

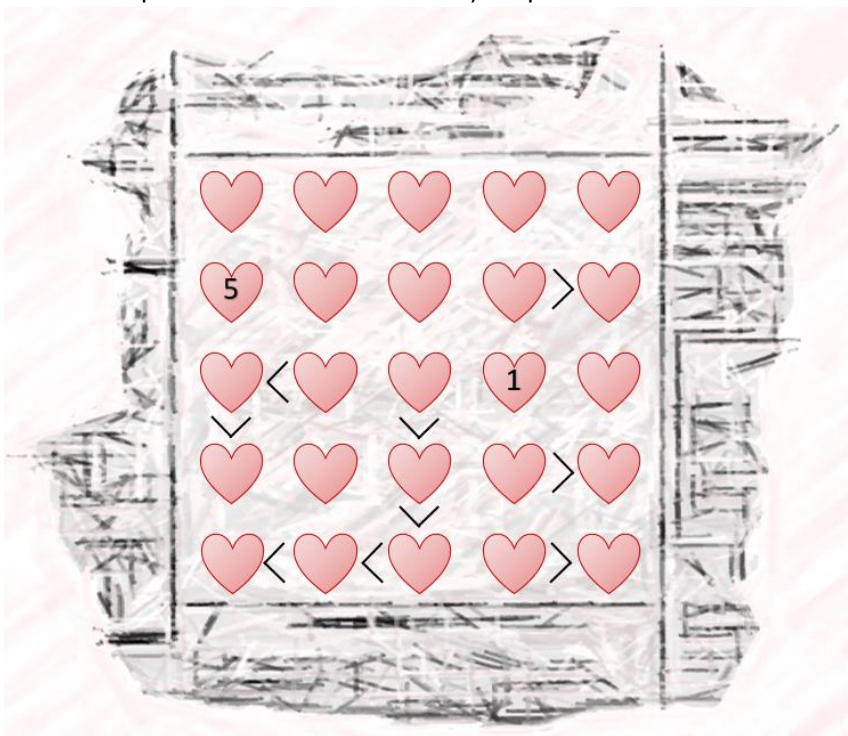
Jauno matemātiķu konkurss ar prof. Cipariņa izaicinājumu

