Jauno matemātiķu konkurss ar prof. Cipariņa izaicinājumu

2021./2022. mācību gads

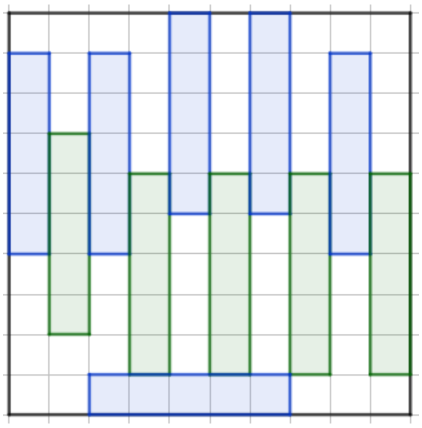
5. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Kuram taisnība?

Alise apgalvo, ka 10×10 rūtiņu kvadrātā, kurā ir novietoti 11 taisnstūri ar izmēriem 1×5 rūtiņas, noteikti var ievietot vēl vienu šādu taisnstūri, kas nepārklājas ar jau ievietotajiem. Kristaps uzstāj, ka vienmēr to izdarīt nevar. Kuram no abiem ir taisnība?

Piezīme. Taisnstūri ir novietoti tā, ka to malas iet pa kvadrāta rūtiņu malām, taisnstūri nepārklājas un neiziet ārpus dotā kvadrāta.

Atrisinājums. Kristapam ir taisnība, jo var atrast tādu taisnstūru izkārtojumu, ka dotajā kvadrātā nevar ievietot vēl vienu taisnstūri tā, lai tas nepārklātos ar citiem jau ievietotajiem taisnstūriem (skat. 1. att.).



1. att.

2. Skaitļa cipari

Trīsciparu skaitlī desmitu cipars ir vienāds ar pārējo divu ciparu reizinājumu, turklāt pārējie divi cipari ir pirmskaitļi. Zināms, ka dotā skaitļa un tā simetriskā skaitļa starpība ir 99. Kāda ir šī skaitļa ciparu summa?

Piebilde. Par skaitļa simetrisko skaitli sauc skaitli, kuram cipari ir uzrakstīji pretējā secībā. Piemēram, skaitļa 127 simetriskais skaitlis ir 721.

Atrisinājums. Dotā skaitļa ciparu summa ir 11. Dotais skaitlis var būt 263 vai 362. Tie abi ir viens otra simetriskie skaitļi un to starpība ir 99, un abu skaitļu ciparu summa ir 11. Pamatosim, ka šī ir vienīgā iespējamā atbilde.

Divi no trīs cipariem ir pirmskaitļi, tie var būt 2, 3, 5 vai 7. Tā kā desmitu cipars ir pārējo divu ciparu reizinājums, tad simtu un vienu cipars var būt tikai 2 vai 3, jo pārējo reizinājums pārsniegs 9. Tādā gadījumā vienīgie derīgie varianti ir 242, 263, 362, 393. Aplūkosim katra skaitļa un tā simetriskā skaitļa starpību.

$$242 - 242 = 0$$
$$362 - 263 = 99$$
$$393 - 393 = 0$$

Redzams, ka der tikai skaitļi 263 un 362, lai to starpība būtu 99.

3. Skaitļu virkne

Profesors Cipariņš skolēniem vadīja nodarbību par interesantām virknēm, kurām katru nākamo locekli iegūst kā iepriekšējo divu virknes locekļu nenulles ciparu reizinājumu, piemēram, 3; 2; 6; 12; 12; 4; …

Šādas virknes viegli aplūkot un pētīt ar datorprogrammu palīdzību, bet nodarbības laikā profesors Cipariņš skolēniem izstāstīja, ka eksistē arī citas risināšanas metodes. Atrisini dotos uzdevumus un apraksti risināšanas metodi, kurā nav jāizmanto palīgierīces:

a) Kāda ir pirmo 2022 virknes locekļu summa, ja virknes pirmais loceklis ir 1 un otrais loceklis ir 10?

b) Kāds ir 2022. virknes loceklis, ja virknes pirmais loceklis ir 1 un otrais loceklis ir 4?

c) Cik reizes b piemērā dotajā virknē parādās cipars 9, ja ir uzrakstīti tikai tās pirmie 2022 locekļi?

