

# Senioru IMO treniņš 7

Šis ir neobligātais treniņš senioru nodarbību dalībniekiem (piedalīties var jebkurš interesēts). Katras divas nedēļas (svētdien) tiks publicēta šāda izlase ar uzdevumiem, uzdevumu sarežģītība ir aptuveni IMO līmeņa uzdevumi vai mazliet vieglāk. Šoreiz ir 4 uzdevumi, pa 1 no katras nozares (ģeometrija, algebra, skaitļu teorija, kombinatorika). Risinājumus vai jautājumus sūtīt uz jevgenijs.vihrovs@lu.lv līdz (šoreiz svētdienai) 02.08. 23:59. Katrs uzdevums tiek vērtēts līdz 7 punktiem. Rezultāti tiks publicēti NMS mājaslapā.

**1. uzdevums.** Atrast visus naturālus skaitļus  $n > 1$  tādus, kuriem ir spēkā šāda īpašība: ja  $a_1 < a_2 < \dots < a_k$  ir naturāli skaitļi, mazāki par  $n$  un savstarpēji pirmskaitļi ar  $n$ , tad visiem  $i = 1, 2, \dots, k - 1$  summa  $a_i + a_{i+1}$  nedalās ar 3 bez atlikuma.

**2. uzdevums.** Teiksim, ka nenegatīvu reālu skaitļu virkne  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ir *ieliekama* intervālā  $[b, c]$ , ja eksistē tādi skaitļi  $x_0, x_1, \dots, x_k \in [b, c]$ , ka

$$|x_i - x_{i-1}| = a_i \quad \text{katram } i = 1, 2, \dots, k.$$

Virkne ir *normalizēta*, ja visi tās locekļi nepārsniedz 1. Pierādīt katram naturālam  $n$ :

(a) Katra normalizēta virkne garumā  $2n + 1$  ir ieliekama intervālā  $[0, 2 - \frac{1}{2^n}]$ .

(a) Eksistē normalizēta virkne garumā  $4n + 3$ , kura ir ieliekama intervālā  $[0, 2 - \frac{1}{2^n}]$ .

**3. uzdevums.** Izliekts četrstūris  $ABCD$  ir apvilktas ap riņķa līniju  $k$ . Taisnes  $AD$  un  $BC$  krustojas punktā  $P$ , un trijstūru  $PAB$  un  $PCD$  apvilktās riņķa līnijas krustojas vēlreiz punktā  $X$ . Pierādīt, ka pieskares no punkta  $X$  pret riņķa līniju  $k$  veido vienādus leņķus ar taisnēm  $AX$  un  $CX$ , attiecīgi.

**4. uzdevums.** Uz sfēriskas planētas  $X$  virsmas atrodas  $2n$  degvielas uzpildes stacijas. Katra stacija ir sapārota ar citu staciju, kas atrodas diametrāli pretējā punktā. Katrā stacijā arī ir ierobežots fiksēts daudzums degvielas (ja stacijā ir  $v$  daudzums degvielas, un mašīna uzpildas ar  $d$  degvielas vienībām, tad pāri paliek  $v - d$  degvielas). Degvielas daudzums stacijās var būt atšķirīgs. Staciju izkārtojums un degvielas daudzums tajās ir tāds, ka mašīna ar tukšu, bet pietiekoši lielu (var pieņemt, bezgalīgi lielu) bāku vienmēr var uzsākt braucienu no kādas stacijas, un tikt līdz šīs stacijas sapārotajai stacijai, iespējams, pa ceļai uzpildot degvielu stacijās pa ceļam.

Kuriem  $n$  šādai mašīnai ar tukšu bāku vienmēr ir iespējams sākt no kādas degvielas stacijas un apceļot visas stacijas vienā ceļojumā? Pieņemt, ka mašīna patērē fiksētu degvielas daudzumu vienā kilometrā.