Izlases un to skaitīšana

1. Pamatjēdzieni

1.1. Kortežs

Pieņemsim, ka dota kopa S. Tad var runāt par šīs kopas elementu sakārtotiem pāriem, t.i., (a,b), kur $a \in S$, $b \in S$. Atšķirībā no kopām, sakārtotā pārī

- elementi var būt vienādi, t.i., var runāt par pāri (a,a);
- elementu secībai ir nozīme: pāris (a,b) nav vienāds ar pāri (b,a), ja vien $b \neq a$.

Skolas kursā sakārtoti pāri (lai arī šādi parasti tie netiek nosaukti) tiek izmantoti ļoti bieži. Piemēram, ja $S = \mathbb{R}$ ir reālo skaitļu kopa, tad pāris (x,y), kur x, y ir reāli skaitļi, apraksta punktu koordinātu plaknē. Skaidrs, ka var būt punkti (x,x) (visi punkti, kas atrodas uz taisnes $y = x$) un punkti (x,y) un (y,x) ir dažādi (ja vien $x \neq y$).

Tomēr sakārtota pāra jēdziens ir plašāks par koordinātu plaknes punktiem: kopa S var nebūt reālo skaitļu kopa un tā var būt arī galīga.

1. piemērs. Ja $S = \{1,2,3\}$, tad tai ir 9 sakārtoti pāri:

$$(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2)\ \text{ un }\ (3,3).$$

Līdzīgi var runāt par sakārtotiem trijniekiem (a,b,c), kur $a \in S$, $b \in S$ un $c \in S$. Arī trijniekos elementi var būt vienādi un to secībai nav nozīmes.

Skolas kursā ir aplūkoti arī sakārtoti trijnieki, kad $S = \mathbb{R}$: trijnieks (x,y,z) apraksta punktu koordinātu telpā.

Gadījumā, ja $S = \{1,2,3\}$, tad tai ir $3^3 = 27$ sakārtoti trijnieki. Vispārīgāk, ja S ir kopa ar apjomu n, tad ir iespējams izveidot n^3 dažādus trijniekus: trijnieka pirmo elementu (jeb *komponenti*) var izvēlēties n veidos, trijnieka otro elementu var izvēlēties n veidos un arī trijnieka trešo elementu var izvēlēties n veidos. No reizināšanas likuma izriet, ka dažādo trijnieku skaits ir n^3.

Iepriekš aprakstītos piemērus vispārina *korteža* jēdziens. Sakārtots pāris ir kortežs garumā 2; sakārtots trijnieks ir kortežs garumā 3.

Vispārīgāk, dotas kopas S elementu kortežu garumā k var pierakstīt kā $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, kur $a_1, \ldots, a_k$ ir kopas S elementi; atšķirībā no kopām, kortežā

- elementi var būt vienādi;
- elementu secībai ir nozīme, t.i., ja korteži atšķiras ar elementu secību, tad tos uzskata par dažādiem.

2. piemērs. Ja $S = \{1,2,3,4,5\}$, tad $(1,2,3,4)$, $(1,3,2,4)$, un $(1,2,3,5)$ ir dažādi šīs kopas elementu korteži; savukārt, piemēram, $(1,2,3,6)$ nav šīs kopas elementu kortežs, jo $6 \notin S$.

1.2. Sakārtotas un nesakārtotas izlases

Viens no nozīmīgākajiem kombinatorikas jēdzieniem ir dotas kopas elementu *izlase*. Mēdz izšķirt divu tipu izlases: sakārtotas un nesakārtotas.

Nesakārtota izlase

Par dotas kopas S *nesakārtotu izlasi* garumā k sauc jebkuru šīs kopas apakškopu, kuras apjoms ir k.

Nesakārtotās izlasēs elementu secībai nav nozīmes (jo arī kopām tai nav nozīmes): ja divas nesakārtotas izlases atšķiras tikai ar elementu secību, tad šīs nesakārtotās izlases ir vienādas.

