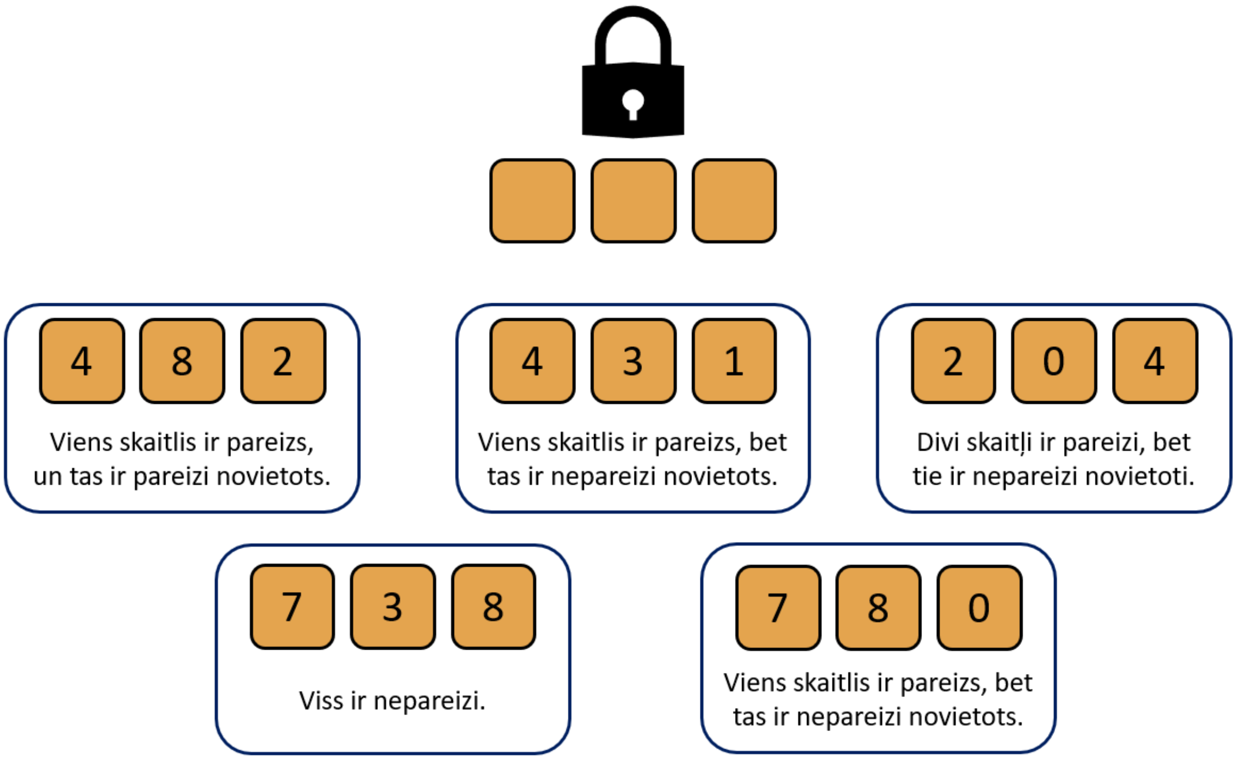
Jauno matemātiķu konkurss ar prof. Cipariņa izaicinājumu

2021./2022. mācību gads

3. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Ziemassvētku dāvana

Kārlis Ziemassvētku vakarā zem eglītes atrod dāvanu no vecākiem. Kā ierasts, pirms dāvanas saņemšanas, ir jāskaita dzejolītis, tomēr tā vietā Kārlim ir jāatmin vecāku izveidota mīkla, kas redzama zemāk. Dāvana ir iesaiņota tā, ka to var atvērt vienā veidā – ievadot atslēgas pareizo kodu. Palīdzi Kārlim atrisināt mīklu!



