NNV 14/15 3. nodarbība

3-1. Ievilktā riņķa centrs ir četrstūra $ABCD$ leņķu bisektrises krustpunkts. Tātad OA, OB, OC un OD ir attiecīgi leņķu A, B, C un D bisektrises. Apzīmēsim

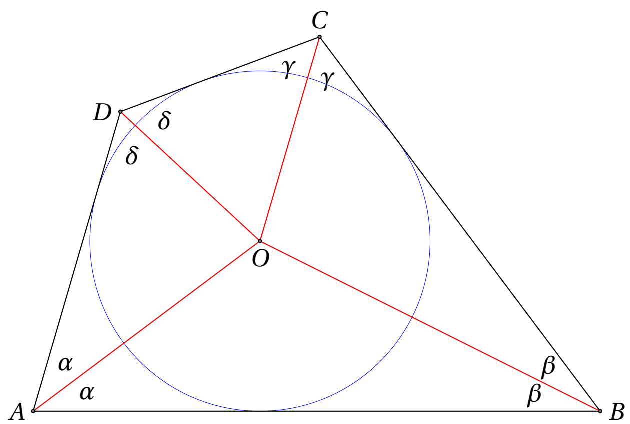
$$\begin{aligned}\sphericalangle OAB &= \sphericalangle OAD = \alpha;\\ \sphericalangle OBA &= \sphericalangle OBC = \beta;\\ \sphericalangle OCD &= \sphericalangle OCB = \gamma;\\ \sphericalangle ODC &= \sphericalangle ODA = \delta.\end{aligned}$$

Turklāt, tā kā četrstūra visu leņķu summa ir $360°$, tad izpildās vienādība

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360°$$

jeb

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°. \tag{1}$$



Tādā gadījumā (ņemot vērā, ka trīsstūra leņķu summa ir $180°$)

$$\begin{aligned}\sphericalangle AOB &= 180° - \sphericalangle OAB - \sphericalangle OBA = 180° - \alpha - \beta;\\ \sphericalangle COD &= 180° - \sphericalangle OCD - \sphericalangle ODC = 180° - \gamma - \delta;\\ \sphericalangle AOD &= 180° - \sphericalangle OAD - \sphericalangle ODA = 180° - \alpha - \delta;\\ \sphericalangle BOC &= 180° - \sphericalangle OBC - \sphericalangle OCB = 180° - \beta - \gamma.\end{aligned}$$

No iegūtajām vienādībām un (1) seko, ka

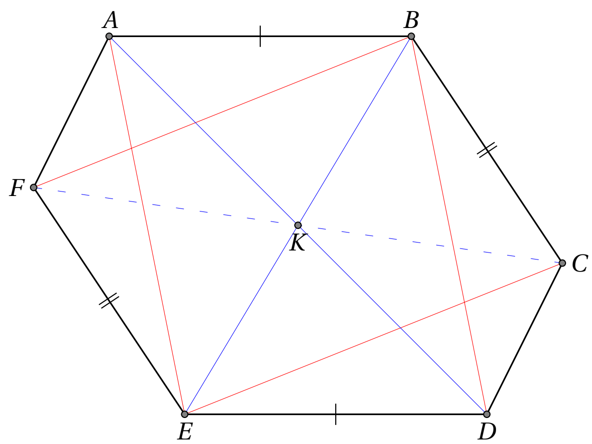
$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 2 \cdot 180° - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 360° - 180° = 180°$$

un

$$\sphericalangle AOD + \sphericalangle BOC = 2 \cdot 180° - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 360° - 180° = 180°.$$

Redzam, ka $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = \sphericalangle BOC + \sphericalangle AOD = 180°$, kas arī bija jāpierāda.

3-2.



NNV 14/15 3. nodarbība

No tā, ka $AB = DE$ un $AB \parallel DE$, seko, ka $ABDE$ ir paralelograms un tā diagonāles AD un BE krustpunktā dalās uz pusēm. Apzīmēsim šo krustpunktu ar K, tātad K ir gan AD, gan BE viduspunkts.