Sakārtota izlase

Par dotas kopas S *sakārtotu izlasi* garumā k sauc tādu kopas S elementu kortežu garumā k, ka visi korteža elementi ir atšķirīgi.

Sakārtotās izlasēs elementu secībai ir nozīme (jo arī kortežos tai ir nozīme): ja divas sakārtotas izlases atšķiras tikai ar elementu secību, tad šīs sakārtotās izlases uzskatām par dažādām. No otras puses, ne katrs kortežs garumā k ir sakārtota izlase: svarīgi, lai visi korteža elementi būtu dažādi.

3. piemērs. Pieņemsim, ka $S = \{1, 2, 3\}$. Tad kopai S ir

- trīs korteži garumā 1:
$$(1),\ (2) \text{ un } (3);$$
- trīs sakārtotas izlases garumā 1
$$(1),\ (2) \text{ un } (3);$$
- trīs nesakārtotas izlases garumā 1:
$$\{1\},\ \{2\} \text{ un } \{3\};$$

- deviņi korteži garumā 2:
$$(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2) \text{ un } (3,3);$$
- sešas sakārtotas izlases garumā 2:
$$(1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,1) \text{ un } (3,2);$$
- trīs nesakārtotas izlases garumā 2:
$$\{1,2\},\ \{1,3\} \text{ un } \{2,3\};$$

- 27 korteži garumā 3:
$$(1,1,1),\ (1,1,2),\ (1,1,3),\ (1,2,1),\ \ldots \text{ utt.}, \ldots,\ (3,3,3);$$
- sešas sakārtotas izlases garumā 3:
$$(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2) \text{ un } (3,2,1);$$
- viena nesakārtota izlase garumā 3:
$$\{1,2,3\}.$$

- $3^4 = 81$ korteži garumā 4;
- nevienas (sakārtotas vai nesakārtotas) izlases garumā 4, jo kopā S nav četru dažādu elementu.

1.3. Skaitļa faktoriāls

Par naturāla skaitļa n faktoriālu sauc pirmo n naturālo skaitļu reizinājumu:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Pieņemts arī definēt $0! = 1$, t.i., par nulles faktoriālu sauc skaitli 1.

Ievērojam, ka izpildās vienādība $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$. Ar šo vienādību ir saskaņota arī $0!$ definīcija, jo $1! = 0! \cdot 1$.

Faktoriāls kā mainīgā n funkcija strauji aug; ilustrācijai tabula ar dažām pirmajām faktoriāla vērtībām:

n	$f(n) = n!$
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40330
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1307674368000

2. Izlašu veidi un to skaitīšana

2.1. Permutācijas

Permutācija

Par dotās kopas elementu permutāciju sauc visu šīs kopas elementu sakārtotu izlasi.

Citiem vārdiem, par n elementu kopas permutāciju sauc kortežu garumā n, kas satur visus dotās kopas elementus.

Piemēram, ja dota kopa $S = \{a, b\}$, tad tai ir divas permutācijas:

$$(a, b) \quad \text{un} \quad (b, a).$$

Ja dota kopa $S = \{a, b, c\}$, tad tai ir sešas permutācijas:

$$(a, b, c), \quad (a, c, b), \quad (b, a, c), \quad (b, c, a), \quad (c, a, b) \quad \text{un} \quad (c, b, a).$$

Dažādo permutāciju skaitu (kopai ar n dažādiem elementiem) apzīmē ar P_n. Permutāciju skaita aprēķināšanas formula:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Pierādījums. Ievērosim, ka, lai izveidotu doto n elementu permutāciju,

- no dotajiem n elementiem jāizvēlas viens elements, kurš kortežā būs pirmais (to var izdarīt n veidos);

- pēc tam no atlikušajiem $n-1$ elementiem jāizvēlas vēl viens, kurš kortežā būs otrais elements (to var izdarīt $n-1$ veidos);
- no atlikušajiem $n-2$ elementiem jāizvēlas vēl viens, kurš kortežā būs trešais elements (to var izdarīt $n-2$ veidos);

  ...
- no atlikušajiem 2 elementiem jāizvēlas vēl viens, kurš kortežā būs pirmspēdējais jeb $(n-1)$-ais elements (to var izdarīt 2 veidos);
- pēc tam atlikušais elements jāizvēlas kā korteža pēdējais elements (to var izdarīt tikai vienā veidā).

