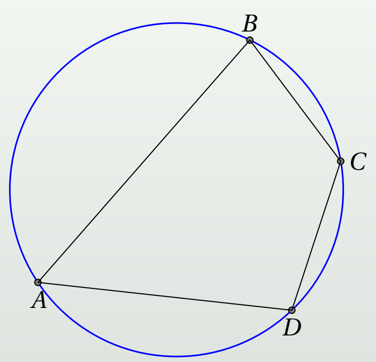
Četrstūri

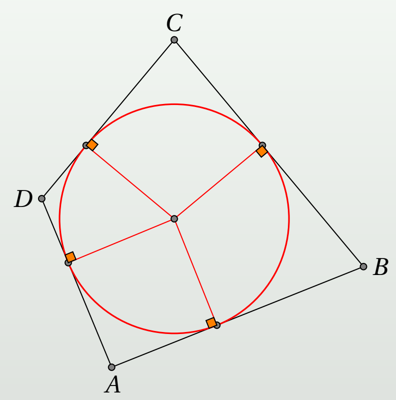
1. Pamatteorijas atkārtojums

Ievilkti un apvilkti četrstūri

Par **riņķa līnijā ievilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas virsotnes atrodas uz riņķa līnijas. Attiecīgi, riņķa līniju sauc par **četrstūrim apvilktu riņķa līniju**.



Ievilkts četrstūris



Apvilkts četrstūris

Par **riņķa līnijai apvilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas malas pieskaras riņķa līnijai. Attiecīgi, riņķa līniju sauc par **četrstūrī ievilktu riņķa līniju**.

Nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi, lai četrstūrim var apvilkt riņķa līniju

Ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja

- četrstūra pretējo leņķu lielumu summa ir $180°$;
- izpildās vienādība $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$;
- ir spēkā vienādība $AM \cdot MC = BM \cdot MD$, kur M ir četrstūra diagonāļu AC un BD krustpunkts;
- izpildās vienādība $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

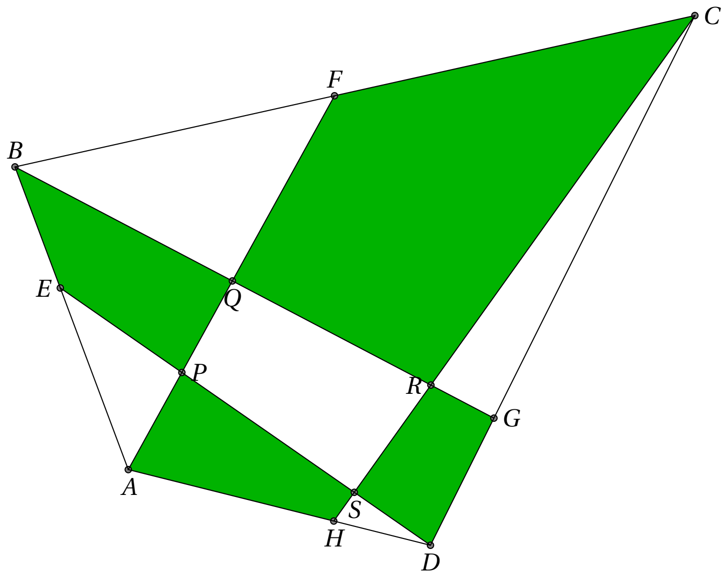
Nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi, lai četrstūrī var ievilkt riņķa līniju

Izliektu četrstūri $ABCD$ var apvilkt ap riņķa līniju tad un tikai tad, ja

- tā pretējo malu garumu summas ir vienādas;
- eksistē tādi pozitīvi skaitļi x, y, z un t, ka vienlaikus izpildās vienādības

$$AB = x + y, \quad BC = y + z, \quad CD = z + t, \quad DA = t + x.$$

1. piemērs. Izliektā četrstūrī $ABCD$ virsotnes savienotas ar patvaļīgiem malu iekšējiem punktiem (sk. zīmējumu). Vai ir iespējams, ka ap katru iezīmēto četrstūri var apvilkt riņķa līniju?



Risinājums

Nē, tas nav iespējams.