Atrisinājums. Mīklas atrisinājums ir kods 0 1 2. No apgalvojuma par skaitļiem 7, 3, 8 seko, ka kodā nav neviens no šiem skaitļiem. No pēdējā apgalvojuma var secināt, ka kodā būs skaitlis 0, bet tas nebūs pēdējais. No pirmā apgalvojuma var secināt, ka kods var būt 4 _ _ vai _ _ 2, jo neder skaitlis 8. No otrā apgalvojuma var secināt, ka neder variants 4 _ _, jo tam jābūt nepareizi novietotam, kā arī neder skaitlis 3. Tātad kods var būt 1 0 2 vai 0 1 2. No trešā apgalvojuma var secināt, ka pareizie skaitļi ir 2 un 0, bet tie ir nepareizi izvietoti, tāpēc neder kods 1 0 2 un mīklas atrisinājums ir 0 1 2.

2. Testu veikšana

Profesors Cipariņš zinātniskā rakstā izlasīja, ka, lai pārbaudītu ūdens kvalitāti, tiek ņemti ūdens paraugi no attiecīgām ūdens tilpnēm, un šajos paraugos tiek ievietota testa lapiņa. Ja šī testa lapiņa nokrāsojas, tad ūdens tilpnē ir baktērijas, kuras sauc par leģionellām. Izlasījis rakstu, profesors Cipariņš nolēma pārbaudīt 25 dažādas ūdens tilpnes. Tā kā profesors iegādājās tikai 10 testa lapiņas, bet paraugus no ūdens tilpnēm var iegūt neierobežotā skaitā, viņš izlēma jaukt vairākus paraugus kopā. Vai profesors Cipariņš var noskaidrot, kurās divās no 25 ūdens tilpnēm ir baktērijas, izmantojot 10 testa lapiņas?

Piemēram, ja, sajaucot 3 ūdens tilpņu paraugus kopā un pārbaudot šo maisījumu, testa lapiņa iekrāsojas, tad kādā no ūdens tilpnēm ir leģionellas baktērijas.

Atrisinājums. Jā, ar 10 testa lapiņām ir iespējams atrast tās divas ūdens tilpnes, kurās ir leģionellas baktērijas. Teiksim, ka paraugs vai to maisījums ir *pozitīvs*, ja testa lapiņa iekrāsojas, ievietojot to paraugā vai to maisījumā. Aplūkosim vienu no veidiem, kā ar 10 testa lapiņām atrast abas ūdens tilpnes ar leģionellas baktērijām. Vispirms visus 25 ūdens paraugus sajauksim atsevišķos četros maisījumos, kur kopā sajauc 6, 6, 6 un 6 ūdens paraugus, un 1 ūdens paraugs tiek atlikts. Ar **4 testa lapiņām** pārbaudīsim katru no maisījumiem, kuros sajaukti 6 ūdens paraugi. Iespējami divi rezultāti:

1) divi no sešu ūdens paraugu maisījumiem ir pozitīvi,
2) viens no sešu ūdens paraugu maisījumiem ir pozitīvs.

Aplūkosim pirmo gadījumu, kad divi no sešu ūdens paraugu maisījumiem ir pozitīvi. Vispirms izpētīsim vienu no šiem maisījumiem, no attiecīgajām sešām ūdens tilpnēm sajaucot 2 maisījumus, katrā pa trim ūdens paraugiem. Vienu no šiem maisījumiem pārbaudīsim, izmantojot vēl **1 testa lapiņu**. Iespējami divi rezultāti, jo viena no ūdens tilpnēm ar baktērijām atrodas otrā 6 paraugu maisījumā:

- pārbaudītajā maisījumā testa lapiņa iekrāsosies. Tādā gadījumā pozitīvā maisījuma divus no ūdens paraugiem pārbaudīsim ar **2 testa lapiņām**. Ja kāda no tām iekrāsosies, tad attiecīgā ūdens tilpne ir ar leģionellas baktērijām. Ja neviena neiekrāsojas, tad trešā ūdens tilpne ir ar baktērijām.
- pārbaudītajā maisījumā testa lapiņas neiekrāsojas, tātad nepārbaudītajā 3 paraugu maisījumā būs ūdens tilpne ar baktērijām. Tādā gadījumā nepārbaudītā maisījuma divus no ūdens paraugiem pārbaudīsim ar **2 testa lapiņām**. Ja kāda no tām iekrāsosies, tad attiecīgā ūdens tilpne ir ar leģionellas baktērijām. Ja tā neiekrāsojas, tad trešā ūdens tilpne ir ar baktērijām.