No reizināšanas likuma izriet, ka permutāciju var izveidot $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ veidos. □

2.2. Variācijas

Variācija

Par variāciju no n elementiem pa k elementiem katrā, $0 \leq k \leq n$, sauc sakārtotu izlasi, kurā ir tieši k dotās kopas elementi.

Citiem vārdiem, par n elementu kopas variāciju pa k elementiem sauc kortežu garumā k, kas satur k dažādus dotās kopas elementus.

Piemēram, ja dota kopa $S = \{a, b, c\}$, tad tai ir sešas variācijas pa diviem elementiem:

$$(a,b), \quad (a,c), \quad (b,a), \quad (b,c), \quad (c,a) \quad \text{un} \quad (c,b).$$

Dažādo variāciju skaitu no n dažādiem elementiem pa k elementiem apzīmē ar A_n^k. Variāciju skaita aprēķināšanas formula:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Pierādījums. Spriedums ir analoģisks kā permutāciju gadījumā. Lai izveidotu doto n elementu kortežu garumā k,

- no dotajiem n elementiem jāizvēlas viens elements, kurš kortežā būs pirmais (to var izdarīt n veidos);
- pēc tam no atlikušajiem $n-1$ elementiem jāizvēlas vēl viens, kurš kortežā būs otrais elements (to var izdarīt $n-1$ veidos);
- no atlikušajiem $n-2$ elementiem jāizvēlas vēl viens, kurš kortežā būs trešais elements (to var izdarīt $n-2$ veidos);

  ...
- no atlikušajiem $n-k+2$ elementiem jāizvēlas vēl viens, kurš kortežā būs pirmspēdējais jeb $(k-1)$-ais elements (to var izdarīt $n-k+2$ veidos);
- no atlikušajiem $n-k+1$ elementiem jāizvēlas vēl viens kā korteža pēdējais elements jeb k-tais elements (to var izdarīt $n-k+1$ veidos).

No reizināšanas likuma izriet, ka no dotajiem n elementiem kortežu garumā k var izveidot $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)$ veidos. □

2.3. Kombinācijas

Kombinācija

Par kombināciju no n elementiem pa k elementiem katrā, $0 \le k \le n$, sauc tādu dotās kopas apakškopu (jeb nesakārtotu izlasi), kurā ir tieši k dotās kopas elementi.

Piemēram, ja dota kopa $S = \{a, b, c\}$, tad tai ir trīs kombinācijas pa diviem elementiem (jeb kopai S ir trīs apakškopas ar apjomu 2):

$$\{a, b\}, \quad \{a, c\} \quad \text{un} \quad \{b, c\}.$$

Dažādo kombināciju skaitu no n dažādiem elementiem pa k elementiem apzīmē kā C_n^k vai $\binom{n}{k}$.

Kombināciju skaita C_n^k aprēķināšanas formula:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Pierādījums. Apskatīsim patvaļīgu dotas n elementu kopas apakškopu (jeb nesakārtotu izlasi) apjomā k; varam šīs apakškopas elementus apzīmēt ar $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Ir tieši $k!$ sakārtotas izlases jeb korteži garumā k, kuru elementi ir $a_1, a_2, \ldots, a_k$: tie ir korteži, kas iegūstami kā kopas $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ visas iespējamās permutācijas (un šādu permutāciju ir $k!$):

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k), \quad (a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k-1}), \quad \ldots (a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1).$$

Tātad katrai dotās kopas apakškopai apjomā k atbilst $k!$ sakārtotas izlases garumā k (kas cita no citas atšķiras tikai ar elementu secību). No otras puses, dažādām k elementu apakškopām atbildīs dažādas sakārtotas izlases (jo atšķirsies šo izlašu elementi). Tātad sakārtotu izlašu garumā k ir tieši $k!$ reizes vairāk nekā nesakārtotu izlašu garumā k.

