Jauno matemātiķu konkurss ar prof. Cipariņa izaicinājumu

2021./2022. mācību gads

2. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Ciparu izteiksmes

Rāmīšos ieraksti ciparus no 1 līdz 9 tā, lai visas vienādības būtu patiesas un viens no cipariem būtu izmantots tieši divas reizes, bet visi pārējie cipari būtu izmantoti katrs tieši vienu reizi!

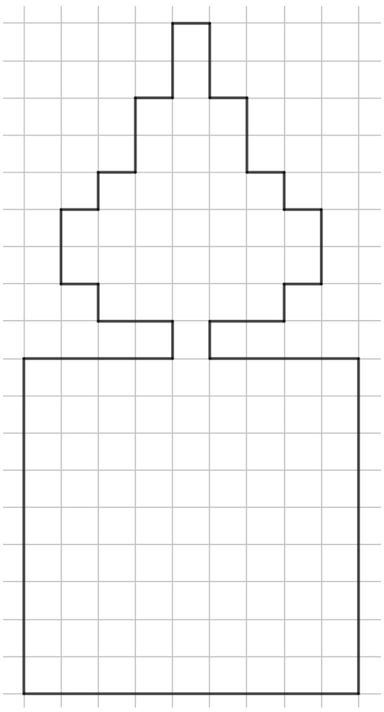
$$\square \cdot \square = \square - \square = \square : \square = \square - \square = \square : \square$$

Atrisinājums. Cipari ierakstāmi, piemēram, šādi:

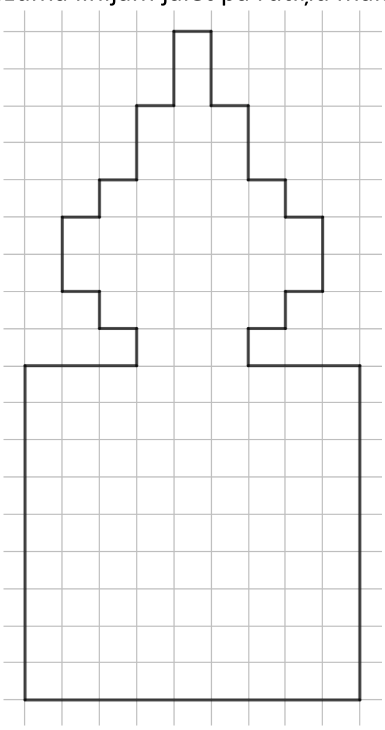
$$\boxed{2} \cdot \boxed{1} = \boxed{7} - \boxed{5} = \boxed{6} : \boxed{3} = \boxed{9} - \boxed{7} = \boxed{4} : \boxed{2}$$

2. Svētku sveces

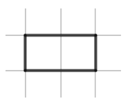
Klāt ir Latvijas svētku mēnesis – novembris. Vai **a)** 1. att., **b)** 2. att. doto sveci var sagriezt 3. att. dotajās figūrās tā, lai neviena rūtiņa nepaliek pāri? *Piezīme.* Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, 3. att. figūra var būt pagriezta.



1. att.



2. att.

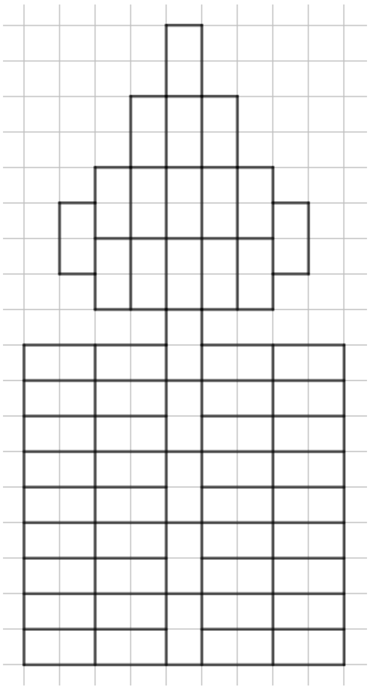


3. att.