2021./2022. mācību gads

4. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

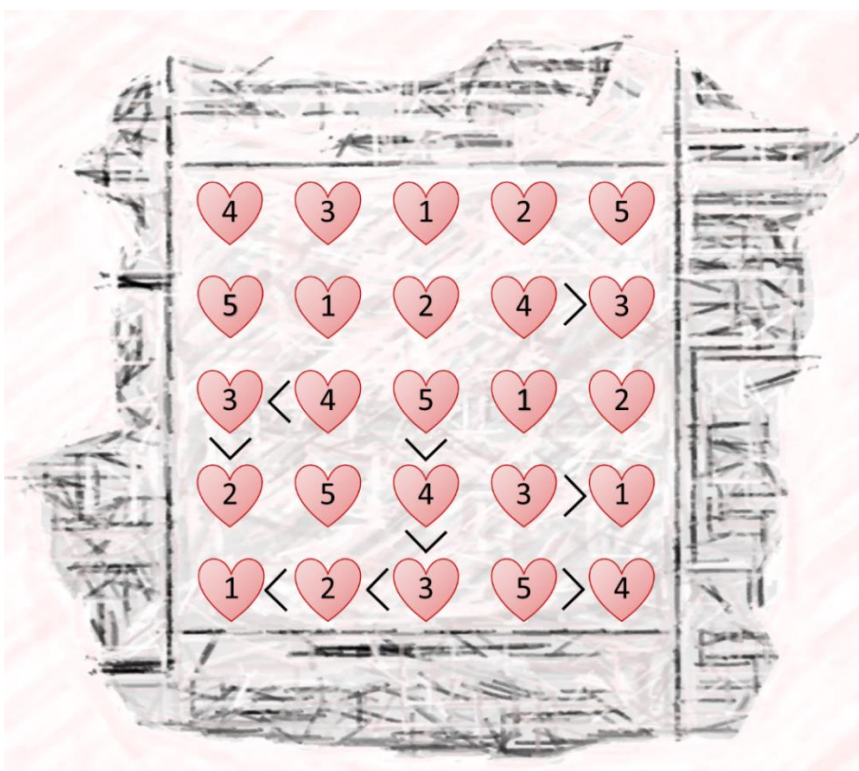
1. Valentīndienas uzdevums

Anniņa avīzē atrada Valentīndienas uzdevumu (skat. 1. att.), kurā piecās rindās un piecās kolonnās ir sakārtotas sirsniņas. Katrā sirsniņā jāieraksta viens cipars no 1 līdz 5 tā, lai dotās nevienādības būtu patiesas un katrā rindā un katrā kolonnā būtu ierakstīti visi cipari no 1 līdz 5. Palīdzi Anniņai izpildīt uzdevumu!



1. att.

Atrisinājums. Ciparus iespējams izvietot tikai vienā veidā, kas redzams 2. att.

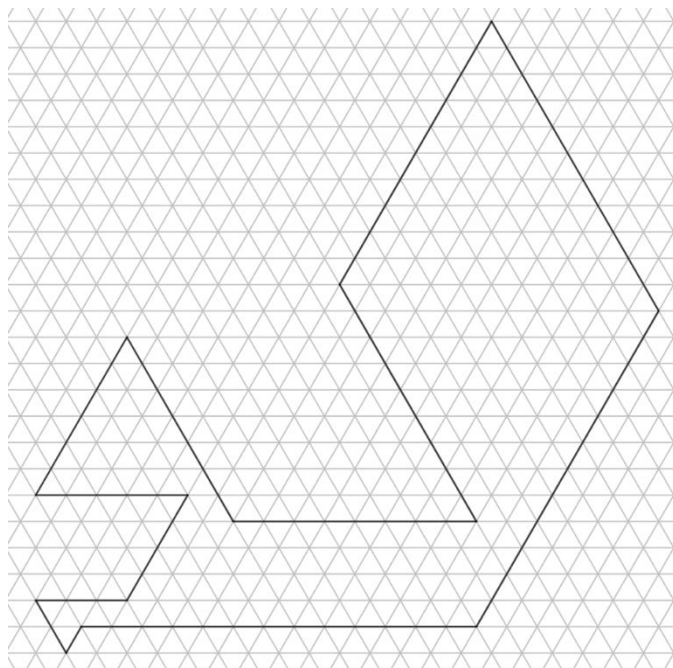


2. att.

2. Perfekts polimonds

Vai trijstūra režģī pa režģa līnijām var uzzīmēt tādu trīspadsmitstūri, kura malu garumi, sākot ar kādu virsotni, ir 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1?

Atrisinājums. Jā, var, piemēram, skat. 3. att.



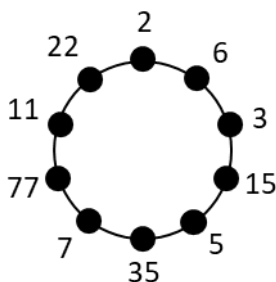
3. att.

3. Aktivitāte klasē

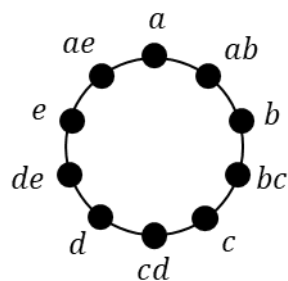
Stundā 10 skolēni sēdās aplī un katrs uz savas lapas uzrakstīja vienu naturālu skaitli. Izrādījās, ka katrs skolēns uz savas lapas uzrakstīja citu skaitli, turklāt jebkuriem diviem skolēniem, kas sēž blakus, viens no uzrakstītajiem skaitļiem dalās ar otru uzrakstīto skaitli. Vai noteikti var atrast tādus divus skolēnus, kuri aplī nesēž blakus un kuriem viens no uzrakstītajiem skaitļiem dalās ar otra skolēna uzrakstīto skaitli?