Tā kā sakārtotu izlašu garumā k skaits ir $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, tad secinām, ka nesakārtoto izlašu garumā k skaits C_n^k ir vienāds ar

$$\frac{A_n^k}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

□

3. Vidējās vērtības metode un Dirihlē princips

Vidējās vērtības metode ir paņēmiens, kas ļauj izdarīt secinājumus par kādu atsevišķu lielumu, ja ir pieejama tikai informācija par visu doto lielumu vidējo vērtību (vai par visu lielumu summu, reizinājumu u.t.t.). Vairumā gadījumu spriedumi, kurus izdara ar vidējās vērtības metodi, ļauj noskaidrot, ka starp aplūkojamiem lielumiem **eksistē** kāds elements ar to vai citu īpašību.

Viens no vidējās vērtības metodes algebriskiem formulējumiem ir šāds:

Pieņemsim, ka doti n reāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ar $\bar{a}$ apzīmēsim šo skaitļu vidējo aritmētisko:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Tad ir spēkā šādi apgalvojumi:

1. Vismaz viens no skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir ne mazāks par vidējo vērtību $\bar{a}$, un vismaz viens no šiem skaitļiem ir ne lielāks par $\bar{a}$.
2. Ja starp lielumiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir skaitlis, kas ir lielāks par vidējo vērtību $\bar{a}$, tad ir arī tāds skaitlis, kas ir mazāks par $\bar{a}$ (un otrādi).
3. Ja neviens no lielumiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nav mazāks (vai lielāks) par vidējo vērtību $\bar{a}$, tad visi šie n skaitļi ir vienādi ar savu vidējo aritmētisko $\bar{a}$.

Gadījumā, kad visi dotie skaitļi ir pozitīvi, analoģiski apgalvojumi ir spēkā, ja kā vidējo vērtību $\bar{a}$ apskata doto skaitļu vidējo ģeometrisko (vai vidējo kvadrātisko, vidējo harmonisko u.t.t.).

Viens no vidējās vērtības metodes speciālgadījumiem ir **Dirihlē princips**: ja vairāk nekā n truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz divi truši. Alternatīvi šo principu var formulēt šādi: ja n kopu apvienojums satur vairāk nekā n elementus, tad vismaz vienā kopā ir vismaz divi elementi.

Ir spēkā arī **vispārinātais Dirihlē princips**: ja m kopu apvienojums satur vairāk nekā mn elementus, tad vismaz vienā kopā ir vismaz $m+1$ elements.

4. Piemēri no matemātikas olimpiādēm

4. piemērs (Latvijas 63. mat. olimpiāde, 2. posms)**.** Doti septiņi dažādi naturāli skaitļi, kuri nepārsniedz 21. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus skaitļu pārus, kuru starpības ir vienādas. (Dažādiem skaitļu pāriem var būt arī kopīgs skaitlis, starpību rēķina, no lielākā skaitļa atņemot mazāko).

Risinājums. Pārī nav nozīmes skaitļu secībai, jo interesējamies par lielākā un mazākā skaitļa starpību. Tātad no septiņiem dažādiem skaitļiem var izveidot $C_7^2 = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$ dažādus pārus.

Dotie skaitļi ir veseli, dažādi un robežās no 1 līdz 21, tātad to starpības ir robežās no 1 līdz $21-1=20$. Tātad starpības var pieņemt tikai kādu no 20 vērtībām, taču iespējams sastādīt 21 dažādu skaitļu pāri. Saskaņā ar Dirihlē principu, ir vismaz divi tādi skaitļu pāri, kuru starpības ir vienādas.

5. piemērs (Latvijas 53. mat. olimpiāde, 2. posms)**.** Lai iekļūtu pilī, kur ļaunais burvis tur nolaupīto Sniegbaltīti, jāatbild uz 34 jautājumiem. Katrs no septiņiem rūķīšiem zina atbildes uz dažiem jautājumiem.