Pieņem pretējo, ka ap katru no iekrāsotajiem četrstūriem ir apvilkta riņķa līnija. Izmantojot faktu, ka ievilkta četrstūra pretējo leņķu summa ir 180°, no četrstūra $APSH$ iegūstam

$$\sphericalangle PAH = 180^\circ - \sphericalangle PSH = \sphericalangle PSR,$$

kur pēdējā vienādībā izmantota blakusleņķu īpašība. Līdzīgi pierāda, ka

$$\sphericalangle EBQ = \sphericalangle QPS \text{ (no } BQPE\text{)}, \quad \sphericalangle FCR = \sphericalangle PQR \text{ (no } CRQF\text{)}, \quad \sphericalangle GDS = \sphericalangle QRS \text{ (no } DSRG\text{)}.$$

Līdz ar to jāizpildās vienādībai

$$\sphericalangle PAH + \sphericalangle EBQ + \sphericalangle FCR + \sphericalangle GDS = \sphericalangle PSR + \sphericalangle QPS + \sphericalangle PQR + \sphericalangle QRS. \tag{1}$$

Tā kā četrstūra iekšējo leņķu summa ir 360°, tad no vienas puses,

$$\sphericalangle PAH + \sphericalangle EBQ + \sphericalangle FCR + \sphericalangle GDS < \sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 360^\circ,$$

no otras puses,

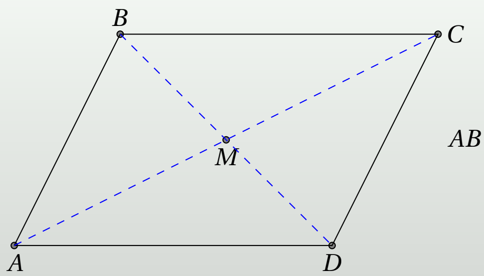
$$\sphericalangle PSR + \sphericalangle QPS + \sphericalangle PQR + \sphericalangle QRS = 360^\circ.$$

Iegūta pretruna ar vienādību (1), tātad pieņēmums, ka visiem četriem iezīmētajiem četrstūriem var apvilkt riņķa līniju, bijis aplams.

Paralelograms

Paralelograms

Par **paralelogramu** sauc četrstūri, kura pretējās malas ir pa pāriem paralēlas.



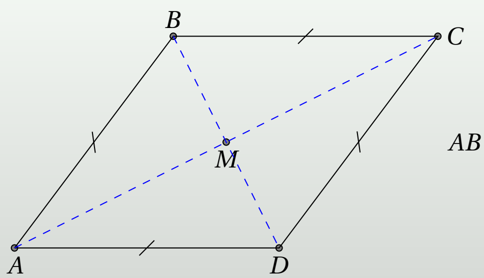
$AB \parallel CD, \quad AD \parallel BC$

Paralelograma īpašības:

- Paralelograma pretējās malas ir pa pāriem vienādas: $AB = CD, \quad AD = BC$.
- Paralelograma pretējie leņķi ir pa pāriem vienādi: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD, \quad \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$.
- Paralelograma katras malas pieleņķu summa ir 180°: $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD = 180^\circ$.
- Paralelograma diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm: $AM = MC, \quad BM = MD$.
- Katra paralelograma diagonāle sadala to divos vienādos trīsstūros: $\Delta ABD = \Delta CDB, \quad \Delta ABC = \Delta CDA$.
- Paralelograma likums: paralelograma diagonāļu garumu kvadrātu summa vienāda ar malu garumu kvadrātu summu:
$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AB^2 + BC^2).$$

Rombs

Par **rombu** sauc paralelogramu, kura visas malas ir vienādas.



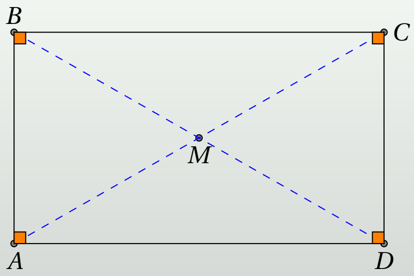
$AB = BC = CD = DA$

Romba īpašības:

- Rombam piemīt visas paralelograma īpašības.
- Romba diagonāles ir arī romba leņķu bisektrises: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC, \quad \sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$.
- Romba diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras: $AC \perp BD$.
- Rombā var ievilkt riņķa līniju, turklāt tās centrs atrodas romba diagonāļu krustpunktā, bet rādiuss vienāds ar romba augstuma pusi.