Atrisinājums. Nē, ne noteikti. Skat., piemēram, 4. att., kurā ar punktiem ir atzīmēti skolēni un viņu uzrakstītie skaitļi. Var redzēt, ka viens skaitlis dalās ar otru tikai tad, ja tie atrodas blakus.

Piezīme. Var iegūt daudzus izvietojumus ar prasīto īpašību. Viens no paņēmieniem ir parādīts 5. att. Vispirms pa riņķa līniju uzraksta dažādus pirmskaitļus a, b, c, d, e , bet pēc tam starp katriem diviem blakus uzrakstītiem pirmskaitļiem uzraksta to reizinājumu.



4. att.



5. att.

4. Profesora Cipariņa skaitlis

Profesors Cipariņš uz tāfeles uzrakstīja lielu skaitli un uzdeva skolēnam uzrakstīt šī skaitļa visus dalītājus. Skolēns kā atbildi pēc kārtas uzrakstīja visus naturālos skaitļus no 2 līdz 31. Pēc tam profesors pateica, ka divi pēc kārtas sekojoši uzrakstītie skaitļi nav pareizi. Kuri divi uzrakstītie skaitļi nav Profesora Cipariņa dotā skaitļa dalītāji?

Atrisinājums. Nepareizi uzrakstītie dalītāji ir 16 un 17. Tā kā kļūdaini uzrakstītie skaitļi ir viens pēc otra sekojoši, tad viens no tiem ir pāra un otrs – nepāra skaitlis. Visi skaitļi no 2 līdz 15 neder kā nepareizie dalītāji, jo pretējā gadījumā uzrakstītais skaitlis nedalītos arī ar divreiz lielāku skaitli, kas ir pretrunā ar profesora Cipariņa teikto. Ja skaitļi a un b ir savstarpēji pirmskaitļi (to vienīgais kopīgais dalītājs ir 1) un uzrakstītais skaitlis dalās gan ar a , gan ar b , tad tas noteikti dalās arī ar $a \cdot b$. Jau zināms, ka visi skaitļi no 2 līdz 15 noteikti ir skaitļa dalītāji. Ja skaitli var uzrakstīt kā savstarpēju pirmskaitļu reizinājumu, izmantojot skaitļus no 2 līdz 15, tad tas neder kā nepareizi uzrakstītais dalītājs. Tātad kā aplamie dalītāji neder arī šādi skaitļi:

$$18 = 2 \cdot 9,$$

$$20 = 4 \cdot 5,$$

$$21 = 3 \cdot 7,$$

$$22 = 2 \cdot 11,$$

$$24 = 3 \cdot 8,$$

$$26 = 2 \cdot 13,$$

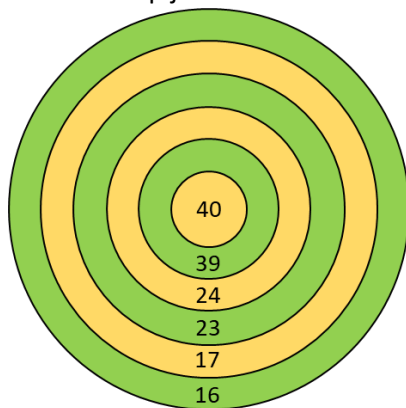
$$28 = 4 \cdot 7,$$

$$30 = 2 \cdot 15.$$

Tā kā nepieciešami divi pēc kārtas sekojoši skaitļi, der tikai skaitļi 16 un 17.

5. Trīs biatlonisti

Trīs biatlonisti Šaviņš, Trāpiņš un Lociņš šāva mērķi (skat. 6. att.). Katram no viņiem bija seši šāvieniem un katra lode trāpīja mērķī. Trāpot centrā, biatlonists saņem 40 punktus, trāpot gredzenos, attiecīgi saņem 39, 24, 23, 17 un 16 punktus, skat. 6. att. Rezultātā Šaviņš ieguva 120 punktus, Trāpiņš ieguva 110 punktus un Lociņš ieguva 100 punktus. Nosaki, kā trāpīja mērķī katrs biatlonists, ja zināms, ka centrā trāpīja tikai viena lode!