Ir dots, ka katri četri rūķīši kopā zina atbildes uz visiem jautājumiem. Vai noteikti var atrast tādus trīs rūķīšus, kas kopā zina atbildes uz visiem jautājumiem?

Risinājums. Pieņemsim, ka tādu trīs rūķīšu nav. Tad katriem trim rūķīšiem var atrast jautājumu, uz kuru neviens no viņiem nevar atbildēt. Dažādu rūķīšu trijnieku skaits ir $C_7^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$. Tā kā $35 > 34$, tad, saskaņā ar Dirihlē principu, eksistē divi rūķīšu trijnieki, kam šis neatbildamais jautājums ir viens un tas pats. Bet abos šajos trijniekos kopā ir vismaz 4 rūķīši. Šim rūķīšu četriniekam ir jautājums, uz kuru neviens no viņiem nevar atbildēt – pretruna ar doto. Tātad pieņēmums bijis aplams un noteikti var atrast tādus trīs rūķīšus, kas kopā zina atbildes uz visiem jautājumiem.

6. piemērs (Latvijas 65. mat. olimpiāde, 2. posms)**.** Cik daudz ir piecciparu skaitļu, kas sastāv tieši no trīs dažādiem cipariem, no kuriem neviens nav 0 un neviens neatkārtojas vairāk kā divas reizes?

Risinājums. Katrā šādā skaitlī ir viens cipars (apzīmēsim to ar a), kas skaitlī ir tikai vienu reizi un divi cipari (apzīmēsim tos ar b un c), kas katrs parādās šajā skaitlī divas reizes.

Cipars a var būt kādā no 5 pozīcijām; atlikušajās četrās pozīcijās jānovieto divi cipari b, ko var izdarīt $C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$ dažādos veidos; pēc tam ciparu c atlikušajās divās pozīcijās var ierakstīt tikai vienā veidā. No reizināšanas likuma izriet, ka pie konkrētām a, b, c vērtībām ir $5\cdot 6\cdot 1 = 30$ veidi, kā izveidot šādu trīsciparu skaitli (turklāt b un c secībai nav nozīmes: mainot vietām ciparus b un c, iegūstam tos pašus 30 skaitļus).

Ciparu a var izvēlēties $C_9^1 = 9$ veidos; pēc tam ciparus b un c var izvēlēties $C_8^2 = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$ veidos. No reizināšanas likuma izriet, ka meklēto piecciparu skaitļu kopējais skaits ir

$$30\cdot 9\cdot 28 = 7560.$$

7. piemērs (Latvijas 56. mat. olimpiāde, 3. posms)**.** Kādā valstī ir 100 pilsētas. Starp dažām no tām noorganizēti avioreisi. Starp katrām divām pilsētām ir ne vairāk kā viens reiss. Katrs reiss savieno tikai divas pilsētas, pa ceļam nenolaižoties citās, turklāt reisi "darbojas" abos virzienos.

Reisus organizē 90 aviokompānijas. Katra aviokompānija organizē tieši 30 reisus. Ja kompānija organizē reisu starp divām pilsētām, tad tai ir biroji abās šajās pilsētās. Pierādīt, ka ir tāda pilsēta, kurā ir vismaz 9 biroji.

Risinājums. Vispirms atzīmēsim, ka katrai kompānijai ir vismaz 9 biroji, pretējā gadījumā tai biroji būtu ne vairāk kā 8 pilsētās un tā nevarētu organizēt vairāk kā $C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ avioreisus. Tātad biroju kopskaits ir vismaz $9 \cdot 90 = 810$. Ja katrā pilsētā būtu ne vairāk kā 8 biroju, tad biroju kopskaits būtu ne lielāks kā $8 \cdot 100 < 810$ – pretruna. Tātad ir kāda pilsēta, kur ir vismaz 9 biroji.