Atrisinājums.

a) Dotā virkne ir $1; 10; 1; 1; \ldots$ Tās visi pirmie 2022 locekļi ir vienādi ar 1, izņemot otro, kas ir 10. Tātad, pirmo 2022 locekļu summa ir $2021 \cdot 1 + 10 = 2021 + 10 = 2031$

b) Dotā virkne ir 1, 4, 4, 16, 24, 48, 256, 1920, 1080, 144, 128, 256, 960, 3240, 1296, 2592, 19440, 25920, 25920, 32400, 4320, 576, **5040, 4200, 160, 48, 192, 576, 3780, 35280, 40320, 5760,** 5040, 4200, 160, 48, 192, 576, 3780, 35280, 40320, 5760,…

Ievērojam, ka šai virknei ir periods, kas sastāv no 10 locekļiem (iekrāsots treknrakstā), bet pirmie 22 skaitļi neietilpst periodā. Tātad līdz 2022. virknes loceklim tieši $(2022 - 22) : 10 = 200$ reizes būs uzrakstīti visi perioda skaitļi. Līdz ar to 2022. loceklis būs perioda pēdējais skaitlis jeb 5760.

c) Lai noskaidrotu, cik reizes cipars 9 parādās b) piemērā dotās virknes pirmajos 2022 locekļos, jāsaskaita, cik reizes cipars 9 parādās, pirms sākas periods, un tam jāpieskaita cipara 9 skaits periodā, kas pareizināts ar periodu skaitu līdz 2022. loceklim. No b) piemēra zinām, ka līdz 2022. loceklim perioda skaitļi ir uzrakstīti tieši 200 reizes. Tas nozīmē, ka b) piemēra dotajā virknē $7 + 1 \cdot 200 = 207$ reizes parādās cipars 9.

4. Lieldienu olas

Lieldienās satikās sešas māsīcas, lai apmainītos ar iepriekšējā vakarā nokrāsotajām olām. Katrai meitenei bija 6 olas un katra no viņām uzdāvināja dažas olas citām (dāvanā saņemtās olas tālāk nedāvināja). Rezultātā viņām visām bija atšķirīgi olu daudzumi. Vai var gadīties, ka katra no māsīcām uzdāvināja citām mazāk olu, nekā viņai pašai bija beigās?

Atrisinājums. Nē, nevar. Pierādīsim no pretējā, tāpēc pieņemsim, ka tomēr katra no māsīcām uzdāvināja citām mazāk olu, nekā viņai pašai bija beigās.

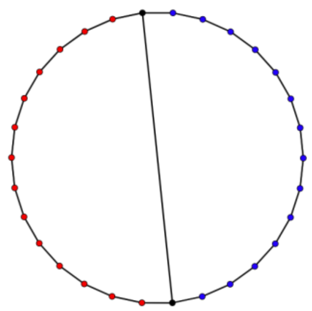
Ja kādai no meitenēm beigās bija ne vairāk kā 3 olas, tad vismaz $6 - 3 = 3$ olas viņa uzdāvināja citai. Bet tas ir pretrunā ar pieņēmumu, ka katra no māsīcām uzdāvināja citām mazāk olu nekā viņai bija sākumā. Tātad katrai no māsīcām bija vairāk nekā 3 olas jeb vismaz 4 olas. No nosacījuma, ka visām māsīcām beigās bija atšķirīgi olu daudzumi, seko, ka kopā visām meitenēm beigās bija vismaz $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$ olas (saskaitām mazākos iespējamos 6 dažādos naturālos skaitļus, kas ir vismaz 4). Bet māsīcām sākumā bija $6 \cdot 6 = 36$ olas. Tā kā $39 > 36$, esam ieguvuši pretrunu, līdz ar to pieņēmums ir nepareizs un katra no māsīcām nevarēja uzdāvināt citām mazāk olu, nekā viņai pašai bija beigās.