Taisnstūris

Par **taisnstūri** sauc paralelogramu, kura visi leņķi ir taisni.



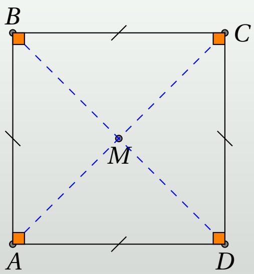
$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = \sphericalangle DAB = 90^\circ$$

Taisnstūra īpašības:

- Taisnstūrim piemīt visas paralelograma īpašības.
- Taisnstūra diagonāles ir vienādas.
- Ap jebkuru taisnstūri var apvilkt riņķa līniju, turklāt tās centrs atrodas taisnstūra diagonāļu krustpunktā, bet rādiuss ir vienāds ar taisnstūra diagonāles pusi.

Kvadrāts

Par **kvadrātu** jeb **regulāru četrstūri** sauc paralelogramu, kura visas malas ir vienādas un visi leņķi ir vienādi.



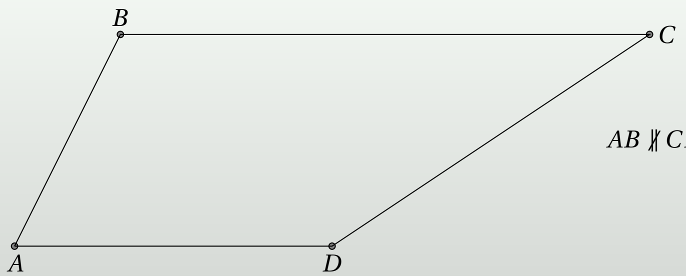
$$AB = BC = CD = DA;$$
$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = \sphericalangle DAB = 90^\circ$$

Kvadrāts ir vienlaikus gan rombs, gan taisnstūris, tāpēc tam izpildās gan visas romba, gan visas taisnstūra īpašības.

Trapece

Trapece

Par **trapeci** sauc četrstūri, kuram divas pretējās malas ir savstarpēji paralēlas, bet otras divas – nē.



$$AB \nparallel CD, \quad AD \parallel BC$$

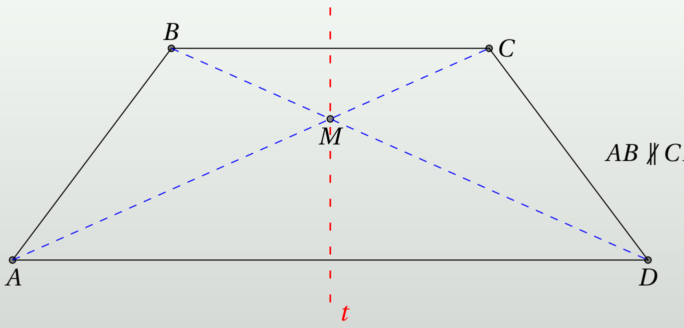
Trapeces īpašības:

- Paralēlās malas sauc par pamatiem, bet neparalēlās – par sānu malām (zīmējumā AD un BC ir pamati, bet AB un CD – sānu malas).
- Trapeces sānu malas pieleņķu summa ir 180°: $\sphericalangle CBA + \sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC + \sphericalangle BCD = 180^\circ$.

- Trapeces pamati nav vienādi: $AD \neq BC$.

Vienadsānu trapece

Par **vienādsānu trapeci** sauc trapeci, kuras sānu malas ir vienādas.



