nav atrisinājuma.

**6.23.** $x \equiv 2 \pmod{59}$.

**6.24.** $x \in \{28, 57\} \pmod{58}$.

**6.25.**

**6.26.** $x \equiv 5 \pmod{45}$.

**6.27.** $x \equiv 4 \pmod 5$, $x \equiv 1 \pmod 2$.

No pirmās kongruences izsakām x formā $x = 4 + 5y$ un ievietojam otrajā kongruencē:
$4 + 5y \equiv 1 \pmod 2$,
$y \equiv 1 \pmod 2$. Ievietojot vienādojumā $x = 4 + 5y$, iegūstam $x = 9$.
Atbilde: $x \equiv 9 \pmod{10}$.

**6.28.** $x \equiv 3 \pmod 6$, $x \equiv 4 \pmod 5$.
$x = 3 + 6y$,
$3 + 6y \equiv 4 \pmod 5$,
$y \equiv 1 \pmod 5$; $y = 1$; $x = 9$.
Atbilde: $x \equiv 9 \pmod{30}$.

**6.29.** $x \equiv 7 \pmod{11}$, $x \equiv 2 \pmod 7$.
$x = 7 + 11y$,
$7 + 11y \equiv 2 \pmod 7$,
$4y \equiv 2 \pmod 7$,
$y \equiv 4 \pmod 7$; $y = 4$; $x = 51$.
Atbilde: $x \equiv 51 \pmod{77}$.

**6.30.** $x \equiv 113 \pmod{216}$.

**6.31.** $x \equiv 82 \pmod{110}$.

**6.32.** $x \equiv 50 \pmod{144}$.

**6.33.** $x^2 \equiv 6 \pmod{5^2}$.

Sākumā atrisinām kongruenci $x^2 \equiv 6 \pmod 5$,
$x^2 \equiv 1 \pmod 5$;
$x \in \{1, 4\} \pmod 5$.
Katru no atrisinājumiem pacelsim līdz sākotnējās kongruences atrisinājumam.
$x \equiv 1 \pmod 5$, $x = 1 + 5y$.
Ievietosim šo izteiksmi sākotnējā kongruencē:
$(1 + 5y)^2 \equiv 6 \pmod{5^2}$,
$1 + 10y + 25y^2 \equiv 6 \pmod{5^2}$,
$10y \equiv 5 \pmod{5^2}$.
Izdalīsim kongruenci ar 5:
$2y \equiv 1 \pmod 5$, $y \equiv 3 \pmod 5$; $y = 3$; $x = 1 + 5 \cdot 3 = 16$.
Līdzīgi pacelsim otru atrisinājumu:
$x \equiv 4 \pmod 5$, $x = 4 + 5y$,
$(4 + 5y)^2 \equiv 6 \pmod{5^2}$,
$16 + 40y + 25y^2 \equiv 6 \pmod{5^2}$,
$40y + 10 \equiv 0 \pmod{5^2}$,
$8y + 2 \equiv 0 \pmod 5$,
$3y + 2 \equiv 0 \pmod 5$, $y \equiv 1 \pmod 5$; $y = 1$; $x = 9$.
Atbilde: $x \in \{9, 16\} \pmod{25}$.

**6.34.** $x^2 \equiv 5 \pmod{3^3}$.
Sākumā atrisinām kongruenci $x^2 \equiv 5 \pmod 3$. Tai nav atrisinājumu. Tātad nav atrisinājumu arī sākotnējai kongruencei.

**6.35.** $x^2 \equiv 7 \pmod{3^3}$.

$x^2 \equiv 7 \pmod 3$; $x \in \{1, 2\} \pmod 3$.
Pirmā sakne:
$x = 1 + 3y$; $(1 + 3y)^2 \equiv 7 \pmod{3^2}$,
$1 + 6y + 9y^2 \equiv 7 \pmod 9$,
$6y \equiv 6 \pmod 9$,
$2y \equiv 2 \pmod 3$; $y \equiv 1 \pmod 3$; $y = 1$; $x = 4$.
$x = 4 + 9z$; $(4 + 9z)^2 \equiv 7 \pmod{3^3}$,
$16 + 72z + 81z^2 \equiv 7 \pmod{3^3}$,
$9 + 72z \equiv 0 \pmod{3^3}$,
$1 + 8z \equiv 0 \pmod 3$,

$1 + 2z \equiv 0 \pmod 3$; $z = 1$; $x = 13$.
Otrā sakne:
$x = 2 + 3y$; $(2 + 3y)^2 \equiv 7 \pmod{3^2}$,
$4 + 12y \equiv 7 \pmod{3^2}$,
$4y \equiv 1 \pmod 3$; $y = 1$; $x = 5$.
$x = 5 + 9z$; $(5 + 9z)^2 \equiv 7 \pmod{3^3}$,
$25 + 90z \equiv 7 \pmod{3^3}$,
$2 + 10z \equiv 0 \pmod 3$,
$2 + z \equiv 0 \pmod 3$; $z = 1$; $x = 13$.
Atbilde: $x \in \{13, 14\} \pmod{27}$.