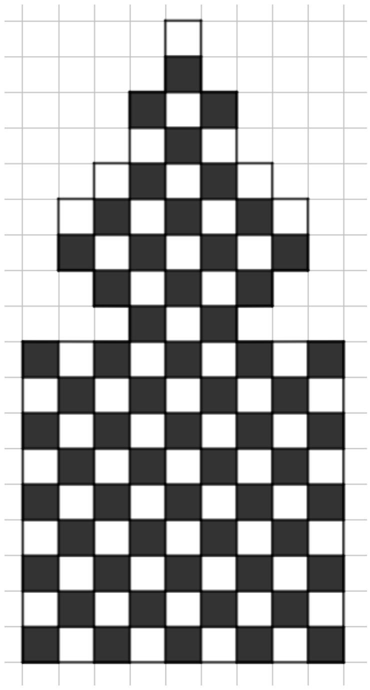
Atrisinājums

a) Prasīto var izdarīt, piemēra, skat. 4. att.

b) Nē, prasīto nevar izdarīt. Iekrāsosim visu sveci šaha galdiņa veidā (skat. 5. att.). Melnā krāsā ir nokrāsotas 59 rūtiņas, bet baltā krāsā – 57 rūtiņas. Lai kā svece tiktu griezta, 3. att. dotā figūra vienmēr noklāj vienu melnu un vienu baltu rūtiņu, tātad vienādu skaitu melno un balto rūtiņu. Tā kā melno un balto rūtiņu skaits nav vienāds, doto sveci nevar sagriezt 3. att. dotajās figūrās.



4. att.



5. att.

3. Halovīna konfektes

Halovīna svētku vakarā pie Annas tantes mājas durvīm pēc kārtas paviesojās 7 bērni. Annas tante katram bērnam teica: “Tu drīksti paņemt tieši pusi no traukā esošajām konfektēm un pēc tam vēl vienu konfekti no atlikušajām.” Kad katrs bērns no trauka bija paņēmis konfektes, trauks bija tukšs. Cik konfekšu traukā bija sākumā, ja zināms, ka katrs bērns varēja paņemt tieši pusi no traukā esošajām konfektēm, tas ir, neviena konfekte nebija jāsalauž vai kā citādi jāsadala?

Atrisinājums. Aplūkosim pretēju procesu: bērni, sākot ar pēdējo un beidzot ar pirmo, pēc kārtas pienāk pie konfekšu trauka un vispirms tajā ieliek vienu konfekti, bet pēc tam traukā esošo konfekšu daudzumu dubulto.

Pirms 7. bērna pienākšanas traukā ir 0 konfekšu. Pēc viņa darbībām traukā ir $(0+1)\cdot 2=2$ konfektes. Pēc 6. bērna pienākšanas traukā ir $(2+1)\cdot 2=6$ konfektes. Līdzīgi iegūstam skaitļu virkni $(6+1)\cdot 2=14$; $(14+1)\cdot 2=30$; $(30+1)\cdot 2=62$; $(62+1)\cdot 2=126$; $(126+1)\cdot 2=254$. Tātad traukā no sākuma bija 254 konfektes.

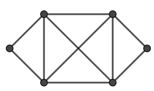
4. Pagalma štābiņi

Vecmāmiņa pa otrā stāva istabas logu vēro, ko viņas mazbērni dara pagalmā – viņi uzbūvējuši sešus “štābiņus” un starp tiem dubļos ieminuši vairākas taciņas. Katra taciņa sākas un beidzas pie kāda “štābiņa”, taciņas var krustoties.

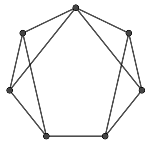
- **a)** Vai iespējams, ka no katra “štābiņa” iziet attiecīgi 2, 2, 4, 4, 4, 4 taciņas?
- **b)** Vai iespējams, ka no katra “štābiņa” iziet attiecīgi 1, 2, 2, 3, 4, 5 taciņas?
- **c)** Vēlāk mazbērni “štābiņus” uzbūvēja arī otrā mājas pusē. Kāds ir lielākais iespējamais uzbūvēto “štābiņu” skaits, ja vecmāmiņa pa logu redz 11 taciņas (katra taciņa savieno divus šajā mājas pusē uzbūvētos “štābiņus”) un no katra “štābiņa” iziet vismaz 3 taciņas?