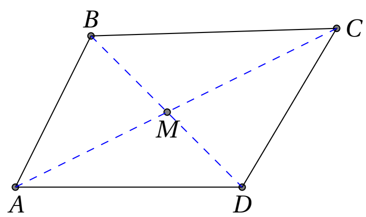
$AB \nparallel CD, \quad AD \parallel BC, \quad AB = CD$

Vienādsānu trapeces īpašības:

- Vienādsānu trapeces pamata pieleņķi ir vienādi savā starpā: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDA$.
- Vienādsānu trapeces diagonāles ir vienādas savā starpā: $AC = BD$.
- Vienādsānu trapeces diagonāles veido ar pamatiem vienādus leņķus: $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BDA$.
- Vienādsānu trapecē abu pamatu vidusperpendikuli sakrīt (zīmējumā ar taisni t).
- Vienādsānu trapece ir simetriska pret pamatu vidusperpendikulu (zīmējumā – pret taisni t).
- Vienādsānu trapeces diagonāles krustojas punktā, kas atrodas uz pamatu vidusperpendikula (zīmējumā – $M \in t$).
- Ap vienādsānu trapeci var apvilkt riņķa līniju (t.i., vienādsānu trapece ir ievilkts četrstūris).

2. Četrstūru pazīmes

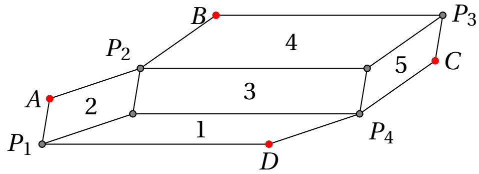
Paralelograma pazīmes



Četrstūris $ABCD$ ir paralelograms,

- ja tā pretējās malas ir pa pāriem vienādas, t.i., $AB = CD$ un $AD = BC$;
- ja tā divas malas ir savstarpēji vienādas un paralēlas, piemēram, $AB = CD$ un $AB \parallel CD$;
- ja tā diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm, t.i., $AM = MC$ un $BM = MD$.

2. piemērs. Četrstūri, kas zīmējumā apzīmēti ar cipariem 1 līdz 5, ir paralelogrami. Pierādīt, ka arī $ABCD$ ir paralelograms.



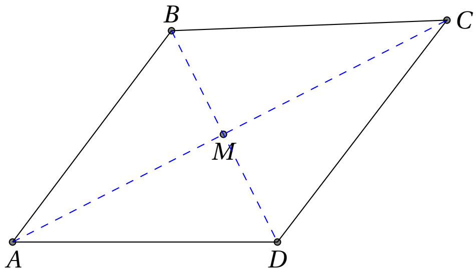
Risinājums

No paralelogramiem 1 un 2 seko, ka nogriežņi AP_2 un DP_4 ir paralēli un vienādi. No paralelogramiem 4 un 5 seko, ka nogriežņi BP_2 un CP_4 ir paralēli un vienādi.

Tātad $\sphericalangle AP_2B = \sphericalangle DP_4C$ (kā leņķi ar paralēlām malām) un $AP_2 = DP_4$, $BP_2 = CP_4$; līdz ar to $\Delta AP_2B = \Delta DP_4C$ (pazīme mlm). Tad $\sphericalangle BAP_2 = \sphericalangle CDP_4$ (vienādu trīsstūru atbilstošie elementi), taču, tā kā $DP_4 \parallel AP_2$, tas nozīmē, ka $DC \parallel AB$ (jo pamatota kāpšļu leņķu vienādība).

No otras puses, $DC = AB$ kā vienādu trīsstūru atbilstošās malas. Tātad $ABCD$ pretējās malas AB un CD ir vienādas un paralēlas, kas nozīmē, ka $ABCD$ ir paralelograms.

Romba pazīmes

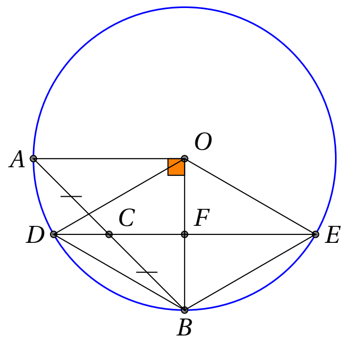


Četrstūris $ABCD$ ir rombs,

- ja tā visas malas ir vienādas: $AB = BC = CD = DA$;
- ja tas ir paralelograms, kura blakus malas ir vienādas: $ABCD$ – paralelograms, turklāt $AB = BC$.
- ja tas ir paralelograms, kura diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras: $ABCD$ – paralelograms, turklāt $AC \perp BD$.
- ja tas ir paralelograms, kura diagonāles ir arī tā leņķu bisektrises: $ABCD$ – paralelograms, turklāt $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$ un $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$.
- ja tas ir paralelograms, kurā var ievilkt riņķa līniju, piemēram $ABCD$ – paralelograms, turklāt dots, ka tā leņķu bisektrises krustojas vienā punktā.