No tā, ka $BC = EF$ un $BC \parallel EF$, seko, ka $BCEF$ ir paralelograms un tā diagonāles BE un CF krustpunktā dalās uz pusēm. Tātad CF iet caur nogriežņa BE viduspunktu K. Bet tas arī nozīmē, ka visi trīs nogriežņi AD, BE un CF krustojas vienā punktā K, kas bija jāpierāda.

3-3. Nē, ne noteikti. Piemēram, ja doto nogriežņu garumi ir 1; 2; 3; 6; 11; 20 cm (kas ir iespējams, jo tie ir seši dažādi skaitļi, kuru summa ir 43), tad no katriem 4 skaitļiem lielākais ir lielāks par vai vienāds ar triju pārējo summu. Bet četrstūrī katras malas garumam ir jābūt mazākam par triju pārējo garumu summu (lauztās līnijas nevienādība) – tātad nav iespējams konstruēt četrstūri, kura malas būtu vienādas ar četriem no dotajiem nogriežņiem.

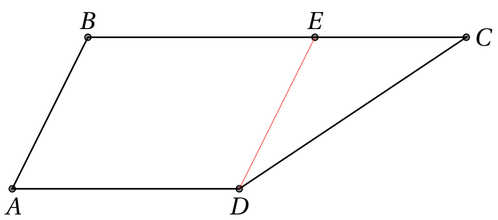
3-4. Pieņemsim, ka trapeces $ABCD$ pamati ir AD un BC, bet sānu malas ir AB un CD. Tā kā trapeces pamati nav vienādi, viens no tiem ir lielāks par otru; varam uzskatīt, ka $AD < BC$.

Caur D novelkam taisni, paralēlu AB; tās krustpunktu ar BC apzīmēsim ar E. Tad $ABED$ ir paralelograms, jo tā malas ir pa pāriem paralēlas.

Tā kā $ABED$ ir paralelograms, tā pretējās malas ir pa pāriem vienādas:

$$AB = ED, \qquad AD = BE.$$

Tā kā $BE = AD < BC$, tad E ir nogriežņa BC iekšējs punkts, sk. zīmējumu.



No trīsstūra nevienādībām trīsstūrī EDC seko, ka

$$ED + DC > EC \tag{2}$$

un

$$|ED - DC| < EC. \tag{3}$$

Tā kā $ED = AB$ un $EC = BC - BE = BC - AD$, tad iegūtās nevienādības var pārrakstīt šādi:

$$AB + DC > BC - AD \tag{4}$$

un

$$|AB - DC| < BC - AD. \tag{5}$$

Atliek ievērot, ka nevienādība (4) nozīmē, ka trapeces $ABCD$ sānu malu garumu summa $AB + DC$ ir lielāka nekā pamatu garumu starpība $BC - AD$, bet (5) nozīmē, ka trapeces $ABCD$ sānu malu garumu starpība $|AB - DC|$ ir mazāka nekā pamatu garumu starpība $BC - AD$. Vajadzīgais pierādīts.

Piezīme. Pirmā nevienādība gan ir viegli pierādāma, neizmantojot papildkonstrukciju: no lauztās līnijas nevienādības izriet nevienādība $BA + AD + DC > BC$, kur BC ir garākais pamats. Līdz ar to (atņemot abām nevienādības pusēm nogriežņa AD garumu) iegūst

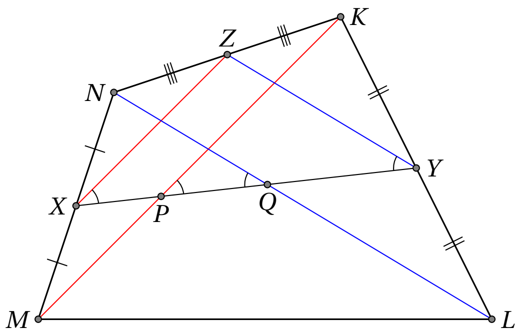
$$BA + DC > BC - AD.$$

3-5.

Pieņemsim, ka izliektais četrstūris ir $MNKL$. Ar X apzīmēsim MN viduspunktu, ar Y apzīmēsim KL viduspunktu. Taisnes XY krustpunkti ar MK un NL ir attiecīgi P un Q.

