Uzdevumi un atrisinājumi

1. Taisnleņķa trijstūra malu garumi ir veseli skaitļi. Pierādīt, ka vismaz vienas malas garums **a)** dalās ar 3, **b)** dalās ar 4, **c)** dalās ar 5.

Atrisinājums. Apzīmēsim katešu garumus ar a un b, bet hipotenūzas garumu – ar c, tad saskaņā ar Pitagora teorēmu $a^2+b^2=c^2$.

a) Pieņemsim, ka nevienas malas garums nedalās ar 3. Ievērosim, ka veselu skaitļu kvadrāti, dalot ar 3, var dot tikai atlikumu 0 vai 1:

$n\ (mod\ 3)$	0	1	2
$n^2 (mod\ 3)$	$0^2\equiv 0$	$1^2\equiv 1$	$2^2\equiv 4\equiv 1$

Tā kā pieņēmām, ka a,b,c nedalās ar 3, tad $a^2\equiv b^2\equiv c^2\equiv 1\ (mod\ 3)$. Taču tad no vienādības $a^2+b^2=c^2$ izriet aplama kongruence $1+1\equiv 1\ (mod\ 3)$ – pretruna. Tātad pieņēmums, ka nevienas malas garums nedalās ar 3, bijis aplams.

b) Pieņemsim, ka nevienas malas garums nedalās ar 4. Ievērosim, ka veselu skaitļu kvadrāti, dalot ar 8, var dot tikai atlikumu 0; 1 vai 4:

$n\ (mod\ 8)$	$n^2\ (mod\ 8)$
0	$0^2\equiv 0$
1	$1^2\equiv 1$
2	$2^2\equiv 4$
3	$3^2\equiv 9\equiv 1$
4	$4^2\equiv 16\equiv 0$
5	$5^2\equiv(-3)^2\equiv 1$
6	$6^2\equiv(-2)^2\equiv 4$
7	$7^2\equiv(-1)^2\equiv 1$

Tā kā pieņēmām, ka a,b,c nedalās ar 4, tad a^2, b^2, c^2 pēc moduļa 8 var pieņemt tikai vērtības 1 vai 4. Taču tad a^2+b^2 pēc moduļa 8 var pieņemt vērtības 2, 5 vai 0, bet ne 1 vai 4. Līdz ar to nevar pastāvēt vienādība $a^2+b^2=c^2$ – pretruna.
Tātad pieņēmums, ka nevienas malas garums nedalās ar 4, bijis aplams.

c) Pieņemsim, ka nevienas malas garums nedalās ar 5. Ievērosim, ka veselu skaitļu kvadrāti, dalot ar 5, var dot tikai atlikumus 0; 1 vai 4:

$n\ (mod\ 5)$	$n^2\ (mod\ 5)$
0	$0^2\equiv 0$
1	$1^2\equiv 1$
2	$2^2\equiv 4$
3	$3^2\equiv(-2)^2\equiv 4$
4	$4^2\equiv(-1)^2\equiv 1$

Tā kā pieņēmām, ka a,b,c nedalās ar 5, tad a^2, b^2, c^2 pēc moduļa 5 var pieņemt tikai vērtības 1 vai 4. Taču tad a^2+b^2 pēc moduļa 5 var pieņemt vērtības 2, 0 vai 3, bet ne 1 vai 4. Līdz ar to nevar pastāvēt vienādība $a^2+b^2=c^2$ – pretruna.
Tātad pieņēmums, ka nevienas malas garums nedalās ar 5, bijis aplams.

2. Decimālajā pierakstā naturāla skaitļa N pēdējie k cipari ir vienādi un atšķirīgi no nulles. Vai ir iespējams, ka N ir naturāla skaitļa kvadrāts, ja **a)** $k = 3$, **b)** $k = 4$?