Lai vienā no pozitīvajiem 6 paraugu ūdens maisījumiem atrastu to ūdens tilpni, kurā ir leģionellas baktērijas, tiek izmantotas trīs testa lapiņas. Tieši tāpat pārbauda arī otru pozitīvo 6 ūdens paraugu maisījumu. Rezultātā tiek atrastas abas ūdens tilpnes ar leģionellas baktērijām, izmantojot $4 + 3 + 3 = 10$ testa lapiņas.

Aplūkosim otro gadījumu, kad tikai viens no sešu ūdens paraugu maisījumiem ir pozitīvs. Ar **6 testa lapiņām** pārbaudīsim katru ūdens paraugu no pozitīvā sešu paraugu maisījuma. Iespējami divi rezultāti:

- divi no paraugiem ir pozitīvi un tiek atrastas abas ūdens tilpnes ar leģionellas baktērijām.
- viens no paraugiem ir pozitīvs, tātad viens atliktais ūdens paraugs ir no ūdens tilpnes ar leģionellas baktērijām.

Abos gadījumos abas ūdens tilpnes ar leģionellas baktērijām tiek atrastas ar $4 + 6 = 10$ testa lapiņām.

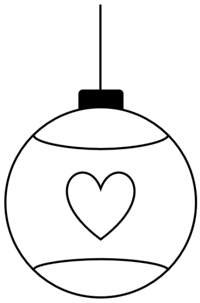
3. Ziemassvētku ornamenti

Jauno matemātiķu skolā ir tradīcija – katru gadu skolēni izrotā eglītes skolas telpās ar pašu veidotiem rotājumiem. Šogad visa skola ir vienojusies, ka eglītes rotās ar ornamentiem, kas redzami 1. att., turklāt to krāsošanai izmantos tikai četras krāsas: zaļu, sarkanu, dzeltenu un zilu. Katru ornamenta daļu var krāsot tikai vienā krāsā un jāizmanto visas četras krāsas. Piemēram, viens ornamenta krāsojums redzams 2. att.

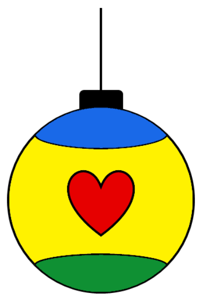
a) 7.a klases 25 skolēniem nepieciešams izrotāt savas klases eglīti. Katram skolēnam ir jāizkrāso savs Ziemassvētku ornaments. Vai eglītē noteikti būs ornaments, kas redzams 2. att.?

b) Vai noteikti 7.a klases eglītē būs iekārti vismaz divi vienādi izkrāsoti ornamenti, ja klasē ir 25 skolēni?

c) Šogad visām trim piektajām klasēm ir tas gods izrotāt skolas lielo egli. Vai noteikti lielajā eglē būs iekārti 4 vienādi ornamenti, ja katrā piektajā klasē ir attiecīgi 24, 25 un 26 skolēni?



1. att.



2. att.

Atrisinājums. a) Nē, ne obligāti, jo var gadīties, ka, piemēram, visi klases skolēni izdomā krāsot ornamentus vienādi veidā, kas atšķiras no 2. att. redzamā ornamenta.

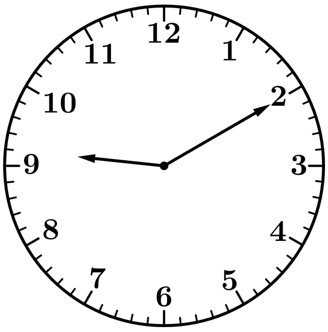
b) Kopā ornamentu var izkrāsot 24 dažādos veidos. Tā kā klasē ir 25 skolēni, tad noteikti būs divi skolēni, kuru ornamenti būs iekrāsoti vienādi.

c) Kopā ornamentu var iekrāsot 24 dažādos veidos. Visās trīs klasēs kopā ir $24 + 25 + 26 = 75$ skolēni. Izdalām skolēnu skaitu ar dažādo ornamentu skaitu un iegūstam $75 : 24 = 3$ atlikumā 3. Tātad noteikti Ziemassvētku eglē būs iekārti vismaz 4 vienādi ornamenti.

