

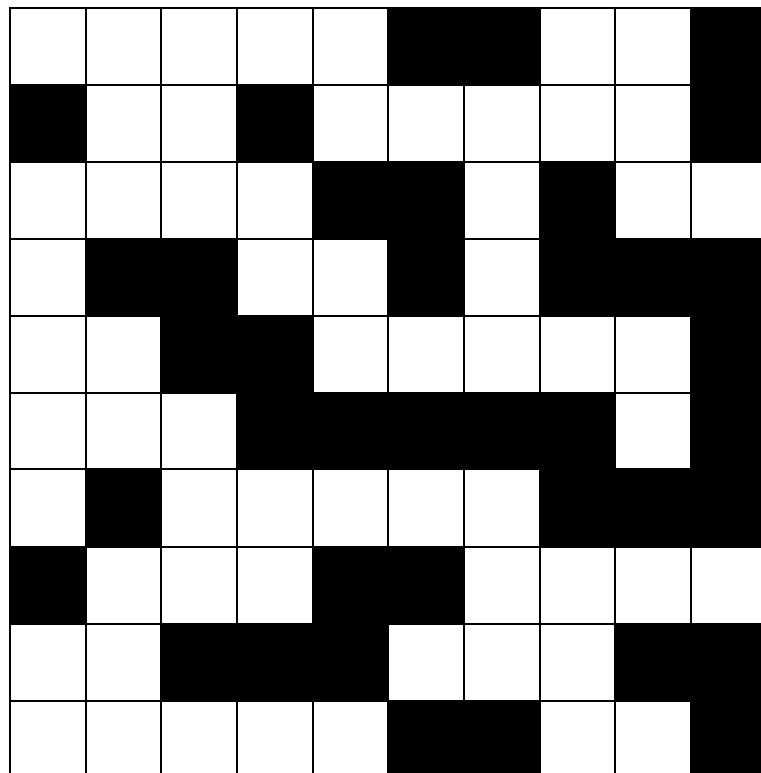
Jauno matemātikas konkurss ar prof. Cipariņa izaicinājumu

2021./2022. mācību gads

1. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Skaitļu mīkla

Aprēķini doto izteiksmju vērtības un iegūtos skaitļus ieraksti krustskaitļu mīklā!



Horizontāli

- 286 + 402
- 8486 – 2571
- 81 – 23
- 11 · 4
- 18807 + 24451
- 26 · 28
- 72749 – 20208
- 31 · 3
- 624 : 13
- 10395 – 2887
- 53 · 1
- 65151 – 16705
- 660 : 10
- 79 · 1
- 4325 + 6922
- 216034 : 7
- 319 – 99

Vertikāli

- 4260 : 5
- 8805 : 15
- 894 : 6
- 76 · 57
- 23398 + 28078
- 37 · 2
- 1121 : 19
- 15 + 19
- 393 – 112
- 6 · 7
- 71 – 18
- 9 + 11
- 2492 : 14
- 255 + 410
- 129 – 40
- 512 : 8
- 104 + 126

Atrisinājums. Izpildot darbības, iegūst skaitļus, kuru izvietojums parādīts krustskaitļu mīklā.

Horizontāli

- 286 + 402 = 688
- 8486 – 2571 = 5915
- 81 – 23 = 58
- 11 · 4 = 44
- 18807 + 24451 = 43258
- 26 · 28 = 728
- 72749 – 20208 = 52541
- 31 · 3 = 93
- 624 : 13 = 48
- 10395 – 2887 = 7508
- 53 · 1 = 53
- 65151 – 16705 = 48446
- 660 : 10 = 66
- 79 · 1 = 79
- 4325 + 6922 = 11247
- 216034 : 7 = 30862
- 319 – 99 = 220

