Elementāru nevienādību pierādīšana

Mazā matemātikas universitāte

Emīls Kalugins

Latvijas universitāte Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultāte

Rīga, 2023

Ievads

Skolā nākas sastapties ar uzdevumiem par nevienādības risināšanu, bet matemātikas olimpiādēs uzsvars tiek likts uz nevienādības pierādīšanu.

Svarīgi ir saprast atšķirību starp nevienādību risināšanu un pierādīšanu.

Nevienādību pierādīšana

Atrisināt nevienādību nozīmē atrast visus tās atrisinājumus un pierādīt, ka citu atrisinājumu nav. Visu nevienādības atrisinājumu apvienojumu sauc par šīs nevienādības atrisinājumu kopu.

Pierādīt nevienādību nozīmē pamatot, ka nevienādība ir patiesa pie jebkurām pieļaujamajām mainīgo vērtībām.

Ekvivalentas nevienādības

Divas nevienādības sauc par **ekvivalentām**, ja tām ir viena tā pati atrisinājuma kopa.

Piemēram, nevienādības $x - 1 > 2023$ un $x > 2024$ ir ekvivalentas.

Bieži vien nevienādības pierāda, izmantojot ekvivalentus pārveidojumus.

Tādējādi iegūst nevienādību, kuras patiesums ir acīmredzams vai viegli noskaidrojams ar elementāru spriedumu palīdzību.

Ekvivalenti pārveidojumi

- Nevienādības kādu pusi aizstāj ar tai identisku izteiksmi.

$$2x + 3x < 3 + 7 \implies 5x < 10.$$

- Nevienādības abām pusēm pieskaita vienu un to pašu skaitli vai izteiksmi, kas nemaina definīcijas apgabalu.

$$x - 9 < 5 \implies x - 9 + 9 < 5 + 9.$$

- Nevienādības abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu pozitīvu skaitli (vai izteiksmi, kas ir pozitīva visām mainīgo vērtībām).

$$\frac{1}{x^2 + 3} \leq 5 \;\Big|\; \cdot (x^2 + 3) > 0 \implies 1 \leq 5(x^2 + 3).$$

Ekvivalenti pārveidojumi

- Nevienādības abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu negatīvu skaitli (vai izteiksmi, kas ir negatīva visām mainīgo vērtībām).

$$-\frac{1}{3}x \geq 7 \;\Big|\cdot(-3) \implies x \leq -21$$

- Nevienādības abas puses kāpina kvadrātā vai velk kvadrātsakni, ja definīcijas apgabalā dotās nevienādības abas puses ir **nenegatīvas**.

$$x^2 > 9 \implies |x| > 3.$$

N.B. $\sqrt{x^2} = |x|$.

Pilno kvadrātu atdalīšana

Viens no ekvivalento pārveidojumu veidiem ir pilno kvadrātu atdalīšana. Lai atdalītu pilno kvadrātu, izmanto saīsinātās reizināšanas formulas:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; **N.B.** $(a-b)^2 = (b-a)^2$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Pilno kvadrātu atdalīšana

Bieži vien tikai ar formulu izmantošanu nepietiek, tāpēc jāizmanto arī spriedumi. Visbiežāk izmantotie ir šādi:

- ja A ir algebriska izteiksme, tad $A^2 \geq 0$.
- ja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ir algebriskas izteiksmes, tad $A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n \geq 0$.
- ja $A_1, A_2, \ldots A_n$ ir algebriskas izteiksmes un $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ir nenegatīvas izteiksmes, tad $c_1 A_1^2 + c_2 A_2^2 + \cdots + c_n A_n^2 \geq 0$.

Dalīšana reizinātājos

Dažos gadījumos tikai ar pilno kvadrātu atdalīšanu nepietiek, tāpēc papildus izmanto citas metodes.

Dažreiz nevienādību izdodas pierādīt, veicot visu nevienādības locekļu pārnešanu uz vienu pusi un iegūto izteiksmi sadalot reizinātājos.

Turklāt šiem reizinātājiem jābūt tādiem, lai par tiem skaidri varētu pateikt, vai tie ir pozitīvi, nenegatīvi vai negatīvi.

Dalīšana reizinātājos

Apgalvojumi

- Divu negatīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs;
- Divu pozitīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs;
- Pozitīva un negatīva skaitļa reizinājums ir negatīvs.

Formulas

- $ab + bc = b(a + c)$;
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;
- $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, kur x_1 un x_2 ir kvadrāttrinoma saknes.

Piemēri

Pierādīt nevienādību

$$x^2 + y^2 + 10x - 6y + 34 \geq 0,$$

ja x un y ir reāli skaitļi.