Atrisinājums. a) Ir iespējams, ka $k = 3$ un N ir naturāla skaitļa kvadrāts, piemēram, $38^2 = 1444$.

b) Pamatosim, ka k nevar būt 4. Naturāla skaitļa kvadrāta pēdējais cipars var būt tikai 1; 4; 5; 6 vai 9:

$n\ (mod\ 10)$	$n^2\ (mod\ 10)$
0	$0^2 \equiv 0$
1	$1^2 \equiv 1$
2	$2^2 \equiv 4$
3	$3^2 \equiv 9$
4	$4^2 \equiv 16 \equiv 6$
5	$5^2 \equiv 25 \equiv 5$
6	$6^2 \equiv (-4)^2 \equiv 6$
7	$7^2 \equiv (-3)^2 \equiv 9$
8	$8^2 \equiv (-2)^2 \equiv 4$
9	$9^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1$

Tomēr naturāla skaitļa kvadrāta pēdējie cipari nevar būt 11 (jo tad $n^2 \equiv 11 \equiv 3\ (mod\ 4)$, bet tā nevar būt, skat. nākamo tabulu), nevar beigties ar cipariem 55 (jo tad n^2 dalītos ar 5, bet ne ar 25), nevar beigties ar cipariem 66 (jo tad n^2 dalītos ar 2, bet ne ar 4) un nevar beigties arī ar cipariem 99 (jo arī tad $n^2 \equiv 99 \equiv 3\ (mod\ 4)$, bet tā nevar būt).

$n\ (mod\ 4)$	$n^2\ (mod\ 4)$
0	$0^2 \equiv 0$
1	$1^2 \equiv 1$
2	$2^2 \equiv 0$
3	$3^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1$

Paliek viena iespēja, ka n^2 divi pēdējie cipari ir 4. Tomēr nav iespējams, ka naturāla skaitļa kvadrāts beidzas ar četriem cipariem 4, jo tad $n^2 \equiv 4444 \equiv 12\ (mod\ 16)$, taču veselu skaitļu kvadrāti nevar būt kongruenti ar 12 pēc moduļa 16. Lai to pamatotu, pieņem pretējo, ka ir tādi naturāli skaitļi n un m, ka $n^2 = 16m + 12$. Tā kā n ir pāra skaitlis, tad $n = 2k$ kādam naturālam k un $k^2 = 4m + 3$, tas ir, $k^2 \equiv 3\ (mod\ 4)$, taču tas nav iespējams.

3. Doti k dažādi naturāli skaitļi ar šādu īpašību: katru divu doto skaitļu reizinājumam pieskaitot 10, iegūst naturāla skaitļa kvadrātu. Vai ir iespējams, ka **a)** $k = 3$; **b)** $k = 4$?

Atrisinājums. a) Ir iespējams, ka $k = 3$, piemēram, var ņemt skaitļus 1; 6 un 15, tad

$$1 \cdot 6 + 10 = 4^2, \quad 1 \cdot 15 + 10 = 5^2, \quad 6 \cdot 15 + 10 = 10^2.$$

b) Nav iespējams, ka $k = 4$. Ja starp dotajiem skaitļiem ir divi pāra skaitļi, tad to reizinājums dalās ar 4, savukārt šo skaitļu reizinājums plus 10 ir pāra skaitlis, kas nedalās ar 4, tātad nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

Ja starp dotajiem četriem skaitļiem ir ne vairāk kā viens pāra skaitlis, tad ir vismaz trīs nepāra skaitļi, un vismaz divi (piemēram, a un b) no tiem būs kongruenti pēc moduļa 4. Taču tad $ab + 10 \equiv 1 + 10 \equiv 3\ (mod\ 4)$, taču veselu skaitļu kvadrāti nevar būt kongruenti ar 3 pēc moduļa 4 (skat. 2. uzd. tabulu).