5. Kura komanda uzvarēs?

Aplī izvietoti 30 krēsli, un 32 skolēni ir sadalījušies divās komandās, katrā pa 16 skolēniem. Katrai komandai ir astoņas virves un katra no komandām pamīšus veic gājienu. Vienā gājienā divi skolēni no vienas komandas paņem virvi un apsēžas katrs savā krēslā tā, lai viņu virve nekrustotu jau kādu esošu virvi starp citiem diviem skolēniem. Apsēžoties skolēni virvi nostiepj tā, lai tā veidotu taisnu līniju starp abiem skolēniem. Kura komanda – pirmā vai otrā – vienmēr varēs veikt pēdējo gājienu, tādējādi uzvarot?

Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr var uzvarēt pirmā komanda.

Attēlosim krēslus kā punktus uz riņķa līnijas un virves starp diviem skolēniem kā nogriežņus. Pirmajā gājienā pirmās komandas diviem skolēniem jāapsēžas tā, lai virves (nogriežņa) katrā pusē paliktu 14 krēsli (punkti) (skat. 2. att.).



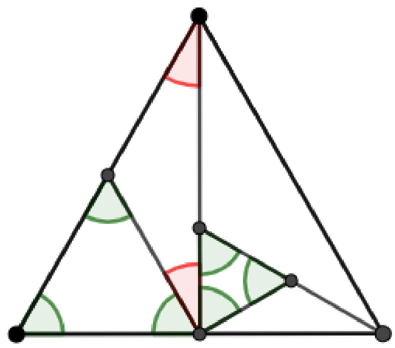
2. att.

Katrā savā nākamajā gājienā pirmās komandas diviem skolēniem jāapsēžas simetriski otrās komandas pēdējiem diviem skolēniem attiecībā pret 2. att. novietoto nogriezni, tātad arī nogriežņi (virves) būs simetriskas pret pirmo nogriezni (virvi). Ja otrā komanda varēs izdarīt gājienu, tad arī pirmā komanda to varēs izdarīt. Līdz ar to gājieni pietrūks otrai komandai un tā zaudēs.

6. Trīsstūra dalīšana

Profesors Cipariņš, darbojoties ar daudzstūriem, veiksmīgi spēja sadalīt patvaļīgu trīsstūri vairākos vienādsānu trīsstūros. Šoreiz viņš vēlas sadalīt vienādmalu trīsstūri piecos dažādos vienādsānu trīsstūros. Vai to var izdarīt?

Atrisinājums. Jā, var. Piemēram, skatīt 3. att.

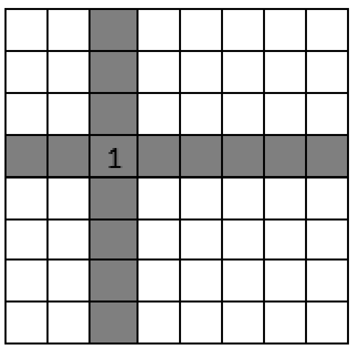


3. att.

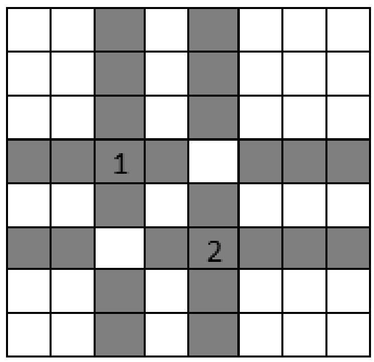
Leņķi 3. att., kas iezīmēti ar zaļu, ir $60°$, bet ar sarkanu – $30°$. Nav grūti pārliecināties, ka 3. att. trīsstūris sadalīts dažādos trīsstūros, jo platleņķu vienādsānu trīsstūri balstās uz dažādām malām.