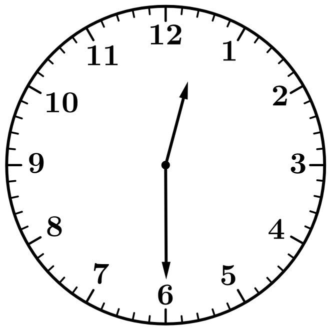
4. Summa pulkstenī

Kad pulkstenis rāda 10 minūtes pāri deviņiem, tad minūšu rādītājs ir novietots pretī skaitlim 2 un stundu rādītājs ir pavirzījies mazliet pāri 9. Par *rādītāju summu* sauksim to divu skaitļu summu, kuriem tuvāk ir novietoti abi rādītāji. Minētajā piemērā (skat. 3. att.), kad pulkstenis rāda plkst. 9.10, *rādītāju summa* ir $2 + 9 = 11$.

Ja pulksteņa rādītājs ir tieši pa vidu diviem skaitļiem, *rādītāju summā* ņem to skaitli, kas ir nākamais, ja skatās pulksteņrādītāja kustības virzienā. Piemēram, 4. att. plkst. 12.30, minūšu rādītājs rāda tieši 6, bet stundu rādītājs ir starp 12 un 1, tātad *rādītāju summa* ir $6 + 1 = 7$.



3. att.



4. att.

a) Kāda ir *rādītāju summa* plkst. 9.45?

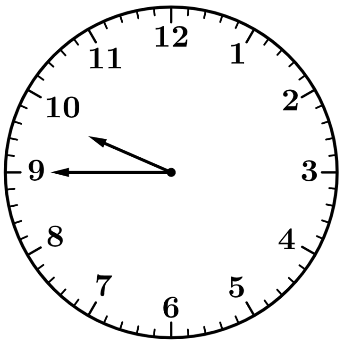
b) Kāda ir *rādītāju summa* plkst. 14.29? Kāda tā ir 4 minūtes vēlāk?

c) Cikos *rādītāju summa* ir 5? Uzraksti četrus piemērus, kurā katrs no laikiem atšķiras vismaz par 30 minūtēm.

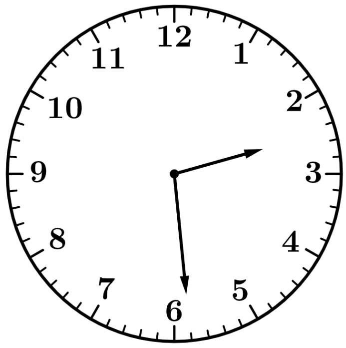
d) Cikos *rādītāju summa* ir 7 laika posmā no plkst. 15.00 līdz 16.00?

Atrisinājums

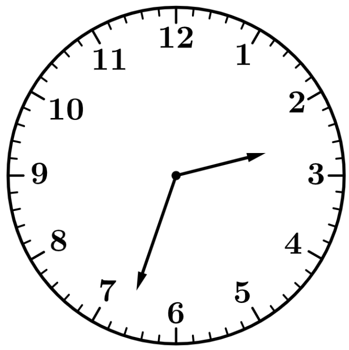
a) Plkst. 9.45 (skat. 5. att.) minūšu rādītājs būs novietots pretī 9, savukārt stundu rādītājs atradīsies starp 9 un 10, turklāt tuvāk 10. Līdz ar to *rādītāju summa* plkst. 9.45 būs $9 + 10 = 19$.



5. att.



6. att.



7. att.

b) Plkst. 14.29 (skat. 6. att.) minūšu rādītājs būs novietots starp 5 un 6, turklāt tuvāk 6, savukārt stundu rādītājs atradīsies starp 2 un 3, turklāt tuvāk 2. Līdz ar to plkst. 14.29 *rādītāju summa* būs $6 + 2 = 8$.