Piemēri

Pierādīt nevienādību

$$x^2 + y^2 + 10x - 6y + 34 \geq 0,$$

ja x un y ir reāli skaitļi.

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\left(x^2 + 10x + \square\right) + \left(y^2 - 6y + \square\right) + 34 \geq 0$$

Piemēri

Pierādīt nevienādību

$$x^2 + y^2 + 10x - 6y + 34 \geq 0,$$

ja x un y ir reāli skaitļi.

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\left(x^2 + 10x + \boxed{}\right) + \left(y^2 - 6y + \boxed{}\right) + 34 \geq 0$$
$$\left(x^2 + 10x + 25\right) + \left(y^2 - 6y + 9\right) \geq 0$$

Piemēri

Pierādīt nevienādību

$$x^2 + y^2 + 10x - 6y + 34 \geq 0,$$

ja x un y ir reāli skaitļi.

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\left(x^2 + 10x + \square\right) + \left(y^2 - 6y + \square\right) + 34 \geq 0$$
$$\left(x^2 + 10x + 25\right) + \left(y^2 - 6y + 9\right) \geq 0$$
$$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad pēdējās nevienādības kreisajā pusē ir divu nenegatīvu skaitļu summa, kas arī ir nenegatīvs skaitlis. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x un y.

Piemēri

Pierādi, ka $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c$, ja a, b un c ir reāli skaitļi!

Piemēri

Pierādi, ka $a^2+b^2+c^2+\frac{3}{4} \geq a+b+c$, ja a, b un c ir reāli skaitļi!

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$a^2+b^2+c^2+\frac{3}{4}-a-b-c \geq 0$$

Piemēri

Pierādi, ka $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c$, ja a, b un c ir reāli skaitļi!

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} - a - b - c \geq 0$$

$$\left(a^2 - a + \square\right) + \left(b^2 - b + \square\right) + \left(c^2 - c + \square\right) + \frac{3}{4} \geq 0$$

Piemēri

Pierādi, ka $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c$, ja a, b un c ir reāli skaitļi!

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} - a - b - c \geq 0$$
$$\left(a^2 - a + \square\right) + \left(b^2 - b + \square\right) + \left(c^2 - c + \square\right) + \frac{3}{4} \geq 0$$
$$\left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) + \left(c^2 - c + \frac{1}{4}\right) \geq 0$$

Piemēri

Pierādi, ka $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c$, ja a, b un c ir reāli skaitļi!

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} - a - b - c &\geq 0 \\ \left(a^2 - a + \square\right) + \left(b^2 - b + \square\right) + \left(c^2 - c + \square\right) + \frac{3}{4} &\geq 0 \\ \left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) + \left(c^2 - c + \frac{1}{4}\right) &\geq 0 \\ \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem a, b un c.

Piemēri

Pierādīt, ka $\dfrac{a+b}{a^2+b^2} \geq \dfrac{a^2+b^2}{a^3+b^3}$, ja a un b ir pozitīvi skaitļi.

Piemēri

Pierādīt, ka $\dfrac{a+b}{a^2+b^2} \geq \dfrac{a^2+b^2}{a^3+b^3}$, ja a un b ir pozitīvi skaitļi.

Atrisinājums. Tā kā a un b ir pozitīvi skaitļi, tad arī abu daļu saucēji ir pozitīvi, t. i., $a^2+b^2>0$ un $a^3+b^3>0$, tāpēc abas puses drīkst reizināt ar $(a^2+b^2)(a^3+b^3)>0$ (šis ir ekvivalents pārveidojums):

$$(a+b)(a^3+b^3) \geq (a^2+b^2)(a^2+b^2)$$

Piemēri

Pierādīt, ka $\dfrac{a+b}{a^2+b^2} \geq \dfrac{a^2+b^2}{a^3+b^3}$, ja a un b ir pozitīvi skaitļi.

Atrisinājums. Tā kā a un b ir pozitīvi skaitļi, tad arī abu daļu saucēji ir pozitīvi, t. i., $a^2+b^2>0$ un $a^3+b^3>0$, tāpēc abas puses drīkst reizināt ar $(a^2+b^2)(a^3+b^3)>0$ (šis ir ekvivalents pārveidojums):

$$\begin{aligned}
(a+b)(a^3+b^3) &\geq (a^2+b^2)(a^2+b^2)\\
a^4+ab^3+a^3b+b^4 &\geq a^4+2a^2b^2+b^4\\
ab^3+a^3b-2a^2b^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Piemēri

Pierādīt, ka $\frac{a+b}{a^2+b^2} \geq \frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}$, ja a un b ir pozitīvi skaitļi.