3. piemērs. Riņķa līnijā ar centru punktā O novilkti divi savstarpēji perpendikulāri rādiusi OA un OB. Caur hordas AB viduspunktu C novilkta horda DE, kas paralēla OA (punkts D atrodas uz mazākā loka AB). Aprēķināt leņķa AOD lielumu!

Risinājums



Ar F apzīmējam nogriežņu OB un DE krustpunktu un $\sphericalangle AOD = \alpha$. Tā kā $AC = CB$ un $AO \parallel DE$, tad CF ir ΔAOB viduslīnija un $OF = BF$.

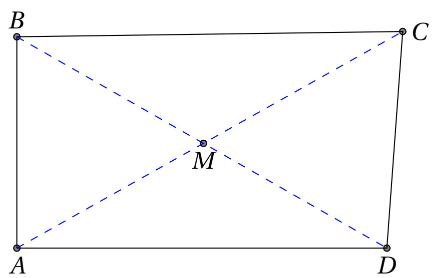
No $OA \parallel DE$ seko, ka $DE \perp OB$ un $\sphericalangle ODE = \sphericalangle AOD = \alpha$ (kā iekšējie šķērsleņķi). Tad

1. $DE \perp OB$ pēc pamatotā;
2. $OF = FB$ pēc pamatotā;
3. $DF = FE$ (rādiuss, kas perpendikulārs hordai, dala to uz pusēm).

Līdz ar to četrstūra $DOEB$ diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras un krustpunktā dalās uz pusēm; tātad $DOEB$ ir rombs. Tad $OD = DB$ kā romba malas un $OD = OB$ kā rādiusi. Tātad ΔDOB ir vienādmalu un $\sphericalangle DOB = 60°$. Līdz ar to

$$\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOB - \sphericalangle DOB = 90° - 60° = 30°.$$

Taisnstūra pazīmes

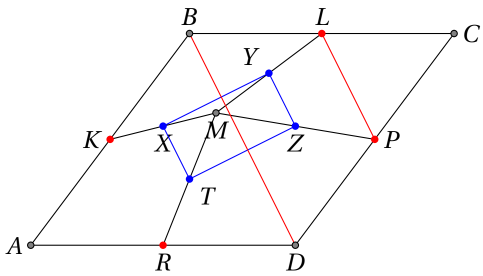


Četrstūris $ABCD$ ir taisnstūris,

- ja tas ir paralelograms, kura kāds leņķis ir taisns: $ABCD$ – paralelograms, turklāt $\sphericalangle BAD = 90°$.
- ja tas ir paralelograms, kura diagonāles ir vienādas: $ABCD$ – paralelograms, turklāt $AC = BD$.
- ja tas ir paralelograms, kuram var apvilkt riņķa līniju, piemēram $ABCD$ – paralelograms, turklāt $AM \cdot MC = BM \cdot MD$.

4. piemērs. Romba $ABCD$ iekšienē izvēlēts patvaļīgs punkts M, bet K, L, P un R ir attiecīgi romba malu AB, BC, CD un DA viduspunkti. Pierādīt, ka četrstūris, kura virsotnes ir nogriežņu MK, ML, MP un MR viduspunkti, ir taisnstūris.

Risinājums



Apzīmēsim ar X, Y, Z un T attiecīgi nogriežņu MK, ML, MP un MR viduspunktus.

No viduslīnijas īpašībām trīsstūrī BCD seko, ka $BD \parallel PL$. No viduslīnijas īpašībām trīsstūrī MPL seko, ka $PL \parallel ZY$.