Kad būs pagājušas 4 minūtes no plkst. 14.29, būs plkst. 14.33. Plkst. 14.33 (skat. 7. att.) minūšu rādītājs atradīsies starp 6 un 7, turklāt tuvāk 7, savukārt stundu rādītājs atradīsies starp 2 un 3, turklāt tuvāk 3. Līdz ar to plkst. 14.33 *rādītāju summa* būs $7 + 3 = 10$.

c) Rādītāju summa ir 5, piemēram, plkst. 4.05 ($1 + 4 = 5$), plkst. 3.10 ($2 + 3 = 5$), plkst. 2.15 ($3 + 2 = 5$), plkst. 1.20 ($4 + 1 = 5$), kur katrs no šiem laikiem atšķiras vismaz par 30 minūtēm.

Piezīme. Piemērus var palīdzēt atrast tālāk aprakstītie spriedumi.

Ievērosim, ka summu 5 var iegūt kā $1 + 4$, $2 + 3$, $3 + 2$ un $4 + 1$. Šo rezultātu varam izmantot, lai atrastu uzdevumā prasītos laikus. Piemēram, varam izvēlēties, ka pirmais saskaitāmais atbilst minūšu rādītājam, bet otrais saskaitāmais atbilst stundu rādītājam.

Summu $1 + 4$ dos jebkurš pulksteņa laiks no 4.02.**30** (treknrakstā izceltas sekundes) līdz 4.07.30 (neieskaitot), piemēram, plkst. 4.05.

Summu $2 + 3$ dos jebkurš laiks no 3. 07.30 līdz 3.12.30 (neieskaitot), piemēram, plkst. 3.10.

Summu $3 + 2$ dos jebkurš laiks no 2.12.30 līdz 2.17.30 (neieskaitot), piemēram, plkst. 2.15.

Summu $4 + 1$ dos jebkurš laiks no 1.17.30 līdz 1.22.30 (neieskaitot), piemēram, plkst. 1.20.

d) *Rādītāju summa* ir 7 laika posmā no 15.17.30 līdz 15.22.30 (neieskaitot). Pamatosim, ka citu derīgu pulksteņa laiku laika posmā no plkst. 15.00 līdz 16.00 nav.

No 15.00 līdz 15.02.30 (neieskaitot) *rādītāju summa* ir $12 + 3 = 15$.

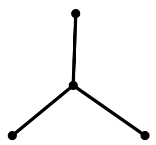
No 15.02.30 līdz 15.07.30 (neieskaitot) *rādītāju summa* ir $1 + 3 = 4$.
No 15.07.30 līdz 15.12.30 (neieskaitot) *rādītāju summa* ir $2 + 3 = 5$.

No 15.12.30 līdz 15.17.30 (neieskaitot) *rādītāju summa* ir $3 + 3 = 6$.
No 15.17.30 līdz 15.22.30 (neieskaitot) *rādītāju summa* ir $4 + 3 = 7$.

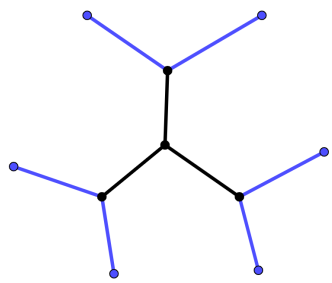
No 15.22.30 līdz 16.00 *rādītāju summa* ir lielāka nekā 7, jo minūšu rādītājs *rādītāju summā* dod vismaz 5, bet stundu rādītājs – vismaz 3.
Līdz ar to atbilde ir visi derīgie plkst. laiki no 15.17.30 līdz 15.22.30.

5. Sniegpārsliņa

Guna nolēma, ka šogad Ziemassvētkus gaidīs īpašā veidā. Lielas papīra lapas vidū viņa uzzīmēja 8. att. redzamo zīmējumu. Meitene 1. decembrī katram 8. att. zīmējumā aplūkojamajam nogrieznim piezīmēja klāt vēl divus nogriežņus, kā parādīts 9. att. Katrā nākamajā dienā Guna katram iepriekšējā dienā uzzīmētajam nogrieznim piezīmēja klāt vēl divus nogriežņus; tā viņa turpināja līdz pat 24. decembrim (ieskaitot).