**6.36.**

**6.37.** $x^3 \equiv 4 \pmod{3^3}$.

$x^3 \equiv 4 \pmod 3$; $x \equiv 1 \pmod 3$.
$x = 1 + 3y$; $(1 + 3y)^3 \equiv 4 \pmod{3^2}$,
$1 + 9y + 27y^2 + 27y^3 \equiv 4 \pmod 9$,
$1 \equiv 4 \pmod 9$.
Pretruna. Tātad kongruencei nav atrisinājuma.

**6.38.** $x \equiv 63 \pmod{125}$.

**6.39.**

**6.40.** $x \in \{12, 17,20\} \pmod{49}$.

**6.41.** $x \equiv 16 \pmod{27}$.

**6.42.** $x \equiv 113 \pmod{125}$.

**6.43.** $x^2 \equiv 1 \pmod{8 \cdot 5}$.
Atsevišķi atrisinām kongruences
$x^2 \equiv 1 \pmod 8$; $x \in \{1, 3, 5, 7\} \pmod 8$,
$x^2 \equiv 1 \pmod 5$; $x \in \{1, 4\} \pmod 5$.
Sākotnējai kongruencei būs 8 atrisinājumi, kurus iegūsim izmantojot ķīniešu teorēmu.
$x \equiv 1 \pmod 8$, $x \equiv 1 \pmod 5$; $x \equiv 1 \pmod{40}$;
$x \equiv 1 \pmod 8$, $x \equiv 4 \pmod 5$; $x \equiv 9 \pmod{40}$;
$x \equiv 3 \pmod 8$, $x \equiv 1 \pmod 5$; $x \equiv 11 \pmod{40}$;
$x \equiv 3 \pmod 8$, $x \equiv 4 \pmod 5$; $x \equiv 19 \pmod{40}$;
$x \equiv 5 \pmod 8$, $x \equiv 1 \pmod 5$; $x \equiv 21 \pmod{40}$;
$x \equiv 5 \pmod 8$, $x \equiv 4 \pmod 5$; $x \equiv 29 \pmod{40}$;
$x \equiv 7 \pmod 8$, $x \equiv 1 \pmod 5$; $x \equiv 31 \pmod{40}$;

$x \equiv 7 \pmod 8$, $x \equiv 4 \pmod 5$; $x \equiv 39 \pmod{40}$;
Atbilde: $x \in \{1, 9, 11, 19, 21, 29, 31, 39\} \pmod{40}$.

**6.44.** $x^3 \equiv 10 \pmod{5 \cdot 11}$.
$x^3 \equiv 10 \pmod 5$; $x \equiv 0 \pmod 5$.
$x^3 \equiv 10 \pmod{11}$; $x \equiv 10 \pmod{10}$.
Izmantojot ķīniešu teorēmu iegūstam, ka $x \equiv 10 \pmod{55}$.

**6.45.** $x \in \{15, 25, 30\} \pmod{35}$.

**6.46.** $x \in \{2, 5, 11, 17, 20, 26\} \pmod{30}$.

**6.47.** $x \in \{22, 76, 122, 176\} \pmod{225}$.

## Literatūra

1. A.Bērziņš. Praktikums elementārajā skaitļu teorijā. Rīga, 1994.
2. A.Bērziņš. Uzdevumi elementārajā skaitļu teorijā. 1., 2. daļas. Rīga, 1992.; 3. daļa. Rīga, 1993.
3. E.Mihelovičs. Skaitļu teorija. Rīga, 1995.
4. I.Vinogradovs. Skaitļu teorijas pamati (krievu val.). Maskava, 1965.
5. P.G. Lejeune Dirichlet. Vorlesungen uber Zahlentheorie. Braunschweig, 1894.
6. W. Sierpinski. 200 Zadan z elementarnej teorii liczb. Warszawa, 1964.
7. W. Sierpinski. Elementary theory of numbers. Warszawa, 1964.