4. Atrast visus tādus pirmskaitļus p, kuriem skaitlis p^4+4p^2+8 ir vesela skaitļa kubs!

Atrisinājums. Vienīgais šāds pirmskaitlis ir $p=3$, tad $p^4+4p^2+8=125=5^3$. Pamatosim, ka citi pirmskaitļi neder. Veselu skaitļu kubi pēc moduļa 9 var būt kongruenti tikai ar 0; 1 vai -1:

$n\ (mod\ 9)$	$n^3\ (mod\ 9)$
0	$0^3\equiv 0$
1	$1^3\equiv 1$
2	$2^3\equiv 8\equiv -1$
3	$3^3\equiv 0$
4	$4^3\equiv 64\equiv 1$
5	$5^3\equiv(-4)^3\equiv -1$
6	$6^3\equiv(-3)^3\equiv 0$
7	$7^3\equiv(-2)^3\equiv 1$
8	$8^3\equiv(-1)^3\equiv -1$

Pieņemsim, ka pirmskaitlis $p\neq 3$, tad p nedalās ar 3 (un pēc moduļa 9 var pieņemt tikai vērtības 1; 2; 4; 5; 7 vai 8). Katrai pieļaujamajai p vērtībai pēc moduļa 9 aprēķinām atbilstošo p^4+4p^2+8 vērtību:

$p\ (mod\ 9)$	$p^2\ (mod\ 9)$	$p^4\ (mod\ 9)$	$p^4+4p^2+8\ (mod\ 9)$
1	$1^2\equiv 1$	$1^4\equiv 1$	$1+4+8\equiv 4$
2	$2^2\equiv 4$	$2^4\equiv 4^2\equiv 7$	$7+16+8\equiv 4$
4	$4^2\equiv 7$	$4^4\equiv 7^2\equiv 4$	$4+28+8\equiv 4$
5	$5^2\equiv 7$	$5^4\equiv 7^2\equiv 4$	$4+28+8\equiv 4$
7	$7^2\equiv 4$	$7^4\equiv 4^2\equiv 7$	$7+16+8\equiv 4$
8	$8^2\equiv 1$	$8^4\equiv 1^2\equiv 1$	$1+4+8\equiv 4$

Redzam, ka visiem pirmskaitļiem $p\neq 3$ izpildās $p^4+4p^2+8\equiv 4\ (mod\ 9)$, taču veselu skaitļu kubi nevar būt kongruenti ar 4 pēc moduļa 9. Līdz ar to $p=3$ ir vienīgais atrisinājums.

5. Atrast visus tādus pirmskaitļus p, kuriem abi skaitļi $3p^3+4$ un $9p^3+2$ ir pirmskaitļi!

Atrisinājums. Vienīgais derīgais pirmskaitlis ir $p=7$, tad $3p^3+4=1033$ ir pirmskaitlis (pārbauda, dalot šo skaitli ar visiem pirmskaitļiem, kas nepārsniedz 31) un arī $9p^3+2=3089$ ir pirmskaitlis (pārbauda, dalot šo skaitli ar visiem pirmskaitļiem, kas nepārsniedz 53).

Pamatosim, ka citi pirmskaitļi neder.

Pieņemsim, ka $p\neq 7$, tad $p\not\equiv 0\ (mod\ 7)$. Parādīsim, ka tādā gadījumā viens no skaitļiem $N_1=3p^3+4$ vai $N_2=9p^3+2$ dalās ar 7. Ievērosim, ka $N_1\equiv 3(p^3-1)\ (mod\ 7)$ un $N_2\equiv 2(p^3+1)\ (mod\ 7)$. Apskatām iespējamos gadījumus pēc moduļa 7:

$p\ (mod\ 7)$	$p^3\ (mod\ 7)$
1	$1^3\equiv 1$
2	$2^3\equiv 1$
3	$3^3\equiv -1$
4	$4^3\equiv(-3)^3\equiv 1$
5	$5^3\equiv(-2)^3\equiv -1$
6	$6^3\equiv(-1)^3\equiv -1$

Redzam, ka visos gadījumos p^3+1 vai arī p^3-1 dalās ar 7. Taču tad attiecīgi vai nu N_2, vai N_1 dalās ar 7 un nevar būt pirmskaitlis. Līdz ar to $p=7$ ir vienīgais atrisinājums.