8. att.



9. att.

a) Cik nogriežņu meitene kopā būs uzzīmējusi pirmajās trīs decembra dienās?
b) Cik nogriežņu Guna novilks septītajā dienā?
c) Cik nogriežņu Guna novilks 24. decembrī?

Atrisinājums. Ievērosim, ka katru dienu meitene novelk divas reizes vairāk posmu nekā iepriekšējā dienā. Apkoposim šo informāciju tabulā.
a) Guna 1. decembrī uzzīmēja 6 posmus, 2. decembrī uzzīmēja 12 posmus un 3. decembrī uzzīmēja 24 posmus. Līdz ar to pirmajās trīs decembra dienās meitene būs uzzīmējusi $6 + 12 + 24 = 42$ posmus.
b) Septītajā dienā Guna novilks 384 posmus.
c) Guna 24. decembrī novilks 50331648 posmus.

	Posmu skaits
Sākumā	3
1. decembrī	$3 \cdot 2 = 6$
2. decembrī	$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$
3. decembrī	$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$
4. decembrī	$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$
5. decembrī	$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$
6. decembrī	$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 192$
7. decembrī	$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 384$
…	…
24. decembrī	$3 \cdot \underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{24 \text{ reizes}} = 50331648$

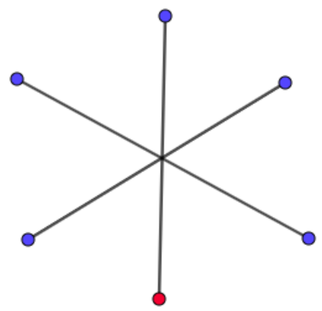
Profesora Cipariņa izaicinājums 8. un 9. klašu skolēniem

6. Piecstūra diagonāles

Pēc veiksmīgajām viesībām Profesors Cipariņš turpināja domāt par daudzstūru diagonālēm. Kādu vakaru pacenšoties, viņam sanāca uzzīmēt dažādus piecstūrus, kuru diagonāles krustojas nevienā, vienā, divos, trīs un piecos punktos. Lai kā viņš arī nemēģinātu, viņam nesanāca uzzīmēt piecstūri, kuram diagonāles krustojas četros vai arī vairāk nekā piecos punktos. Palīdzi Cipariņam uzzīmēt šos piecstūrus vai arī pamato, ka tie neeksistē!

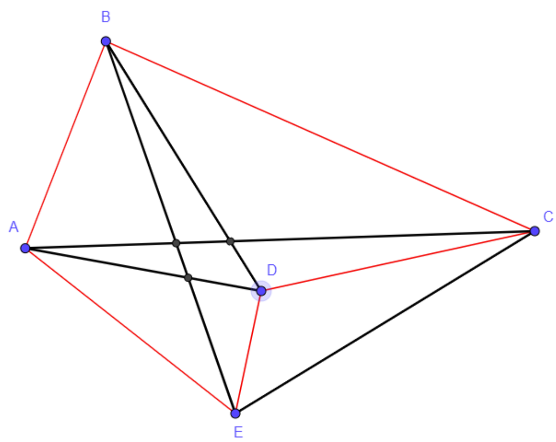
Atrisinājums. Pamatosim, ka abos gadījumos nebūs iespējams uzzīmēt prasītos piecstūrus. Izvēloties 4 dažādas virsotnes piecstūrim, varam kopumā izveidot 5 dažādus četrstūrus no piecstūra virsotnēm. Lai šo saskatītu, mēs faktiski izveidojam četrstūri, izlaižot kādu no 5 piecstūra virsotnēm. Šo četrstūru diagonāles būs arī piecstūru diagonāles. Skaidrs, ja diagonāles krustojas kādā no četrstūriem, tad tās arī krustosies piecstūrī, tāpēc varam apskatīt šos četrstūrus. Tā kā kopā varam izveidot tikai 5 četrstūrus, tad kopumā var būt ne vairāk kā 5 dažādi punkti, kuros krustojas diagonāles.