Vertikāli

- 4260 : 5 = 852
- 8805 : 15 = 587
- 894 : 6 = 149
- 76 · 57 = 4332
- 23398 + 28078 = 51476
- 37 · 2 = 74
- 1121 : 19 = 59
- 15 + 19 = 34
- 393 – 112 = 281
- 6 · 7 = 42
- 71 – 18 = 53
- 9 + 11 = 20
- 2492 : 14 = 178
- 255 + 410 = 665
- 129 – 40 = 89
- 512 : 8 = 64
- 104 + 126 = 230

1	1	2	4	7			6	6	
	4	8		4	8	4	4	6	
5	9	1	5			3		5	8
1			9	3		3			
4	4			4	3	2	5	8	
7	2	8						9	
6		5	2	5	4	1			
	2	2	0			7	5	0	8
5	3				6	8	8		
3	0	8	6	2			7	9	

2. Klases pārgājiens

Kādas skolas 6.a un 6.b klases skolēni devās pārgājienā. Katra klase pārgājienu sāka no citas vietas un satikās norunātajā vietā pie ugunsкура. No 6.a klases pārgājienā piedalījās 9 skolēni, un viņiem līdzī bija pārtika 5 stundām. Satiekot 6.b klasi, izrādījās, ka viņi nebija paņēmuši līdzī pārtiku. Abas klases līdzī paņemto pārtiku sadalīja savā starpā, pie kam visiem kopā ar to pietika 3 stundām. Cik skolēnu no 6.b klases devās pārgājienā?

Atrisinājums. Ieviešam jēdzienu *pārtikas vienība* – pārtikas daudzums, kas nepieciešams vienam skolēnam vienā stundā. Tā kā no 6.a klases bija 9 skolēni un līdzī paņemtās pārtikas viņiem pietiku 5 stundām, tad viņiem kopā bija $9 \cdot 5 = 45$ *pārtikas vienības*. Pēc satikšanās ar 6.b klases skolēniem pārtikas, visiem skolēniem pietika 3 stundām, tātad kopējais skolēnu skaits bija $45 : 3 = 15$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka no 6.b klases pārgājienā devās $15 - 9 = 6$ skolēni.

Piezīme. Uzdevumu var risināt arī, izmantojot apgriezto proporcionalitāti vai izmantojot darbības ar daļām.

3. Atkārtosim dalīšanu

Atrodi tādu mazāko skaitli A , kam vienlaicīgi izpildās:

- A dalot ar 45, atlikumā iegūst 4;
- A dalot ar 454, atlikumā iegūst 45;
- A dalot ar 4545, atlikumā iegūst 454;
- A dalot ar 45454, atlikumā iegūst 4545.

Atrisinājums. Mazākais skaitlis, kam izpildās uzdevuma nosacījumi, ir 35641667749.

Piezīme. Tā kā neuzmanības dēļ bijām formulējuši uzdevumu, kura pamatojums (neizmantojot datora palīdzību) ir sarežģīts pamatskolas skolēniem, maksimālais punktu skaits tika piešķirts visiem dalībniekiem, kas bija atraduši skaitli, neskatoties uz to, vai šis rezultāts tika iegūts izmantojot analītiskus spriedumus, datorprogrammu, Excel vai vienkārši uzminēts.

4. Zīmuļi uz skolotājas galda

Skolotājai Marutai uz galda ir viens zils un viens sarkans zīmuļu trauks un vairāki zīmuļi, uz kuriem uzrakstīti naturāli skaitļi tā, ka uz katra zīmuļa ir uzrakstīts tieši viens skaitlis un uzrakstītie skaitļi neatkārtojas. Skolotāja lūdz Lāsmu salikt zīmuļus traukos, ievērojot šādus noteikumus:

- zīmulim, uz kura ir uzrakstīts mazākais skaitlis, jāatrodas sarkanajā traukā;
- nevienā traukā nav zīmuļa, uz kura ir skaitlis, kas ir divu citu uz šajā traukā esošajiem zīmuļiem uzrakstīto skaitļu summa;
- nevienā traukā nav zīmuļa, uz kura ir skaitlis, kas ir divas reizes lielāks nekā skaitlis, kas uzrakstīts uz kāda cita šajā traukā esoša zīmuļa.

a) Parādi, kā, ievērojot skolotājas dotos noteikumus, salikt traukos zīmuļus, uz kuriem uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3 un 4.