Atrisinājums. Tā kā a un b ir pozitīvi skaitļi, tad arī abu daļu saucēji ir pozitīvi, t. i., $a^2+b^2>0$ un $a^3+b^3>0$, tāpēc abas puses drīkst reizināt ar $(a^2+b^2)(a^3+b^3)>0$ (šis ir ekvivalents pārveidojums):

$$\begin{aligned}
(a+b)(a^3+b^3) &\geq (a^2+b^2)(a^2+b^2)\\
a^4+ab^3+a^3b+b^4 &\geq a^4+2a^2b^2+b^4\\
ab^3+a^3b-2a^2b^2 &\geq 0\\
ab(b^2+a^2-2ab) &\geq 0\\
ab(b-a)^2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Sarežģītāki piemēri

Bieži vien uzreiz nevar saskatīt, kā atdalīt pilno kvadrātu, vai arī parādās saskaitāmiem, kas veido jauktu reizinājumu.

Šādos gadījumos ir nepieciešams atdalīt mainīgos pakāpeniski un visticamākais pielietot saīsinātās reizināšanas formulas trīs vai vairāk saskaitāmajiem.

Mērķis ir panākt to, lai ar katru soli kāds no mainīgajiem vairs neietilptu atlikušajos kvadrātos.

Sarežģītāki piemēri

Papētīsim sekojošo uzdevumu.

> Pierādi, ka $2x^2 + 2\sqrt{x^3} - 27x - 22\sqrt{x} + 130 \geq 0$ visām nenegatīvām x vērtībām!

Šāda veida uzdevumā varbūt varam saskatīt saskaitāmos, no kuriem atdalīt pilno kvadrātu $(2x^2 - 27x + 130)$, bet tad jābūt ļoti uzmanīgiem vai viltīgiem (būtu nepieciešams dalīt divās daļās un atdalīt divus atsevišķus pilnos kvadrātus).

Pie tam mēs neatrisinām to, ko iesākt ar saskaitāmajiem $2\sqrt{x^3}$ un $-22\sqrt{x}$.

Mainīgo izolēšana

Ir kaut kāda vēlme tikt vaļā no $2\sqrt{x^3}$ un $-22\sqrt{x}$, lai tie netraucētu tālāk atdalīt pilnos kvadrātus no pārējiem saskaitāmajiem.

Vispirms ievērosim, ka $2\sqrt{x^3} = 2x\sqrt{x}$, tāpēc patiesībā mums ir tikai viens reizinātājs, ar kuru ir neērti darboties parasti, t. i., $\sqrt{x}$.

Centīsimies viņu izolēt, atdalot kvadrātu un parūpējoties, ka atlikušajos saskaitāmajos šis reizinātājs vairs neparādīsies.

Mainīgo izolēšana

Pakāpeniski veidosim pilno kvadrātu, ņemot vērā, ka visticamākais vajadzēs saīsināto formulu ar trīs saskaitāmajiem.

$$\left(\sqrt{x}+\square+\square\right)^2 = 2x\sqrt{x} - 22\sqrt{x}+\square+\cdots+\square.$$

Lai atbrīvotos no $2x\sqrt{x}$ varam ievērot, ka der saīsinātajā formulā pievienot saskaitāmo x, jo tad veidosies divkāršais reizinājums ar $\sqrt{x}$, t. i.,

$$\left(\sqrt{x}+x+\square\right)^2 = 2x\sqrt{x} - 22\sqrt{x}+\square+\cdots+\square.$$

Mainīgo izolēšana

$$\left(\sqrt{x} + x + \square\right)^2 = 2x\sqrt{x} - 22\sqrt{x} + \square + \cdots + \square \ .$$

Tālāk ievērojam, ka parādās saskaitāmais $-22\sqrt{x}$. Šo arī varam uzskatīt kā divkāršu reizinājumu saskaitāmajam $\sqrt{x}$ iekš saīsinātās formulas ar kādu citu saskaitāmo. Šajā gadījumā tas būtu -11, jo $2 \cdot (-11) \cdot \sqrt{x} = -22\sqrt{x}$. Tātad varam papildināt formulu un iegūt

$$\left(\sqrt{x} + x - 11\right)^2 = 2x\sqrt{x} - 22\sqrt{x} + \square + \cdots + \square \ .$$

Tagad tik atliek izrakstīt formulu pilnībā, t. i.,

$$\left(\sqrt{x} + x - 11\right)^2 = x + x^2 + 121 + 2x\sqrt{x} - 22\sqrt{x} - 22x.$$