Atrisinājums

- **a)** Jā, piemēram, skat. 6. att., kur ar punktiem apzīmēti “štābiņi”, bet ar līnijām – taciņas.
- **b)** Pamatosim, ka tas nav iespējams. Tā kā katrai taciņai ir divi gali, tad kopējam taciņu galu skaitam ir jābūt pāra skaitlim, bet $1+2+2+3+4+5=17$ ir nepāra skaitlis, tāpēc prasītais nav iespējams.
- **c)** Lielākais iespējamais “štābiņu” skaits, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, ir 7, skat., piemēram, 7. att. Pamatosim, ka vairāk kā 7 “štābiņi” nav iespējami. Tā kā vecmāmiņa pa logu redz 11 taciņas, tad kopā ir $11\cdot 2=22$ taciņu gali. Ja būtu uzbūvēti vismaz 8 “štābiņi” un no katra štābiņa izietu vismaz 3 taciņas, tad kopā būtu vismaz $8\cdot 3=24$ taciņu gali, kas ir vairāk nekā 22. Līdz ar to esam pamatojuši, ka 7 ir lielākais iespējamais uzbūvēto “štābiņu” skaits.



6. att.



7. att.

5. Ģimenes spēle

Brālis un māsa spēlē spēli. Brālis sauc ciparu un māsa ieraksta šo ciparu kādas “$*$” vietā (skat. 8. att.). Tā viņi turpina, kamēr katras zvaigznītes vietā ir ierakstīts kāds cipars.

$$\begin{array}{ccccc} & * & * & * & * \\ - & * & * & * & * \\ \hline \end{array}$$

8. att.

Brālis cenšas panākt, lai izveidoto skaitļu starpība ir pēc iespējas lielāka, savukārt māsa cenšas ierakstīt ciparus zvaigznīšu vietā tā, lai iegūto skaitļu starpība ir pēc iespējas mazāka. Pamato, ka

a) māsa var ierakstīt ciparus zvaigznīšu vietā tā, lai iegūtā starpība nebūtu lielāka kā 4000, neatkarīgi no tā, kādus skaitļus nosauca brālis;

b) brālis var nosaukt ciparus tā, lai iegūtā starpība būtu vismaz 4000 neatkarīgi no tā, kā māsa izkārtoja ciparus zvaigznīšu vietā!

Atrisinājums. Apzīmēsim ciparu “*kolonnas*” k_1, k_2, k_3, k_4 (skat. 9. att.).

$$\begin{array}{ccccc} & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ & * & * & * & * \\ - & * & * & * & * \\ \hline \end{array}$$

9. att.

Pieņemsim, ka spēlei ir divas fāzes. Otrā fāze sākas tajā brīdī, kad māsa kādu zvaigznīti no kolonnas k_1 aizstāj ar brāļa nosaukto ciparu.

Ja brālis sākumā nosauc mazu ciparu (tas, ir, 0, 1, 2, 3) vai arī lielu ciparu (tas ir, 6, 7, 8, 9), tad māsa nosaukto ciparu ievieto kolonnā k_1 zvaigznīšu vietā (mazo ciparu – pirmajā skaitlī, lielo ciparu – otrajā skaitlī) un nonāk spēles otrajā fāzē, kas viņai nodrošina vajadzīgo – iegūto skaitļu starpība nav lielāka kā 3999, jo lielākais mazināmais var būt 3999. Savukārt, ja brālis sākumā nosauc ciparu 4 vai 5, tad māsa šo ciparu ieraksta kolonnā k_1 (spēle uzreiz pāriet otrajā fāzē) attiecīgi $k_1 = \binom{4}{*}$ vai $k_1 = \binom{*}{5}$. Pēc tam, ja brālis sauc attiecīgi tikai ciparus 0 vai 9, tad māsa tos ieraksta kolonnā k_2, k_3 vai k_4, iegūstot, ka nevar iegūt lielāku starpību kā 4000, jo veidojas situācija $-\frac{4000}{0000}$ vai $-\frac{9999}{5999}$. Savukārt, ja brālis nosauc kādu ciparu, kas nav ne 0, ne 9, tad māsa to ieraksta kolonnā k_1 atlikušās zvaigznītes vietā, nodrošinot, ka skaitļu starpība nav lielāka kā 3999, neatkarīgi no atlikušajiem abu spēlētāju gājieniem. Līdz ar to esam pamatojuši, ka māsa var ierakstīt ciparus zvaigznīšu vietā tā, lai iegūtā starpība nebūtu lielāka kā 4000, neatkarīgi no tā, kādus skaitļus nosauca brālis, tātad esam pierādījuši uzdevuma a) gadījumu.