Tātad $ZY \parallel BD$.

Analoģiski parāda, ka

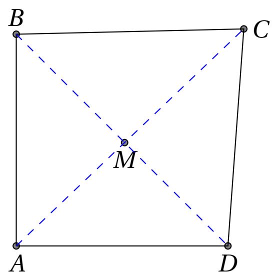
- $TX \parallel BD$ (izmantojot trīsstūrus ABD un MRK);
- $XY \parallel AC$ (izmantojot trīsstūrus ABC un MKL);
- $TZ \parallel AC$ (izmantojot trīsstūrus ACD un MRP).

Līdz ar to ir pierādīts, ka

$$ZY \parallel TX \parallel BD, \quad XY \parallel TZ \parallel AC.$$

Pierādīts, ka $XYZT$ ir paralelograms, jo tā malas ir pa pāriem paralēlas. Taču $XYZT$ ir arī taisnstūris, jo tā malas ir paralēlas romba $ABCD$ diagonālēm AC un BD, bet romba diagonāles ir perpendikulāras: $AC \perp BD$, tātad arī $XY \perp YZ$.

Kvadrāta pazīmes



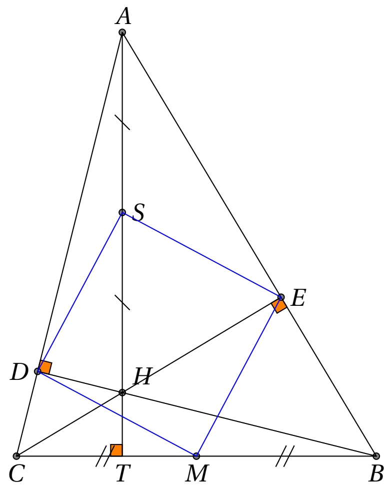
Četrstūris $ABCD$ ir kvadrāts,

- ja tas ir taisnstūris, kura divas blakus malas ir vienādas: $ABCD$ – taisnstūris, turklāt $AB = BC$.
- ja tas ir taisnstūris, kura diagonāles ir perpendikulāras: $ABCD$ – taisnstūris, turklāt $AC \perp BD$.
- ja tas ir rombs, kura kāds leņķis ir taisns: $ABCD$ – rombs, turklāt $\sphericalangle BAD = 90°$.
- ja tas ir rombs, kura diagonāles ir vienādas: $ABCD$ – rombs, turklāt $AC = BD$.

5. piemērs. Dots, ka ΔABC ir šaurleņķu trīsstūris, turklāt $\sphericalangle BAC = 45°$. Nogriežņi BD un CE ir šī trīsstūra augstumi, punkts H – augstumu krustpunkts, M – malas BC viduspunkts, S – nogriežņa AH viduspunkts.

Pierādīt, ka $DSEM$ ir kvadrāts.

Risinājums



Ar T atzīmēsim augstuma pamatu, kas vilkts no A pret BC.

Tā kā taisnleņķa trīsstūrī mediānas, kas vilkta pret hipotenūzu, garums ir puse no hipotenūzas garuma, tad

$$DS = SE = 0.5AH \qquad (\text{no } \Delta ADH \text{ un } \Delta AEH) \tag{2}$$

un

$$DM = ME = 0.5BC \qquad (\text{no } \Delta CDB \text{ un } \Delta CEB). \tag{3}$$

Pierādīsim, ka $AH = BC$.

Ievēro, ka $\Delta DAH = \Delta DBC$ (pazīme lml):

1. $\sphericalangle HDA = \sphericalangle CDB = 90°$;
2. no dotā seko, ka ΔADB ir vienādsānu taisnleņķa trīsstūris (jo $\sphericalangle DAB = 45°$ un $\sphericalangle ADB = 90°$), līdz ar to $DA = DB$;
3. $\sphericalangle DAH = 90° - \sphericalangle DHA = 90° - \sphericalangle THB = \sphericalangle DBC$.

Tātad $AH = BC$ kā vienādu trīsstūru atbilstošās malas. No vienādībām (2) un (3) līdz ar to izriet, ka

$$DS = SE = DM = ME,$$

līdz ar to $DSEM$ ir rombs.