Mainīgo izolēšana

Tātad iegūstam, ka
$2x\sqrt{x} - 22\sqrt{x} = \left(\sqrt{x} + x - 11\right)^2 - x - x^2 - 121 + 22x$. Ņemot vērā sākotnējo izteiksmi, varam tajā aizvietot iegūto izteiksmi un turpināt pārveidot:

$$2x^2 + 2\sqrt{x^3} - 27x - 22\sqrt{x} + 130 \geq 0$$
$$2x^2 - 27x + 130 + \left(\sqrt{x} + x - 11\right)^2 - x - x^2 - 121 + 22x \geq 0$$
$$\left(\sqrt{x} + x - 11\right)^2 + x^2 - 6x + 9 \geq 0$$
$$\left(\sqrt{x} + x - 11\right)^2 + (x - 3)^2 \geq 0.$$

Esam nonākuši līdz ekvivalentai nevienādībai, kuras patiesums ir acīmredzams.

Sarežģītāki piemēri

Šī stratēģija noder arī tādos gadījumos, kad ir dots kāds kvadrātisks polinoms ar vairākiem mainīgajiem.

> Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem x, y un z izpildās nevienādība
>
> $$2x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 - 2xy - 2xz + yz - 2y + 4x - 2z + 2 \geq 0.$$

Jautājums tik rodas, kuru mainīgo ir visizdevīgāk izolēt pirmo? Vispirms jāņem tāds mainīgais, kura kvadrāts parādās kā saskaitāmais, t. i., $2x^2$, $\frac{y^2}{2}$ vai z^2. Tā kā visiem mainīgajiem šī prasība izpildās, tad varam ņemt to, pie kura koeficients ir visvienkāršākais. Šajā gadījumā z^2.

Mainīgo izolēšana

Tātad veidosim pakāpeniski saīsināto formulu, cenšoties izolēt mainīgo z. Vispirms jāsagrupē visi saskaitāmie, kuros z parādās kā reizinātājs.

$$\left(z + \square + \square + \square\right)^2 = z^2 - 2xz + yz - 2z + \square + \cdots + \square \ .$$

Varam ievērot, ka saīsinātajā formulā parādīsies 4 saskaitāmie šajā gadījumā. Lai sagrupētu visus saskaitāmos, kur z parādās kā reizinātājs, tad pieņemam, ka tajos tas iekļaujas kā divkāršots reizinātājs, izņemot, protams, z^2.

Mainīgo izolēšana

Varam ievērot, ka vienādība izpildītos, ja sarakstam sekojošās vērtības:

$$\left(z - x + \frac{y}{2} - 1\right)^2 = z^2 - 2xz + yz - 2z + \square + \cdots + \square \ .$$

Tagad tik jāizraksta formula pilnībā.

$$\left(z - x + \frac{y}{2} - 1\right)^2 = z^2 + x^2 + \frac{y^2}{4} + 1 - 2xz + yz - 2z - xy + 2x - y.$$

Mainīgo izolēšana

Varam izteikt interesējošos saskaitāmos

$$z^2 - 2xz + yz - 2z = \left(z - x + \frac{y}{2} - 1\right)^2 - x^2 - \frac{y^2}{4} - 1 + xy - 2x + y$$

un ievietot tos sākotnējā izteiksmē

$$\begin{aligned} 2x^2 + \frac{y^2}{2} - 2xy - 2y + 4x + 2 \\ + \left(z - x + \frac{y}{2} - 1\right)^2 - x^2 - \frac{y^2}{4} - 1 + xy - 2x + y \geq 0. \end{aligned}$$

Mainīgo izolēšana

Vienkāršojot iegūstam:

$$\left(z - x + \frac{y}{2} - 1\right)^2 + x^2 + \frac{y^2}{4} + 1 - xy + 2x - y \geq 0$$

$$\left(z - x + \frac{y}{2} - 1\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2} + 1\right)^2 \geq 0.$$

Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad sākotnējā nevienādība ir spēkā visiem reāliem x, y un z.

Ekstrēmu meklēšana

Bieži vien uzdevumi, kuros prasīts noteikt izteiksmes lielāko vai mazāko vērtību, ir apslēpti nevienādības pierādīšanas uzdevumi.

Tikai šajā gadījumā papildus jāpamato, ka izteiksme var pieņemt šo ekstremālo vērtību.

Kaut arī varam rakstīt, ka $x^2 \geq -3$ jebkuram reālam skaitlim, tai īsti nav nozīmes, jo nevienai x vērtībai nav spēkā $x^2 = -3$, t. i., ekstrēms netiek sasniegts.