Aplūkosim, vai māsa, ievietojot ciparus 4 un 5 kolonnās k_2, k_3, k_4 un kādā sev izdevīgā brīdī pārejot otrajā fāzē, var panākt, ka skaitļu starpība ir mazāka nekā 4000. Lai šādu situāciju nepieļautu, brālim jāuzmana kolonna k_i ar mazāko indeksu i, kurā jau ir ievietots viens cipars vai arī kurā ir divi dažādi cipari:

- ja $k_i = \binom{*}{4}$ vai $k_i = \binom{*}{5}$, tad brālim jāsauc cipars 5;
- ja $k_i = \binom{4}{*}$ vai $k_i = \binom{5}{*}$, tad brālim jāsauc cipars 4;
- ja visas kolonnas ir vienādas vai arī $k_i = \binom{5}{4}$, tad var saukt jebkuru ciparu, piemēram, ciparu 5.

Bīstamā situācija, kad $k_i = \binom{4}{5}$, jo tad ir “*jāaizņemas*” no nākamās šķiras, pie šādas brāļa stratēģijas nav iespējama.

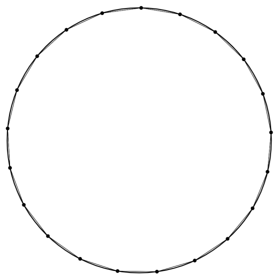
Pēc šādas pirmās fāzes stratēģijas, nonākot otrajā fāzē, brālis tālāk visu laiku var saukt 0, ja kolonnā k_1 cipars ir ievietots pirmajā skaitlī, vai 9, ja cipars ir ievietots otrajā skaitlī. Līdz ar to brālis būs panācis situāciju, kad starpība nav mazāka kā 4000. Tātad esam pamatojuši, ka brālis var nosaukt ciparus tā, lai iegūtā starpība būtu vismaz 4000 neatkarīgi no tā, kā māsa izkārto ciparus zvaigznīšu vietā.

6. Viesības

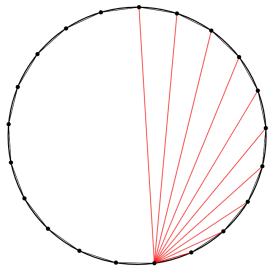
Profesors Cipariņš uz viesībām uzaicinājis 20 draugus. Pie apaļa galda visi sasēdušies tā, lai blakussēdošie būtu tieši 2 metru attālumā viens no otra. Maltītes vidū Profesors Cipariņš izteica šādu apgalvojumu: ja katru klātesošo cilvēku uzskatītu par punktu, tad jebkura slēgta lauzta līnija, kas iziet cauri visiem šiem punktiem vienu reizi, saturēs vismaz trīs posmus ar vienādu garumu. Vai viņam ir taisnība?

Atrisinājums. Profesoram Cipariņam ir taisnība. Kopā ap galdu sēž 21 cilvēks, ieskaitot profesoru Cipariņu. Viņi ir izkārtojušies tā, lai izveidotos regulārs 21-stūris, ap kuru var apvilkt riņķa līniju, kā tas redzams 10. att.