8. piemērs (Latvijas 64. mat. olimpiāde, 3. posms)**.** Gatavojoties 13 diplomātu apspriedei, krēsli tika izvietoti ap apaļu galdu vienādos attālumos un katrai no vietām tika sagatavota plāksnīte ar diplomāta vārdu. Diemžēl, ieņemot vietas pie galda, diplomāti šīs plāksnītes neņēma vērā un izrādījās, ka neviens no diplomātiem nav apsēdies pretī savai plāksnītei.

1. Pierādīt: nepārsēdinot diplomātus, galdu ir iespējams pagriezt tā, ka vismaz divi diplomāti atradīsies pret savām plāksnītēm.
2. Pierādīt: ja sākumā tieši viens diplomāts būtu sēdējis pret savu plāksnīti, tad ir iespējams, ka viņi apsēdušies tā, ka, pagriežot galdu, nav iespējams panākt, ka pret savu plāksnīti atradīsies vairāk par vienu diplomātu.

Risinājums.

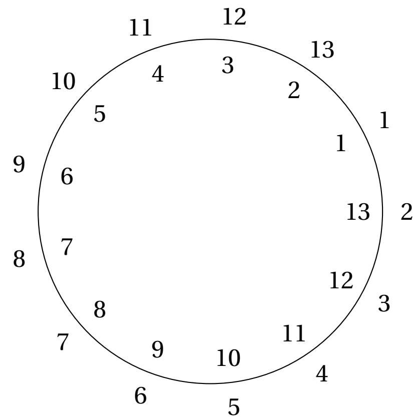
1. Apaļais galds var atrasties kādā no 13 pozīcijām, kuras var iegūt galda pagriešanas rezultātā. Katrs diplomāts pret savu plāksnīti atradīsies tieši vienā no šīm 13 pozīcijām. Sanumurēsim pozīcijas ar skaitļiem no 1 līdz 13 un katrai pozīcijai i, $1 \le i \le 13$, ar p_i apzīmēsim to diplomātu skaitu, kas šajā pozīcijā atrodas pret savu plāksnīti. Tad

$$p_1 + \ldots + p_{13} = 13,$$

jo katrs diplomāts pret savu plāksnīti atradīsies tieši vienā no šīm 13 pozīcijām.

Zināms, ka vismaz vienai pozīcijai i atbilstošā vērtība ir $p_i = 0$, jo sākotnēji neviens no diplomātiem nav apsēdies pretī savai plāksnītei. Saskaņā ar Dirihlē principu, ir tāda pozīcija j, kam $p_j \ge 2$ (pretējā gadījumā $p_1 + \ldots + p_{13} \le 12$, jo visi saskaitāmie nepārsniedz 1 un viens no saskaitāmajiem ir 0). Tātad, pagriežot galdu j-tajā pozīcijā, vismaz 2 diplomāti atradīsies pret savu plāksnīti.

2. Pieņemsim, ka diplomāti sanumurēti ar skaitļiem no 1 līdz 13 un plāksnītes uz galda sakārtotas pēc numuriem pretēji pulksteņrādītāja virzienam. Tad, ja diplomāti apsēdušies tā, ka 1. diplomāts atrodas pret savu plāksnīti, bet pārējie diplomāti izkārtojušies pulksteņrādītāja virzienā, t. i., j-tais diplomāts ($2 \le j \le 13$) atrodas pret plāksnīti ar numuru $15 - j$ (sk. 1. zīmējumu), tad izpildās uzdevumā prasītais.



1. zīm.

Ja galdu pagriež tā, lai i-tais diplomāts sēž pret savu plāksnīti, tad j-tais diplomāts ($j \ne i$) atrodas $j - i$ vietas pulksteņrādītāja virzienā no i-tā diplomāta, bet j-tā plāksnīte atrodas $j - i$ vietas pretēji pulksteņrādītāja virzienam no i-tā diplomāta. Tā kā 13 ir nepāra skaitlis, tad nav iespējams, ka j-tais diplomāts sēž pret savu plāksnīti.