Tad ir dots, ka

$$\sphericalangle KPQ = \sphericalangle NQP.$$



Atliksim vēl malas NK viduspunktu Z. Tad XZ ir trīsstūra MNK viduslīnija, līdz ar to $XZ \parallel MK$ un $MK = 2XZ$. Analoģiski, YZ ir trīsstūra LKN viduslīnija, līdz ar to $YZ \parallel LN$ un $LN = 2YZ$.

Tādā gadījumā

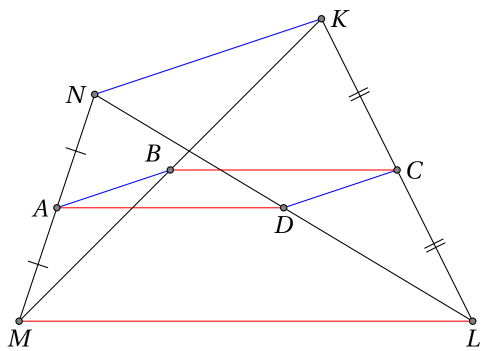
- $\sphericalangle ZXY = \sphericalangle KPQ$, kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm;
- $\sphericalangle KPQ = \sphericalangle NQP$, pēc dotā;
- $\sphericalangle NQP = \sphericalangle ZYX$, kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm.

Seko, ka $\sphericalangle ZXY = \sphericalangle ZYX$. Tātad ΔZXY ir vienādsānu trīsstūris un $ZX = ZY$ (jo pamata XY pieleņķi ir vienādi). Bet no tā izriet, ka

$$MK = 2XZ = 2YZ = LN,$$

kas arī bija jāpierāda.

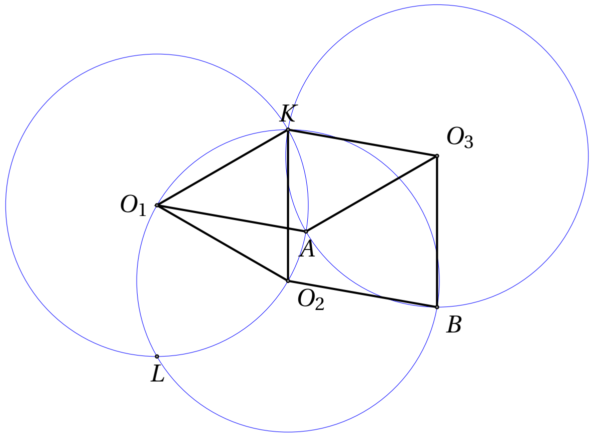
3-6. Pieņemsim, ka izliektais četrstūris ir $MNKL$ un A ir malas MN viduspunkts un C ir malas KL viduspunkts, sk. zīmējumu:



Tā kā AB ir trīsstūra MNK viduslīnija, tad $AB \parallel NK$ un $AB = 0.5NK$. Tā kā CD ir trīsstūra LNK viduslīnija, tad $CD \parallel NK$ un $CD = 0.5NK$. Līdz ar to $AB \parallel CD$ un $AB = CD$. Seko, ka $ABCD$ ir paralelograms, kas arī bija jāpierāda.

3-7.

NNV 14/15 3. nodarbība



Tā kā ω_1 un ω_2 ir vienādi rādiusi un ω_2 centrs O_2 atrodas uz riņķa līnijas ω_1, tad arī ω_1 centrs O_1 atrodas uz riņķa līnijas ω_2.

Četrstūri O_1KO_3A un KO_3BO_2 ir rombi, jo tiem visas malas ir vienādas. Līdz ar to $BO_2 \parallel O_3K$ un $O_3K \parallel O_1A$.

Tātad $O_1A \parallel BO_2$. Tā kā turklāt $O_1A = BO_2$ (kā rādiusi vienādās riņķa līnijās), tad O_1ABO_2 ir paralelograms. Līdz ar to $AB \parallel O_1O_2$ kā paralelograma pretējās malas.

3-8. 1. risinājums

Pierādīsim, ka četrstūra $XYZT$ visas bisektrises krustojas punktā P.