6. att.

1. atrisinājums. Biatlonistam, kas trāpīja centrā, ir jāveic vēl 5 šāvieniem, tāpēc mazākais punktu skaits, ko viņš var iegūt ir $40 + 5 \cdot 16 = 120$. Tā kā $120 > 110$ (Trāpiņa iegūtais punktu skaits) un $120 > 100$ (Lociņa iegūtais punktu skaits), tad centrā varēja trāpīt tikai Šaviņš, un pārējos šāvienus viņš trāpīja gredzenā ar vērtību 16.

Ja Lociņš vai Trāpiņš būtu trāpījis gredzenā ar vērtību 39, tad iegūtais punktu skaits būtu vismaz $5 \cdot 16 + 39 = 119$, kas nav iespējams.

Mazākais punktu skaits, ko var iegūt biatlonists sešos šāvienos, ir $6 \cdot 16 = 96$. Ja kādā šāvienā biatlonists trāpītu gredzenā, kura vērtība ir 23 vai lielāka, tad viņš iegūtu vismaz $5 \cdot 16 + 23 = 103$. Tā kā $103 > 100$, tad Lociņš trāpīja tikai gredzenos, kuru vērtības ir 16 un 17. Ievērojot, ka $100 - 96 = 4$, secinām, ka četri šāvieniem ar vērtību 16 ir jāaizvieto ar vērtību 17, tādā veidā palielinot kopējo punktu skaitu par 4. Tātad Lociņš divas reizes trāpīja gredzenā ar vērtību 16 un četras reizes gredzenā ar vērtību 17.

Ievērojam, ka $16 = 16 + 0$; $17 = 16 + 1$; $23 = 16 + 7$ un $24 = 16 + 8$ kur katrā izteiksmē otrais saskaitāmais parāda, par cik punktiem iespējams palielināt iegūto punktu skaitu, 16 vietā iegūstot citu iespējamo punktu skaitu. Tā kā $110 - 16 \cdot 6 = 14$, tad jānoskaidro, kā skaitli 14 var izteikt kā sešu saskaitāmo (kuru vērtības ir 0; 1; 7; 8) summu:

- $8 + 8 > 14$ (nedrīkst ņemt, jo jau divi saskaitāmie kopā ir vairāk nekā 14);
- $8 + 7 > 14$ (nedrīkst ņemt, jo jau divi saskaitāmie kopā ir vairāk nekā 14);
- $8 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 < 14$ (neder);
- $7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 < 14$ (neder);
- $7 + 7 + 0 + 0 + 0 + 0 = 14$ (der);
- $7 + 7 + 1 > 14$ (nedrīkst ņemt, jo jau trīs saskaitāmie kopā ir vairāk nekā 14).

Tā kā citu derīgu variantu nav, tad Trāpiņš divas reizes trāpīja gredzenā ar vērtību $16 + 7 = 23$ un četras reizes gredzenā ar vērtību 16.

2. atrisinājums. Lociņš lodes trāpīja 4 reizes gredzenā ar punktu skaitu 17 un 2 reizes – gredzenā ar punktu skaitu 16, tātad $4 \cdot 17 + 2 \cdot 16 = 100$. Trāpiņš lodes 2 reizes trāpīja gredzenā ar punktu skaitu 23 un 4 reizes – gredzenā ar punktu skaitu 16, tātad $2 \cdot 23 + 4 \cdot 16 = 110$. Savukārt Šaviņš lodes vienu reizi trāpīja centrā un 5 reizes – gredzenā ar punktu skaitu 16, tātad $1 \cdot 40 + 5 \cdot 16 = 120$. Pamatosim, ka šis ir vienīgais veids kā lodes varēja trāpīt mērķī, lai katrs no dalībniekiem iegūtu attiecīgi uzdevumā norādīto punktu skaitu.