Lauztās līnijas posmi būs hordas starp šie punktiem. Ņemot vērā to, ka mēs strādājam ar simetrisku figūru, tad kopā ir iespējami tikai 10 dažādi garumi hordām, kas veidojas, savienojot šos punktus (skat. 11. att.).



10. att.



11. att.

Tā kā jebkura slēgta lauzta līnija, kas savieno visus punktus, saturēs 21 posmu, un kopā ir 10 iespējami garumi, tad pēc Dirihlē principa varam secināt, ka vismaz 3 posmiem būs vienāds garums.

7. Profesora Cipariņa žetoni

Profesoram Cipariņam ir divu veidu žetoni – balti un melni. Daļu no šiem žetoniem viņš ir salicis 10 trauciņos. Katrā no trauciņiem ir vai nu tikai melni žetoni, vai arī tikai balti žetoni. Var arī gadīties, ka Cipariņš dažus no trauciņiem ir atstājis tukšus. Pie tam šajos trauciņos žetoni izvietoti tā, lai kopumā balto žetonu skaits sakristu ar melno žetonu skaitu. Viņš sev ir izdomājis divus iespējamos gājienus:

1) no katra trauciņa ar baltajiem žetoniem noņemt pa vienam žetonam un vienlaikus katru trauciņu ar melnajiem žetoniem papildināt ar melnu žetonu. Gadījumā, ja kāds no trauciņiem ir tukšs, tad tam tiek pievienots melns žetons;
2) izvēlēties jebkurus trīs trauciņus un iemainīt žetonus tajos uz pretējām krāsām.

Vai ar šiem gājieniem Profesors Cipariņš vienmēr var panākt, ka katrs trauciņš ir tukšs?

Atrisinājums. Pamatosim, ka šis vienmēr nav iespējams. Šajā spēlē baltos žetonus varam interpretēt kā pozitīvus veselus skaitļus un melnos žetonus kā negatīvus veselus skaitļus. Tātad varam iztēloties, ka rīkojamies ar 10 veseliem skaitļiem. Sākotnējais nosacījums, ka kopumā balto žetonu skaits sakrīt ar melno žetonu skaitu, tiek nomainīts ar to, ka visu 10 skaitļu summa ir 0. No šāda skata punkta gājiens 1) no katra skaitļa atņem 1, bet gājiens 2) apmaina zīmi trīs skaitļiem.

Apskatīsimies uz gadījumu, ja ir doti skaitļi $2;\ -1;\ -1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0$. Šis pieraksts ir ekvivalents tam, ka ir viens trauciņš ar 2 baltiem žetoniem, 2 trauciņi ar vienu melnu žetonu un 7 tukši trauciņi. Pamatosim, ka šajā gadījumā nevarēs panākt to, ka visi skaitļi ir 0 (katrs trauciņš ir tukšs). Šim nolūkam atradīsim invariantu, tas ir, īpašību, kas nemainās, izpildot gājienus, bet nepiemīt mūsu vēlamajam rezultātam (visi skaitļi vienādi ar 0). Viens no šādiem invariantiem varētu būt tas, ka mums sākotnēji ir gan nepāra skaitļi, gan pāra skaitļi, bet rezultātā visiem skaitļiem jābūt pāra skaitļiem. Pamatosim, ka patiešām abi iespējamie gājieni vienmēr atstās kādu pāra un nepāra skaitli izvēlētajā piemērā.

Tā kā mums sākotnēji ir vismaz viens nepāra skaitlis un viens pāra skaitlis, tad atņemot 1 no visiem skaitļiem, šiem skaitļiem paritāte mainīsies uz pretējo, tas ir, katrs nepāra skaitlis nomainīsies uz pāra skaitli, bet pāra skaitļi – uz nepāra. Tātad rezultātā mums vēl joprojām būs kāds nepāra un pāra skaitlis. Tāpat arī nav grūti ievērot, ka otrais gājiens nemaina skaitļiem paritāti. Secinām, ka dotajā piemērā nevarēsim nonākt līdz situācijai, kad visi skaitļi (trauciņi) ir vienādi ar 0 (tukši).