Dotajā riņķa līnijā leņķi $\sphericalangle ABD$ un $\sphericalangle ACD$ balstās uz vienu loku, tāpēc izpildās vienādība

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD. \tag{6}$$

Četrstūrī $XBYP$ pretējie leņķi ir taisni; tātad to summa ir $180°$, un ap $XBYP$ var apvilkt riņķa līniju. Šajā riņķa līnijā leņķi $\sphericalangle XBP$ un $\sphericalangle XYP$ balstās uz vienu loku, tāpēc izpildās vienādība

$$\sphericalangle XBP = \sphericalangle XYP. \tag{7}$$

Četrstūrī $PYCZ$ pretējie leņķi ir taisni; tātad to summa ir $180°$, un ap $PYCZ$ var apvilkt riņķa līniju. Šajā riņķa līnijā leņķi $\sphericalangle ZCP$ un $\sphericalangle ZYP$ balstās uz vienu loku, tāpēc izpildās vienādība

$$\sphericalangle ZCP = \sphericalangle ZYP. \tag{8}$$

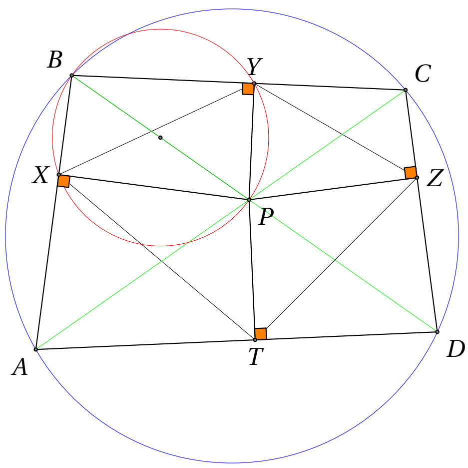
Ievērojot, ka $\sphericalangle ABD = \sphericalangle XBP$ un $\sphericalangle DCA = \sphericalangle ZCP$, no vienādībām (6)–(8) seko

$$\sphericalangle XYP = \sphericalangle ZYP,$$

kas nozīmē, ka PY ir $\sphericalangle XYZ$ bisektrise.

Analoģiski pierāda, ka arī PX, PZ un PT ir atbilstošo četrstūra $XYZT$ leņķu bisektrises. Tas arī nozīmē, ka šajā četrstūrī var ievilkt riņķa līniju, turklāt P ir šīs riņķa līnijas centrs.

2. risinājums



NNV 14/15 3. nodarbība

Četrstūrī $XBYP$ pretējie leņķi ir taisni; tātad to summa ir $180°$, un ap $XBYP$ var apvilkt riņķa līniju, turklāt BP tās diametrs. Saskaņā ar sinusu teorēmu,

$$\frac{XY}{PB} = \sin \sphericalangle XBY. \tag{9}$$

Apzīmēsim ap $ABCD$ apvilktās riņķa līnijas diametru ar d. Tad, saskaņā ar sinusu teorēmu,

$$\frac{AC}{d} = \sin \sphericalangle ABC. \tag{10}$$

Taču $\sphericalangle ABC = \sphericalangle XBY$; līdz ar to no vienādībām (9) un (10) seko

$$\frac{XY}{PB} = \frac{AC}{d}$$

jeb

$$XY = \frac{PB \cdot AC}{d}. \tag{11}$$

Analoģiski pierāda vienādības

$$ZT = \frac{AC \cdot PD}{d}, \qquad XT = \frac{BD \cdot PA}{d}, \qquad YZ = \frac{BD \cdot PC}{d}. \tag{12}$$

No (11) un (12) tagad izriet, ka

$$XY + ZT = \frac{AC \cdot PB}{d} + \frac{AC \cdot PD}{d} = \frac{AC \cdot (PB + PD)}{d} = \frac{AC \cdot BD}{d}$$

un

$$XT + YZ = \frac{BD \cdot PA}{d} + \frac{BD \cdot PC}{d} = \frac{BD \cdot (PA + PC)}{d} = \frac{AC \cdot BD}{d}.$$

Redzam, ka $XY + ZT = XT + YZ$. Taču tas arī nozīmē, ka četrstūrī $XYZT$ var ievilkt riņķa līniju, kas bija jāpierāda.