Biatlonistam, kas trāpīja centrā, ir jāveic vēl 5 šāvieni, tātad mazākais punktu skaits, ko viņš var iegūt ir $40 + 5 \cdot 16 = 120$. Tā kā $120 > 110$ (Trāpiņa iegūtais punktu skaits) un $120 > 100$ (Lociņa iegūtais punktu skaits), tad centrā varēja trāpīt tikai Šaviņš, un pārējos šāvienus viņš trāpīja gredzenā ar vērtību 16.

Tā kā ne Trāpiņš, ne Lociņš netrāpīja centrā, tad viņi sešos šāvienos ieguva attiecīgi 110 un 100 punktus, trāpot lodes tikai gredzenos. Skaidrs, ka

- 1) tā kā punktu skaits, ko var iegūt trāpot 6 reizes vienā un tajā pašā gredzenā ir $6 \cdot 16 = 96$, $6 \cdot 17 = 102$, $6 \cdot 23 = 138$ vai $6 \cdot 24 = 144$, ne Trāpiņš, ne Lociņš netrāpīja 6 reizes vienā un tajā pašā gredzenā,
- 2) ne Trāpiņš, ne Lociņš netrāpīja sešos dažādos gredzenos, jo, ja tas tā būtu, kāds no viņiem būtu trāpījis centrā, bet centrā trāpīja tikai viens no biatlonistiem, kurš, kā mēs jau pamatojām, bija Šaviņš,
- 3) neviens no biatlonistiem netrāpīja piecos dažādos gredzenos, jo tādā gadījumā iespējamais mazākais punktu skaits ir, ja divas reizes trāpa gredzenā ar mazāko punktu skaitu, bet pārējās reizes – katru savā gredzenā, tātad $16 \cdot 2 + 17 \cdot 1 + 23 \cdot 1 + 24 \cdot 1 + 39 \cdot 1 = 135$ punkti, kas ir vairāk nekā jebkura biatlonista iegūtais punktu skaits,
- 4) ne Trāpiņš, ne Lociņš netrāpīja četros dažādos gredzenos, jo tādā gadījumā iespējamais mazākais punktu skaits ir, ja trīs reizes trāpa gredzenā ar mazāko punktu skaitu, bet pārējās reizes – katra lode savā gredzenā ar nākamo mazāko punktu skaitu, tātad $16 \cdot 3 + 17 \cdot 1 + 23 \cdot 1 + 24 \cdot 1 = 112$ punkti, kas ir vairāk nekā ieguva Trāpiņš un Lociņš,
- 5) ja biatlonists trāpa trīs dažādos gredzenos, tad mazākais iespējamais punktu skaits ir, ja visas lodes trāpa gredzenos ar 16, 17 un 23 punktiem, un šādi ir visi iespējamie gadījumi:

$$\begin{aligned} 16 \cdot 4 + 17 \cdot 1 + 23 \cdot 1 &= 104 \\ 16 \cdot 3 + 17 \cdot 2 + 23 \cdot 1 &= 105 \\ 16 \cdot 2 + 17 \cdot 3 + 23 \cdot 1 &= 106 \\ 16 \cdot 1 + 17 \cdot 4 + 23 \cdot 1 &= 107 \\ 16 \cdot 3 + 17 \cdot 1 + 23 \cdot 2 &= 111 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16 \cdot 2 + 17 \cdot 2 + 23 \cdot 2 &= 112 \\ 16 \cdot 1 + 17 \cdot 3 + 23 \cdot 2 &= 113 \\ 16 \cdot 2 + 17 \cdot 1 + 23 \cdot 3 &= 118 \\ 16 \cdot 1 + 17 \cdot 2 + 23 \cdot 3 &= 119 \\ 16 \cdot 1 + 17 \cdot 1 + 23 \cdot 4 &= 125 \end{aligned}$$

Ja punktu summa ir lielāka nekā 110 un kāda no šiem trim gredzeniem ar mazāko punktu skaitu (attiecīgi 16, 17 vai 23) vietā būtu kāds gredzens ar lielāku punktu skaitu (attiecīgi 24 vai 39), arī summas būtu vēl lielākas. Tātad, jāaplūko tikai pirmie četri gadījumi un jāpārlicinās, ka arī tajos summas nevar būt 100 vai 110, nomainot iegūto punktu skaitu kādā no šāvieniem.