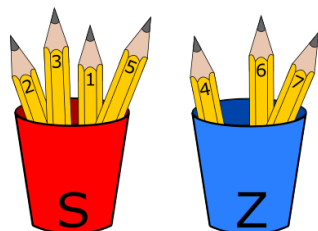
b) Parādi, kā, ievērojot skolotājas dotos noteikumus, salikt traukos zīmuļus, uz kuriem uzrakstīti skaitļi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 un 9.

c) Kāpēc, ievērojot noteikumus, traukos nevar salikt zīmuļus, uz kuriem uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3, 4 un 5?

d) Ja skolotājai uz galda būs trīs trauki – viens sarkans, viens zils un viens zaļš – vai Lāsmā, ievērojot dotos noteikumus, varēs salikt zīmuļus, uz kuriem uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 12 traukos tā, ka katrā traukā ir tieši četri zīmuļi?

Piemēram, zīmuļu, uz kuriem uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 7, izkārtojums pa traukiem, kā parādīts 1. att. neatbilst nosacījumiem, tāpēc, ka

- neizpildās otrais nosacījums: sarkanajā traukā atrodas gan zīmulis, uz kura uzrakstīts skaitlis 2, gan zīmulis, uz kura uzrakstīts skaitlis 3, gan zīmulis, uz kura uzrakstīts skaitlis 5 un $2 + 3 = 5$,
- neizpildās trešais nosacījums: sarkanajā traukā atrodas gan zīmulis, uz kura uzrakstīts skaitlis 1, gan zīmulis, uz kura uzrakstīts skaitlis 2 un skaitlis 2 ir divas reizes lielāks nekā skaitlis 1.



1. att.

Atrisinājums. a) Prasīto var izdarīt, liekot sarkanajā traukā zīmuļus ar uzrakstītiem skaitļiem 1 un 4, bet zilajā traukā – zīmuļus ar uzrakstītiem skaitļiem 2 un 3.

b) Prasīto var izdarīt, liekot sarkanajā traukā zīmuļus ar uzrakstītiem skaitļiem 2, 3, 8 un 9, bet zilajā traukā – zīmuļus ar uzrakstītiem skaitļiem 4, 5, 6 un 7.

c) Pēc pirmā nosacījuma sarkanajā traukā jāliek zīmulis ar skaitli 1, tātad zilajā traukā jāliek zīmulis ar skaitli 2, jo 2 ir divas reizes lielāks nekā skaitlis 1 un nevar atrasties kopā ar šo zīmuli (trešais nosacījums). Tā kā $4 = 2 \cdot 2$, tad zīmuli ar skaitli 4 jāliek sarkanajā traukā. Zīmulis ar skaitli 3 jāliek zilajā traukā, jo $1 + 3 = 4$ un tas nevar atrasties vienā traukā ar zīmuli, uz kura uzrakstīts skaitlis 1 (otrais nosacījums). Tā kā $5 = 1 + 4$ un $5 = 2 + 3$, tad zīmuli ar uzrakstītu skaitli 5 nevar ievietot ne zilajā, ne sarkanajā traukā (otrais nosacījums). Esam ieguvuši pretrunu, tātad esam pamatojuši, ka prasīto izdarīt nav iespējams.

d) Jā, prasīto var izdarīt. Piemēram, liekot sarkanajā traukā zīmuļus ar uzrakstītiem skaitļiem 1, 5, 8 un 12, zilajā traukā – zīmuļus ar uzrakstītiem skaitļiem 2, 6, 7 un 11, bet zaļajā traukā – zīmuļus ar uzrakstītiem skaitļiem 3, 4, 9 un 10.