Vēl no trīsstūru vienādības $\Delta DAH = \Delta DBC$ izriet, ka

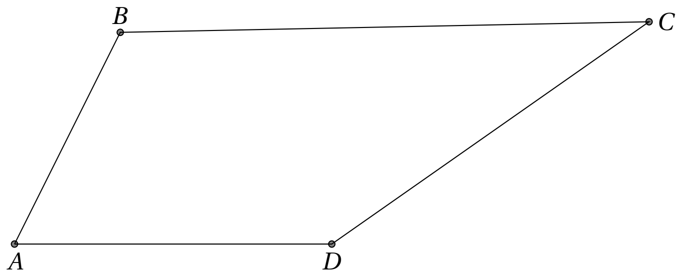
$$\sphericalangle MDB = \sphericalangle SDA,$$

kā leņķi starp atbilstošajām malām un mediānām vienādos trīsstūros. Tāpēc

$$\sphericalangle SDM = \sphericalangle SDH + \sphericalangle MDB = \sphericalangle SDH + \sphericalangle SDA = \sphericalangle BDA = 90°.$$

Pierādīts, ka $DSEM$ ir rombs ar taisnu leņķi; tātad tas ir kvadrāts.

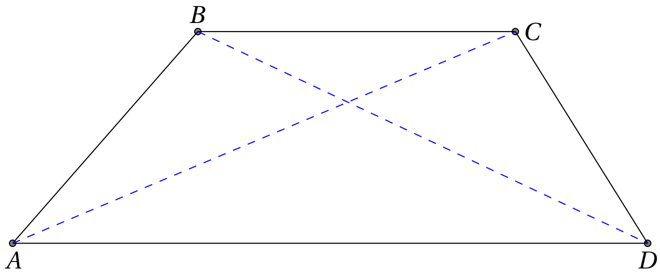
Trapeces pazīmes



Četrstūris $ABCD$ ir trapece, ja tieši divu (ne vairāk un ne mazāk) malu pieleņķu summa ir 180°, piemēram:

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD = 180^\circ, \quad \sphericalangle ADC + \sphericalangle BCD = 180^\circ, \quad \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD \neq 180^\circ, \quad \sphericalangle ADC + \sphericalangle BAD \neq 180^\circ.$$

Vienādsānu trapeces pazīmes

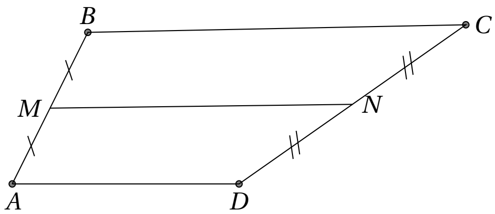


Trapece $ABCD$ ir vienādsānu, ja

- tās pamata pieleņķi ir vienādi, piemēram, ja AD un BC ir pamati, tad $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDA$;
- tās diagonāles ir vienādas: $AC = BD$;
- ap to var apvilkt riņķa līniju.

Citas pazīmes

Ja četrstūra viduslīnija (nogrieznis, kas savieno divu pretējo malu viduspunktus) ir paralēla kādai no četrstūra malām, tad tā ir paralēla arī pretējai malai un šis četrstūris ir vai nu trapece, vai paralelograms.



MN – viduslīnija un $AD \parallel MN \Rightarrow MN \parallel BC$ un līdz ar to $AD \parallel BC$ un $ABCD$ ir trapece vai paralelograms

3. Nevienādības četrstūrī

Lauztās līnijas nevienādība

Kā zināms, lauztas līnijas garums ir lielāks nekā attālums starp tās galapunktiem. Sekas šim apgalvojumam četrstūrī ir tiešs analogs trīsstūra nevienādībai: četrstūra jebkuru trīs malu garumu summa ir lielāka nekā ceturtās malas garums.