$24 \cdot 4 + 17 \cdot 1 + 23 \cdot 1 = 136$	$16 \cdot 4 + 24 \cdot 1 + 23 \cdot 1 = 111$	$16 \cdot 4 + 17 \cdot 1 + 24 \cdot 1 = 105$
$39 \cdot 4 + 17 \cdot 1 + 23 \cdot 1 = 196$	$16 \cdot 4 + 39 \cdot 1 + 23 \cdot 1 = 126$	$16 \cdot 4 + 17 \cdot 1 + 39 \cdot 1 = 120$
$24 \cdot 3 + 17 \cdot 2 + 23 \cdot 1 = 129$	$16 \cdot 3 + 24 \cdot 2 + 23 \cdot 1 = 119$	$16 \cdot 3 + 17 \cdot 2 + 24 \cdot 1 = 106$
$39 \cdot 3 + 17 \cdot 2 + 23 \cdot 1 = 174$	$16 \cdot 3 + 39 \cdot 2 + 23 \cdot 1 = 149$	$16 \cdot 3 + 17 \cdot 2 + 39 \cdot 1 = 121$
$24 \cdot 2 + 17 \cdot 3 + 23 \cdot 1 = 122$	$16 \cdot 2 + 24 \cdot 3 + 23 \cdot 1 = 127$	$16 \cdot 2 + 17 \cdot 3 + 24 \cdot 1 = 107$
$39 \cdot 2 + 17 \cdot 3 + 23 \cdot 1 = 152$	$16 \cdot 2 + 39 \cdot 3 + 23 \cdot 1 = 172$	$16 \cdot 2 + 17 \cdot 3 + 39 \cdot 1 = 122$
$24 \cdot 1 + 17 \cdot 4 + 23 \cdot 1 = 115$	$16 \cdot 1 + 24 \cdot 4 + 23 \cdot 1 = 135$	$16 \cdot 1 + 17 \cdot 4 + 24 \cdot 1 = 108$
$39 \cdot 1 + 17 \cdot 4 + 23 \cdot 1 = 130$	$16 \cdot 1 + 39 \cdot 4 + 23 \cdot 1 = 195$	$16 \cdot 1 + 17 \cdot 4 + 39 \cdot 1 = 123$

Tā kā neviena no šīm summām nav ne 100, ne 110, ne Trāpiņš, ne Lociņš savas lodes netrāpīja trīs dažādos gredzenos.

6) ja biatlonists trāpa divos dažādos gredzenos, tad tikai vienā veidā var iegūt 110 un 100 punktus. Visas iespējamās summas redzamas tabulā:

$16 \cdot 5 + 17 \cdot 1 = 97$	$16 \cdot 4 + 17 \cdot 2 = 98$	$16 \cdot 3 + 17 \cdot 3 = 99$
$16 \cdot 5 + 23 \cdot 1 = 103$	$16 \cdot 4 + 23 \cdot 2 = 110$	$16 \cdot 3 + 23 \cdot 3 = 117$
$16 \cdot 5 + 24 \cdot 1 = 104$	$16 \cdot 4 + 24 \cdot 2 = 112$	$16 \cdot 3 + 24 \cdot 3 = 120$
$16 \cdot 5 + 39 \cdot 1 = 119$	$16 \cdot 4 + 39 \cdot 2 = 142$	$16 \cdot 3 + 39 \cdot 3 = 165$
$17 \cdot 5 + 16 \cdot 1 = 101$	$17 \cdot 4 + 16 \cdot 2 = 100$	$17 \cdot 3 + 23 \cdot 3 = 120$
$17 \cdot 5 + 23 \cdot 1 = 108$	$17 \cdot 4 + 23 \cdot 2 = 114$	$17 \cdot 3 + 24 \cdot 3 = 123$
$17 \cdot 5 + 24 \cdot 1 = 109$	$17 \cdot 4 + 24 \cdot 2 = 116$	$17 \cdot 3 + 39 \cdot 3 = 168$
$17 \cdot 5 + 39 \cdot 1 = 124$	$17 \cdot 4 + 39 \cdot 2 = 146$	
$23 \cdot 5 + 16 \cdot 1 = 131$	$23 \cdot 4 + 16 \cdot 2 = 124$	$23 \cdot 3 + 24 \cdot 3 = 141$
$23 \cdot 5 + 17 \cdot 1 = 132$	$23 \cdot 4 + 17 \cdot 2 = 126$	$23 \cdot 3 + 39 \cdot 3 = 186$
$23 \cdot 5 + 24 \cdot 1 = 139$	$23 \cdot 4 + 24 \cdot 2 = 140$	$24 \cdot 3 + 39 \cdot 3 = 189$
$23 \cdot 5 + 39 \cdot 1 = 154$	$23 \cdot 4 + 39 \cdot 2 = 170$	
$24 \cdot 5 + 16 \cdot 1 = 136$	$24 \cdot 4 + 16 \cdot 2 = 128$	
$24 \cdot 5 + 17 \cdot 1 = 137$	$24 \cdot 4 + 17 \cdot 2 = 130$	
$24 \cdot 5 + 23 \cdot 1 = 143$	$24 \cdot 4 + 23 \cdot 2 = 142$	
$24 \cdot 5 + 39 \cdot 1 = 159$	$24 \cdot 4 + 39 \cdot 2 = 174$	
$39 \cdot 5 + 16 \cdot 1 = 211$	$39 \cdot 4 + 16 \cdot 2 = 188$	
$39 \cdot 5 + 17 \cdot 1 = 212$	$39 \cdot 4 + 17 \cdot 2 = 190$	
$39 \cdot 5 + 23 \cdot 1 = 218$	$39 \cdot 4 + 23 \cdot 2 = 202$	
$39 \cdot 5 + 24 \cdot 1 = 219$	$39 \cdot 4 + 24 \cdot 2 = 204$	

Līdz ar to, esam ieguvuši, ka vienīgais veids kā katrs no biatlonistiem varēja iegūt uzdevuma doto punktu skaitu, ir, ja Lociņš un Trāpiņš savas lodes trāpīja divos dažādos gredzenos, tas ir,

- Lociņš četras lodes trāpīja gredzenā ar 17 punktiem un divas reizes gredzenā ar 16 punktiem,
- Trāpinš divas lodes trāpīja gredzenā ar 23 punktiem un četras reizes gredzenā ar 16 punktiem.

6. Epidemioloģiskie krēsli

Aplī stāv 2022 krēsli. Brīdi pa brīdim pienāk kāds cilvēks un apsēžas uz kāda no brīvajiem krēsliem. Tajā pašā brīdī viens no kaimiņiem, ja tāds ir, pieceļas un aiziet. Sākumā visi krēsli ir brīvi. Kāds ir lielākais krēslu daudzums, kas vienlaicīgi var būt aizņemti? (Apsēšanās un piecelšanās brīži netiek aplūkoti.)

Atrisinājums. Pamatosim, ka lielākais aizņemto krēslu skaits ir 2020. Vispirms parādīsim, kā iegūt šo skaitu. Dotos krēslus sanumurēsim no 1 līdz 2022. Tādā gadījumā, varam rīkoties, kā parādīts tabulā.

Apsēžas	1.	3.	2.	4.	3.	5.	4.	...	2020.	2019.	2021.	2020.
Pieceļas			3.		4.		5.	...		2020.		2021.