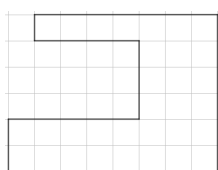
5. Vai vari salikt?

Astoņstūri, kas uzzīmēts uz rūtiņu lapas, saucim par maģisku, ja tā visas malas atrodas uz rūtiņu līnijām un to garumi ir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Ja, sākot ar vienu virsotni, astoņstūra malas ir sakārtotas viena pēc otras augošā vai dilstošā secībā, tad šādu astoņstūri sauc par perfektu. Piemēram, 2. att. ir uzzīmēts maģisks astoņstūris, bet 3. att. ir perfekts astoņstūris.

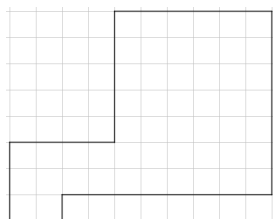
a) Izmantojot visas 4. att. dotās figūras, katru tieši vienu reizi, saliec maģisko astoņstūri!

b) Vai, izmantojot visas 4. att. dotās figūras, katru tieši vienu reizi, iespējams salikt 3. att. perfekto astoņstūri?

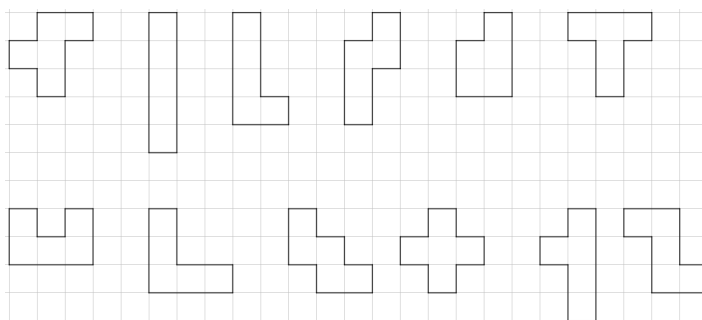
c) Atrodi vēl kādu citu daudzstūri, kuru var salikt no visām 4. att. dotajām figūrām!



2. att.



3. att.

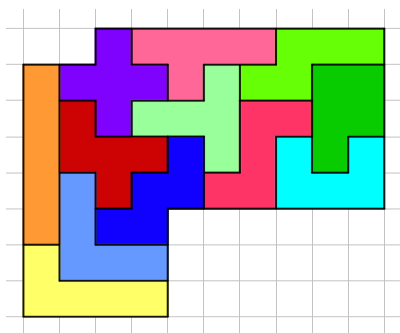


4. att.

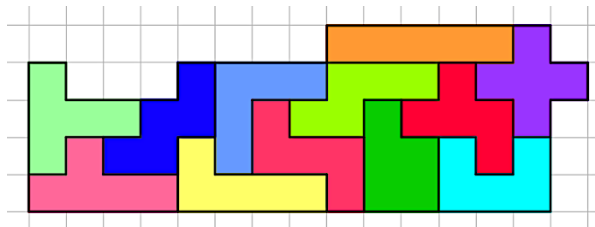
Atrisinājums. a) Saliktu maģisko astoņstūri skat., piemēram, 5. att.

b) Nē, nevar salikt, jo dotā perfektā astoņstūra laukums ir 52, bet visu pentamino laukumu summa ir 60, kas ir vairāk nekā 52.

c) Der jebkurš daudzstūris, kas iegūts, izmantojot visas 4. att. figūras, tā, lai šīs figūras nepārklātos un iegūtajam daudzstūrim nebūtu caurumu, piemēram, skat. 6. att.



5. att.



6. att.