Citiem vārdiem: ja dots četrstūris ar malu garumiem a, b, c, d, tad

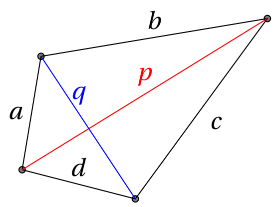
$$a < b + c + d.$$

Četrstūra nevienādība

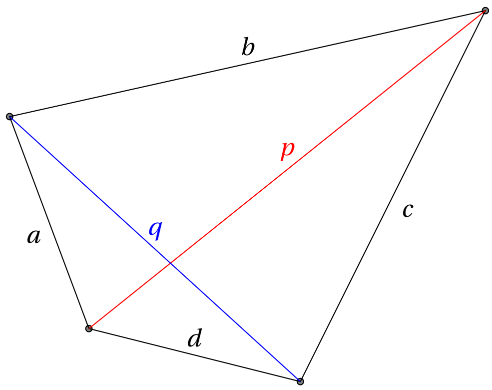
Izliekta četrstūra diagonāļu garumu summa ir lielāka nekā jebkuru divu pretējo malu garumu summa.

Citiem vārdiem: ja dots izliekts četrstūris ar (pēc kārtas ņemtu) malu garumiem a, b, c, d, kura diagonāļu garumi ir p un q, tad izpildās nevienādības

$$p + q > a + c \quad \text{un} \quad p + q > b + d.$$



Ptolemaja nevienādība

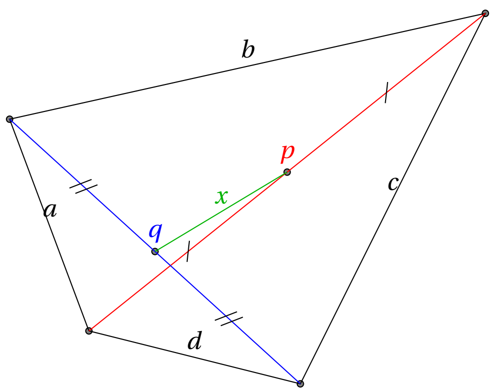


Ja dots četrstūris ar (pēc kārtas ņemtu) malu garumiem a, b, c, d, kura diagonāļu garumi ir p un q, tad izpildās nevienādība

$$ac + bd \geq pq.$$

Turklāt vienādība izpildās tad un tikai tad, ja ap doto četrstūri var apvilkt riņķa līniju.

Eilera četrstūru teorēma



Ja dots izliekts četrstūris ar malu garumiem a, b, c, d, kura diagonāļu garumi ir p un q, tad izpildās nevienādība

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p^2 + q^2 + 4x^2,$$

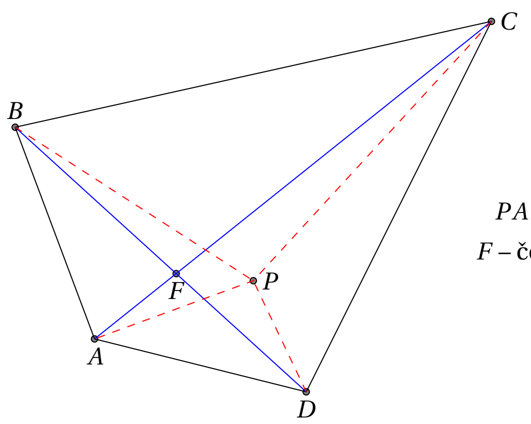
kur x ir attālums starp diagonāļu viduspunktiem.

No šīs teorēmas arī izriet nevienādība

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq p^2 + q^2,$$

kur vienādība izpildās tad un tikai tad, ja četrstūris ir paralelograms.

Izliekta četrstūra Fermā punkts



$PA + PB + PC + PD \geq AC + BD$;

F – četrstūra $ABCD$ Fermā punkts;

Ja $ABCD$ ir izliekts četrstūris un P ir patvaļīgs šī četrstūra iekšējs punkts, tad izpildās nevienādība

$$PA + PB + PC + PD \geq AC + BD.$$

No šīs nevienādības arī izriet, ka punkts, kurš minimizē attālumu summu līdz izliekta četrstūra virsotnēm, ir četrstūra diagonāļu krustpunkts (un tiek saukts par izliekta četrstūra Fermā punktu).