Ar šādu pašu analīzi varam saprast, ja piecstūris ir izliekts, tad visi četrstūri būs izliekti. Tā kā katrs četrstūris būs izliekts, tad to diagonāles krustosies un veidos 5 punktus. Tas, kāpēc nevar būt mazāks punktu skaits izliektam piecstūrim, saskatāms no tā, ka, ja divas diagonāles krustojas vienā punktā, un vēlamies piespiest kādai citai diagonālei krustoties šajā punktā, tad izveidotos sešstūris (skat 10. att.).



10. att.

Tas nozīmē, ka, lai iegūtu piecstūri, kura diagonāles krustojās mazāk par 5 reizēm, jāapskata ieliekti piecstūri. Ja piecstūris ir ieliekts, tad kāda no tā diagonālēm būs izolēta, t.i., tā nekrustosies ar nevienu citu. Piemēram, ja ieliektais stūris ir D (piemēram, skat 11. att.), tad četrstūri, kuru kāda no diagonālēm ir nogrieznis EC un satur virsotni D, būs arī ieliekti un to diagonāles nekrustosies. Tā kā šiem ieliektajiem četrstūriem jau ir izvēlētas virsotnes C, D un E, tad, lai pabeigtu četrstūri ir divas opcijas – virsotne A vai B. Tātad vienmēr būs vismaz divi no pieciem četrstūriem, kas būs ieliekti un kuru diagonāles nekrustosies, ja sākotnējais piecstūri būs ieliekts. No šī secinām, ka neeksistē piecstūris, kura diagonāles krustojas tieši 4 punktos.



11. att.

7. Čūskas kvadrāts

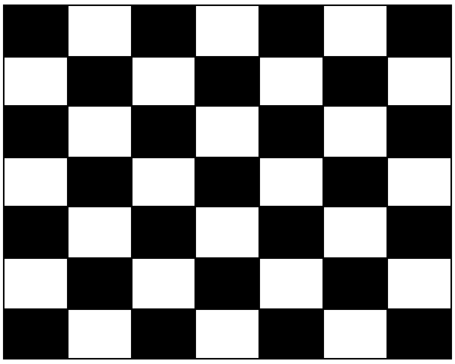
Kvadrāts sastāv no 7×7 rūtiņām. Šajās rūtiņās ierakstīti skaitļi no 1 līdz 49 (katrs tieši vienu reizi un katrā rūtiņā tieši viens skaitlis). Pie tam tie izkārtoti tā, lai tie skaitļi, kuru starpība ir 1, atrastos rūtiņās ar kopīgu malu. Kāds ir lielākais skaits pirmskaitļu, kas var atrasties vienā rindā vai vienā kolonnā?

Atrisinājums. Vispirms parādīsim piemēru, kā iegūt 5 pirmskaitļus vienā rindā (skat. 12. att.)

3	**2**	**17**	18	**19**	36	**37**
4	1	16	21	20	35	38
5	14	15	22	23	34	39
6	13	26	25	24	33	40
7	12	27	28	29	32	41
8	11	48	47	30	31	42
9	10	49	46	45	44	43

12. att.

Pamatosim, ka vairāk nevar iegūt. Tā kā tie skaitļi, kuru starpība ir 1, atrodas rūtiņās ar kopīgu malu, tad pamīšus tiek izkārtoti pāra un nepāra skaitļi. Ja 7×7 kvadrātu izkrāsojam šaha galdiņa rakstā (skat. 13. att.), tad melnie un baltie lauciņi var atzīmēt attiecīgi nepāra un pāra skaitļus (vai arī otrādi).



13. att.

Tas nozīmē, ka katrā rindā (vai kolonnā) būs tieši 4 nepāra skaitļi un 3 pāra skaitļi vai otrādi. Tā kā vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2, tad secinām, ka vairāk par 5 pirmskaitļiem rindā (vai kolonnā) nevar iegūt.