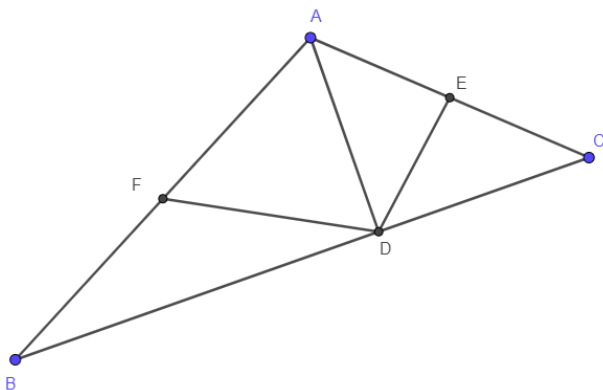
Šādi mēs pakāpeniski esam aizpildījuši visus krēslus, sākot ar 1. un beidzot ar 2020. Palikuši pāri ir tikai divi krēsli un skaidrs, ka šādi mēs nevaram turpināt, jo, lai kur arī kāds cilvēks šajā brīdī apsēstos, viņam vienmēr būs vismaz viens kaimiņš. Šis vēl nav pilns pierādījums tam, ka nevar iegūt lielāku aizņemto krēslu skaitu, jo varbūt mūsu piedāvātā metode nav optimāla.

Pieņemsim, ka pastāv metode, kur ir aizņemts vismaz 2021 krēsls. Tā kā apsēšanās un piecelšanās notiek pakāpeniski, tad jābūt tādām brīdīm, kad tiek aizņemti 2020 krēsli, pirms tiek aizņemts 2021. krēsls. Tajā brīdī aplī būtu brīvi tikai 2 krēsli, kas nozīmē, ka brīdī, kad apsēstos nākamais cilvēks, lai kopumā tiktu aizņemts 2021 krēsls, viņam būtu kaimiņš, kas noteikti pieceltos. Tātad iegūstam pretrunu, ka varam iegūt situāciju, kad ir aizņemts vismaz 2021 krēsls.

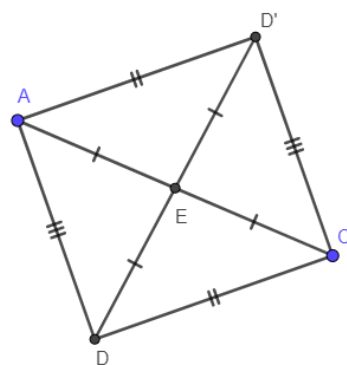
7. Daudzstūru dalīšana

Darbojoties ar piecstūra diagonālēm, Profesors Cipariņš pamanīja, ka daļa piecstūri trīsstūros. Ir zināms, ka jebkuru izliektu daudzstūri var sadalīt trīsstūros ar tā diagonālēm, tomēr šie trīsstūri ir ar patvaļīgu izskatu. Profesoru Cipariņu ieinteresēja šāds jautājums – vai daudzstūri var sadalīt vienādsānu trīsstūros, izmantojot ne tikai diagonāles. Palīdzī viņam to noskaidrot!

Atrisinājums. Prasīto vienmēr varēs izdarīt. Pieņemsim, ka sākotnējais daudzstūris ir sadalīts trīsstūros un apskatīsim kādu no tiem. Trīsstūrim ABC varam novilkt augstumu AD pret pamatu BC . Tas izveidos divus taisnleņķa trīsstūrus ADC un ADB . Ja atliekam viduspunktu šo trijstūru hipotenūzām, tad katrā no taisnleņķa trīsstūriem izveidojas divi trīsstūri (skat. 7. att.).



7. att.



8. att.

Pamatosim, ka visi šie trīsstūri ir vienādsānu. Apskatīsim vienu no taisnleņķa trīsstūriem, kas izveidojas, novelkot augstumu. Piemēram, mēs varam papildināt trīsstūri ADC līdz taisnstūrim, atliekot punktu D' , lai $AD' \parallel DC$ un $AD \parallel D'C$. Zināms, ka taisnstūra diagonāles krustojoties dalās uz pusēm, tātad $EA = EC = ED = ED'$ (skat. 8. att.). No šī secinām, ka trīsstūri ADE un CED ir vienādsānu.

Tātad, ja sākotnējo n -stūri sadala $(n - 2)$ trīsstūros, izmantojot diagonāles, tad to noteikti var sadalīt $4(n - 2)$ -os vienādsānu trīsstūros.