

# Senioru IMO treniņš 6

Šis ir neobligātais treniņš senioru nodarbību dalībniekiem (piedalīties var jebkurš interesēts). Katras divas nedēļas (svētdien) tiks publicēta šāda izlase ar uzdevumiem, uzdevumu sarežģītība ir aptuveni IMO līmeņa uzdevumi vai mazliet vieglāk. Šoreiz ir 4 uzdevumi, pa 1 no katras nozares (ģeometrija, algebra, skaitļu teorija, kombinatorika). Risinājumus vai jautājumus sūtīt uz [jevgenijs.vihrovs@lu.lv](mailto:jevgenijs.vihrovs@lu.lv) līdz (sestdienai) 18.07. 23:59. Katrs uzdevums tiek vērtēts līdz 7 punktiem. Rezultāti tiks publicēti NMS mājaslapā.

**1. uzdevums.** Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālo skaitļu  $n$  tādu, ka eksistē  $n$  dažādi naturāli skaitļi  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , kuriem skaitlis

$$a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts.

**2. uzdevums.** Noteikt, kādu vislielāko vērtību var pieņemt izteiksme

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i + x_j) \sqrt{x_i x_j},$$

kur  $x_1, x_2, x_3$  un  $x_4$  ir nenegatīvi reāli skaitļi, kuru summa ir 1. Noteikt arī, pie kādām  $x_i$  vērtībām šī vērtība tiek sasniegta.

**3. uzdevums.** Šaurleņķu trijstūrī  $ABC$  ir spēkā  $AB < AC$ . Ievilktais riņķa līnijas centrs ir  $I$  un tā pieskarās malai  $BC$  punktā  $D$ . Taisne  $AD$  krusto  $ABC$  apvilktu riņķa līniju vēlreiz punktā  $E$ . Malas  $BC$  viduspunkts ir  $M$  un  $N$  ir loka  $BAC$  viduspunkts. Taisne  $EN$  krusto loku  $BIC$  punktā  $P$ . Pierādīt, ka taisnes  $AD$  un  $MP$  ir paralēlas.

**4. uzdevums.** Bezgalīgā rūtiņu plaknē  $n \geq 2$  rūtiņas tiek iekrāsotas sarkanā krāsā. Par īpašu saucsim taisnstūri, kas sastāv tikai no rūtiņām, un kuram kādas divas pretējas stūra rūtiņas abas ir nokrāsotas sarkanā krāsā (var būt nokrāsotas arī 3 vai 4). Viena sarkana rūtiņa vai taisnstūris ar vienas malas garumu 1, kuram divas gala rūtiņas ir sarkanas, arī ir īpaši. Dotajai  $n$  sarkano rūtiņu konfigurācijai ar  $N$  apzīmēsim lielāko sarkano rūtiņu skaitu, kas atrodas kāda īpaša taisnstūra iekšienē. Atrast vismazāko  $N$  vērtību pāri visām  $n$  sarkano rūtiņu konfigurācijām.