6. Profesora Cipariņa tricikls

Profesora cipariņa triciklam ir trīs vienādas riepas, bet to nolietošanās ātrums atšķiras atkarībā no tā, kur tās novietotas – priekšā vai aizmugurē. Priekšējā riteņa riepa nolietojas pēc 30000 km, bet abas aizmugurējās tricikla riepas nolietojas pēc 20000 km. Braukšanas procesā riepas nolietojas vienmērīgi. Kādu lielāko attālumu Cipariņš var nobraukt ar trīs sākotnējām riepām un vienu rezerves riepu?

Atrisinājums. Nobraucot 1 km, riepa uz priekšā riteņa nolietojas par $\frac{1}{30000}$, bet katras aizmugurējā par $\frac{1}{20000}$. Tātad kopā pēc nobraukta kilometra tiek “iztērēta” $\frac{1}{30000} + \frac{1}{20000} + \frac{1}{20000} = \frac{4}{30000}$ riepa. Tā kā kopā ir 4 riepas, ieskaitot rezerves riepu, tad lielākais attālums, ko iespējams nobraukt, ir $4 \cdot \frac{30000}{4}$ km = 30000 km. Tagad tikai jāpārlicinās, ka šādu attālumu iespējams realizēt.

Apzīmēsim riepas ar burtiem A, B, C un D un cikliski mainīsim tās ik pēc 100 km, sekojot šādai shēmai:

Priekšējais ritenis	Aizmugurējais ritenis	Aizmugurējais ritenis	Rezerve
A	B	C	D
D	A	B	C
C	D	A	B
B	C	D	A

Šādi katra riepa ik pēc 400 km būs nolietota vienādi, jo katra no tām būs bijusi katrā pozīcijā. Pie tam katra no riepām būs nolietojusi $\frac{4}{300} = \frac{1}{75}$ no savas “dzīves”. Tas nozīmē, ka šo ciklu varam atkārtot 75 reizes jeb rezultātā nobraukt $75 \cdot 400$ km = 30000 km.

7. Svētku lente

Nākamais gads atzīmē 48. Profesora Cipariņa kluba pastāvēšanas gadadienu. Lai tam sagatavotos, Profesors Cipariņš izveidojis garu papīra lenti, uz kuras uzrakstīti 120 cipari, katrs no kuriem ir vai nu 4, vai 8. Skaitli sauc par palindromu, ja tā pieraksts nemainās, izlasot to no otra gala. Piemēram, palindromi ir 4; 884488 un 484. Pamatot, ka Profesors Cipariņš šo lenti var sagriezt ne vairāk kā 48 daļās tā, lai uz katra papīra gabaliņa būtu uzrakstīts palindroms.

Atrisinājums. Vispirms sagriezīsim Profesora Cipariņa lenti gabalos pa 5 cipariem. Šādi griežot, iegūsim 24 gabaliņus. Kopā ir iespējami $2^5 = 32$ gadījumi (jo katru ciparu var izvēlēties 2 veidos), kā varētu būt izkārtoti cipari 4 un 8 uz šiem gabaliņiem. Pamatosim, ka vai nu uz katra no šiem gabaliņiem ir uzrakstīts palindroms, vai arī to var sadalīt divās daļās tā, lai uz abām daļām būtu uzrakstīts palindroms. Simetrijas dēļ apskatīsim 16 iespējamus skaitļus (pārējos 16 skaitļus var iegūt, aizstājot “4” ar “8” un otrādi) un kā tos var sadalīt palindromos.

Skaitlis	Palindromi	Skaitlis	Palindromi
44444	44444	44448	4444 un 8
44484	44 un 484	44488	444 un 88
44844	44844	44848	44 un 848
44884	4 un 4884	44888	44 un 888
48444	484 un 44	48448	4 un 8448
48484	48484	48488	484 un 88
48844	4884 un 4	48848	4884 un 8
48884	48884	48888	4 un 8888

Tātad katru no esošajiem 24 gabaliņiem varam sagriezt ne vairāk kā divos gabaliņos, lai uz katras lapiņas iegūtu palindromu. Šādi rīkojoties, rezultātā mums būs ne vairāk kā 48 gabaliņi.