Ekstrēma uzdevumi

Uzdevuma, kurā jāatrod lielākā vai mazākā vērtība (ekstrēms), atrisinājumam jāsastāv no divām daļām:

1 1) jāatrod vislielākā (vismazākā) vērtība un jāparāda piemērs, kurā izpildās visas prasības;

2 2) jāpierāda, ka lielāku (mazāku) vērtību iegūt nevar.

Otrais punkts izpaužas ar to, ka tiek pierādīta kāda nevienādība, kas risinātājam pašam jāatrod, t. i., tā netiek teikta priekšā.

Ekstrēma uzdevumi

Līdz šim atdalot pilno kvadrātu, gluži nepārpalika pāri neviens saskaitāmais.

Ekstrēmu uzdevumos mazākā vai lielākā vērtība bieži vien atklāsies, kad apkoposim pārpalikumus no pilnā kvadrāta atdalīšanas.

Bieži vien tas izpaudīsies, ka tiks atņemta un pieskaitīta viena un tā pati vērtība, lai kopējā izteiksme netiktu mainīta, bet varētu atdalīt pilno kvadrātu.

Piemērs

Kāda ir izteiksmes $x + \frac{2023}{x}$ mazākā iespējamā vērtība, ja $x > 0$?

Piemērs

Kāda ir izteiksmes $x + \frac{2023}{x}$ mazākā iespējamā vērtība, ja $x > 0$?

Atrisinājums. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

$$x + \frac{2023}{x} = \left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{2023} + \left(\sqrt{\frac{2023}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{2023}$$

Piemērs

Kāda ir izteiksmes $x + \frac{2023}{x}$ mazākā iespējamā vērtība, ja $x > 0$?

Atrisinājums. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

$$\begin{aligned} x + \frac{2023}{x} &= \left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{2023} + \left(\sqrt{\frac{2023}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{2023} \\ &= \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{2023}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{2023} \end{aligned}$$

Piemērs

Kāda ir izteiksmes $x + \dfrac{2023}{x}$ mazākā iespējamā vērtība, ja $x > 0$?

Atrisinājums. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

$$\begin{aligned} x + \frac{2023}{x} &= \left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{2023} + \left(\sqrt{\frac{2023}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{2023} \\ &= \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{2023}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{2023} \geq 2\sqrt{2023}, \end{aligned}$$

jo skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs. Vienādība izpildās pie $x = \sqrt{2023}$. Tātad dotās izteiksmes mazākā iespējamā vērtība ir $2\sqrt{2023}$.

Parabolas virsotnes

Tā kā pilnā kvadrāta atdalīšana parasti notiek ar kvadrāttrinomiem, tad ir vērts atcerēties, ka pastāv ātrs veids, kā noteikt ekstrēmu tiem — parabolas virsotne.

Ja $ax^2 + bx + c$ ir kvadrāttrinoms, tad tas sasniedz savu ekstrēmu punktā $x_v = \frac{-b}{2a}$.

Ja parabolas zari ir vērsti uz augšu ($a > 0$), tad šis atzīmēs punktu, kur sasniedz mazāko vērtību, bet, ja zari ir vērsti uz leju ($a < 0$), tad lielāko vērtību.

Piemērs

Kāda ir izteiksmes $3x^2 - 12x - 7$ mazākā vērtība?

Piemērs

Kāda ir izteiksmes $3x^2 - 12x - 7$ mazākā vērtība?

Atrisinājums. Dotā kvadrāttrinoma virsotne atrodas punktā $x = 2$. Tātad tā sasniedz mazāko vērtību šajā punktā un tā ir $3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 - 7 = -19$.

Piemērs

Kāda ir izteiksmes $3x^2 - 12x - 7$ mazākā vērtība?

Atrisinājums. Dotā kvadrāttrinoma virsotne atrodas punktā $x = 2$. Tātad tā sasniedz mazāko vērtību šajā punktā un tā ir $3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 - 7 = -19$.

Ja ir vēlme atdalīt pilno kvadrātu, tad varam iegūt, ka $3x^2 - 12x - 7 = 3x^2 - 12x + 12 - 19 = 3(x-2)^2 - 19$, ko varbūt uzreiz nevaram saskatīt.

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

- Pierādīt nevienādību $x^2 + xy + y^2 \geq 0$.
- Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem x un y izpildās nevienādība

$$x^2 + y^2 + 4 \geq 2x + 2y + xy.$$

- Kāda ir izteiksmes $2x^4 - 2x^3 - x^2$ mazākā vērtība?
- Kāda ir izteiksmes

$$a^{20} + a^4 + \frac{1}{a^4 + 1}$$

mazākā iespējamā vērtība, ja a ir reāls skaitlis?

Paldies par uzmanību!