7. Krustu kvadrāts

Dots 8×8 rūtiņu kvadrāts, kurā katra rūtiņa ir nokrāsota balta. Katrā gājienā var izvēlēties kādu rūtiņu un mainīt tās kolonnas un rindas, kurās atrodas izvēlētā rūtiņa, katras rūtiņas krāsas uz pretējo, t.i., ja tā bija balta, tad uz melnu, un, ja tā bija melna, tad uz baltu. Kāds ir mazākais skaits gājienu, lai sākotnējo balto kvadrātu padarītu melnu? Pirmā un otrā gājiena piemēram skatīt attiecīgi 4. att. un 5. att.



4. att.

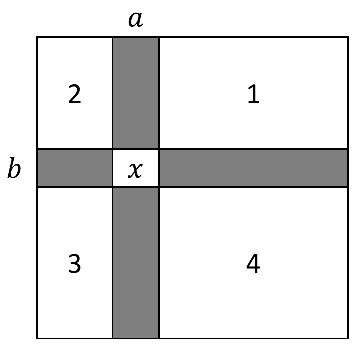


5. att.

Atrisinājums.

Mazākais gājienu skaits būs 64. Viegli pārliecināties, ka, ja veic gājienu katrā rūtiņā, tad beigās iegūs melnu kvadrātu, jo katra rūtiņa mainīs krāsu nepāra skaitu reižu (15).

Pamatosim, ka mazāku gājienu skaitu nevar iegūt. Pieņemsim pretējo, t.i., var iegūt melnu kvadrātu ar mazāk nekā 64 gājieniem. Skaidrs, ka nav vērts veikt gājienu vienā un tajā pašā rūtiņā vairāk par 1 reizi, jo divreiz izdarīts gājiens tajā pašā rūtiņā pats sevi "anulē". Tātad katrā rūtiņā veikto gājienu skaits ir vai nu 0, vai arī 1. Tā kā mēs vēlamies iegūt mazāk par 64 gājieniem, tad kādā no rūtiņām jāveic 0 gājieni. Tas nozīmē, ka būs tāda rūtiņa x, kurā nav veikts gājiens.



6. att.

Kolonnu, kurā atrodas x, apzīmēsim ar a un rindu – ar b. Kad runāsim par a un b, rūtiņa x netiks ņemta vērā, t.i., tiek apspriests tikai iekrāsotais reģions 6. att. Pēc pieņēmuma katra rūtiņa kolonnā a un rindā b ir mainījušas krāsu nepāra skaitu reižu, jo pretējā gadījumā kāda no tām būtu balta. Tā kā kopumā ir 14 rūtiņas, neieskaitot x, tad kolonnā a un rindā b kopumā ir notikušas pāra skaits krāsu maiņu.

Krāsu maiņa a un b rūtiņās var notikt divos veidos: 1) veikts gājiens kādā no ārējiem reģioniem 1, 2, 3 vai 4 (skat. 6. att.); 2) veikts gājiens iekrāsotajā daļā kolonnā a vai rindā b. Ja tiek veikts gājiens kādā no ārējiem reģioniem, tad tas kopumā nomainīs krāsu divām rūtiņām no a un b. Tātad gājieni reģionos 1, 2, 3 un 4 kopumā krāsu rūtiņām no a un b ir mainījuši pāra skaitā.

Veikto gājienu skaitu a apzīmēsim ar a_g un veikto gājienu skaitu b ar b_g. Katrs gājiens, kas veikts rūtiņās no a vai b, nomaina krāsu 7 rūtiņām attiecīgi no a vai b. Tātad kopumā ir veiktas $7a_g + 7b_g = 7(a_g + b_g)$ krāsu maiņas. Tā kā kopumā a un b ir veiktas pāra skaits krāsu maiņu, tad secinām, ka $(a_g + b_g)$ ir pāra skaitlis, jo arī ārējie reģioni deva pāra skaitu krāsu maiņu. Tas nozīmē, ka rūtiņā x ir notikusi krāsu maiņa pāra skaitā. Tas ir pretrunā ar to, ka rūtiņa x ir melna, jo tas prasītu nepāra skaitu krāsu maiņu. Secinām, ka pieņēmums, ka kādā rūtiņā nav veikts gājiens, ir aplams.