NNV 15/16 3. nodarbība

3-1. Nē, tas nav iespējams. Pieņemsim pretējo, ka ir izdevies novilkt N nogriežņus tā, lai katrs punkts būtu galapunkts tieši 173 nogriežņiem. Saskaitīsim divos dažādos veidos, cik ir nogriežņu galapunktu.

No vienas puses, nogriežņu galapunktu kopā ir $2N$, jo katram nogrieznim ir tieši divi galapunkti; no otras puses, nogriežņu galapunktu ir $173 \cdot 2015$, jo katrs no dotajiem 2015 punktiem ir galapunkts tieši 173 nogriežņiem. Tātad $173 \cdot 2015 = 2N$. Taču šī vienādība nevar izpildīties, jo $173 \cdot 2015$ ir nepāra skaitlis, bet $2N$ ir pāra skaitlis. Iegūta pretruna, tātad pieņēmums bijis aplams un nav iespējams, ka katrs punkts ir galapunkts tieši 173 nogriežņiem.

3-2. Tā kā katrā dienā tiek doti ne vairāk kā 100 solījumi un katrā no 101 dienām ir dots atšķirīgs solījumu skaits, tad secinām, ka tieši vienā dienā ir doti 0 solījumi, tieši vienā dienā ir dots 1 solījums, tieši vienā dienā ir doti 2 solījums u.t.t., tieši vienā dienā ir doti 100 solījumi.

Pieņemsim, ka ir iespējams, ka visiem deputātiem doto solījumu skaits ir viens un tas pats; šo skaitu apzīmēsim ar s. Saskaitīsim divos dažādos veidos, cik ir tādu pāru (p, d), ka politiķis p dienā d ir devis kādu solījumu. No vienas puses, katrs no 100 politiķiem, saskaņā ar pieņēmumu, ir devis s solījumus (turklāt katrs politiķis, saskaņā ar doto, dažādu solījumus devis dažādās dienās), tātad šādu pāru ir $100s$. No otras puses, šādu pāru kopskaitu var iegūt, saskaitot katrā dienā doto solījumu skaitus. Šādā veidā iegūstam, ka šādu pāru ir $0+1+2+\ldots+100 = 50 \cdot 101$.

Tātad $100s = 50 \cdot 101$, no kā izriet $s = \frac{101}{2}$. Taču s jābūt naturālam skaitlim – pretruna. Tātad pieņēmums bijis aplams un nav iespējams, ka visiem deputātiem doto solījumu skaits ir viens un tas pats.

3-3. Ievēro, ka dotais lielums ir vienāds ar summu $A + B$, kur

$$A = 1C_{2015}^1 + 2C_{2015}^2 + 3C_{2015}^3 + \ldots + 2014\,C_{2015}^{2014} + 2015\,C_{2015}^{2015}$$

un

$$B = C_{2015}^0 - C_{2015}^1 + C_{2015}^2 - C_{2015}^3 + C_{2015}^4 - C_{2015}^5 + \ldots + C_{2015}^{2014} - C_{2015}^{2015}.$$

Tā kā $A = 2015 \cdot 2^{2014}$ un $B = 0$, tad secinām, ka dotais skaitlis ir vienāds ar $2015 \cdot 2^{2014}$.

3-4. Ar S apzīmēsim kopas A visu elementu summu. Izmantojot sakarību $C_{2015}^k = C_{2015}^{2015-k}$, iegūstam, ka

$$2S = 2C_{2015}^1 + 2C_{2015}^2 + \ldots + 2C_{2015}^{1007} = C_{2015}^1 + C_{2015}^2 + \ldots + C_{2015}^{1007} + C_{2015}^{1008} + \ldots + C_{2015}^{2013} + C_{2015}^{2014} = 2^{2015} - 2,$$

kur pēdējā vienādība izriet no sakarības

$$C_{2015}^0 + C_{2015}^1 + C_{2015}^2 + \ldots + C_{2015}^{2014} + C_{2015}^{2015} = 2^{2015}$$

un vienādībām $C_{2015}^0 = C_{2015}^{2015} = 1$.

Tātad

$$S = \frac{2^{2015} - 2}{2} = 2^{2014} - 1.$$

Tā kā vairāku veselu skaitļu summa S ir nepāra skaitlis, tad summā S ietilpst nepāra skaits nepāra saskaitāmo, kas arī pierāda vajadzīgo.

3-5. Pierādīsim, ka var atrast divus tādus skolēnus, kuriem kopīgo draugu skaits ir pāra skaitlis. Pieņemsim pretējo: katriem diviem skolēniem ir nepāra skaits kopīgo draugu. Apskata patvaļīgu skolēnu S.

Ar A apzīmē skolēna S draugu kopu, ar B apzīmē visus pārējo klases skolēnus (t.i., visus no S atšķirīgos skolēnus, ar kuriem S nedraudzējas). Tad $|A| + |B| + 1 = 30$. No dotā seko, ka $|A|$ ir pāra skaitlis; tātad $|B|$ ir nepāra skaitlis.

Apskata jebkuru skolēnu $T \in B$, t.i., skolēnu T, kas nedraudzējas ar S. No pieņēmuma izriet, ka S un T ir nepāra skaits kopīgu draugu, t.i., kopā A ir nepāra skaits skolēnu, ar kuriem draudzējas T. Tas nozīmē, ka kopā B arī ir nepāra skaits skolēnu, ar kuriem draudzējas T (jo skolēnam T kopā ir pāra skaits draugu un S nav viens no šiem draugiem). Ar $d(T)$ apzīmēsim skolēna T draugu skaitu, ar kuriem nedraudzējas S (t.i., to T draugu skaitu, kuri ietilpst kopā B); tad ir pierādīts, ka $d(T)$ ir nepāra skaitlis.

NNV 15/16 3. nodarbība

Katram $T \in B$ aprēķina lielumu $d(T)$ un šos lielumus saskaita; tad, no vienas puses, iegūtā summa ir nepāra skaitlis, jo katrs saskaitāmais ir nepāra skaitlis un šo skaitļu skaits (kas ir vienāds ar $|B|$) ir nepāra skaitlis. No otras puses, iegūtā summa ir divkāršots draudzību skaits starp kopas B skolēniem (jo jebkuriem diviem skolēniem $T_1, T_2 \in B$, kas savā starpā draudzējas, viņu draudzība tiek pieskaitīta divreiz – vienreiz saskaitāmajā $d(T_1)$, otrreiz saskaitāmajā $d(T_2)$). Taču pāra skaitlis nevar būt vienāds ar nepāra skaitli – pretruna. Tātad pieņēmums bijis aplams un klasē noteikti ir divi tādi skolēni, ka viņu kopīgo draugu skaits ir pāra skaitlis.