Laukumi

1. Trīsstūra laukums

Šeit atkārtosim svarīgākās pirmajā nodarbībā sniegtās trīsstūra laukuma formulas:

Pieņemsim, ka trīsstūrī ABC malu garumi ir $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Ar $p = 0.5\,(a+b+c)$ apzīmēts trīsstūra ABC pusperimetrs, bet no leņķa A vilktais augstums apzīmēts ar h_a. Ar R apzīmēts trīsstūrim ABC apvilktās (centrs – vidusperpendikulu krustpunkts) riņķa līnijas rādiusu, bet ar r – ievilktās (centrs – bisektrišu krustpunkts) riņķa līnijas rādiusu.

- Trīsstūra laukums ir vienāds ar malas un pret to vilktā augstuma reizinājuma pusi:

$$S(ABC) = \frac{1}{2} a\, h_a.$$

- Trīsstūra laukums ir vienāds ar divu malu un starp tām ietvertā leņķa sinusa reizinājuma pusi:

$$S(ABC) = \frac{1}{2} a\, b \sin C.$$

- Trīsstūra laukums ir vienāds ar visu trīs malu reizinājumu, dalītu ar četrkāršotu apvilktās riņķa līnijas rādiusu:

$$S(ABC) = \frac{abc}{4R}.$$

- Trīsstūra laukums ir vienāds ar pusperimetra un ievilktās riņķa līnijas rādiusa reizinājumu:

$$S(ABC) = pr.$$

- Hērona formula:

$$S(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Trīsstūru izoperimetriskā teorēma

Ja trīsstūra perimetrs ir P un laukums S, tad izpildās nevienādība

$$S \leq \frac{1}{12\sqrt{3}} P^2,$$

turklāt vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja trīsstūris ir regulārs.

Citiem vārdiem, no visiem trīsstūriem ar fiksētu perimetru vislielākais laukums ir vienādmalu trīsstūrim.

1. piemērs. Pierādīt, ka ka nav iespējams konstruēt trīsstūri, kura augstumu garumi ir 4 cm, 7 cm un 10 cm.

Risinājums

Pieņemsim pretējo, ka šādu trīsstūri iespējams konstruēt. Apzīmēsim šī trīsstūra laukumu ar S, tad tā malu garumi ir $\frac{2S}{4}$, $\frac{2S}{7}$ un $\frac{2S}{10}$.

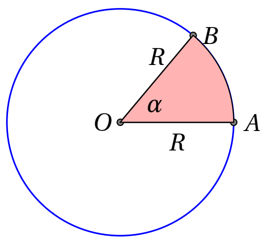
Saskaņā ar trīsstūra nevienādību, divu īsāko malu garumu summai jābūt lielākai nekā trešās malas garumam. Taču

$$\frac{2S}{7}+\frac{2S}{10}=\frac{17}{70}2S=\frac{34}{140}2S<\frac{35}{140}2S=\frac{2S}{4},$$

pretruna.

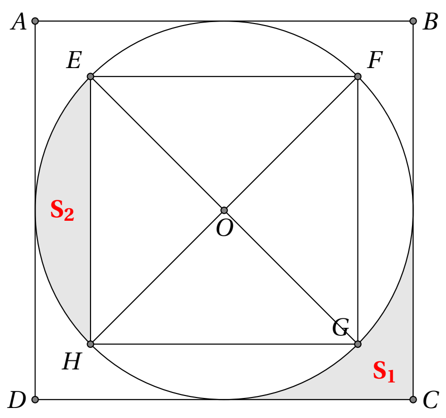
2. Riņķa un tā daļu laukums

- Riņķa ar rādiusu R laukums ir vienāds ar πR^2.
- Riņķa sektora laukums ir proporcionāls sektora centra leņķa lielumam; tātad sektora laukums ir iegūstams kā visa riņķa laukums, reizināts ar sektora centra leņķa (grādos) un pilnā leņķa (360°) attiecību: $\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360}$.



$$S(\text{iekrāsotajai daļai})=\pi R^2\,\frac{\alpha}{360°}$$

2. piemērs. Kvadrātā, kura malas garums ir 2, ievilkts riņķis, un šajā riņķī ievilkts kvadrāts. Aprēķināt iekrāsoto daļu laukumu S_1 un S_2 summu!



Risinājums

Ievilktā riņķa rādiusa garums ir puse no kvadrāta $ABCD$ malas garuma, t.i., $EO=FO=\frac{1}{2}AB=1$. Izmantojot Pitagora teorēmu trijstūrī EOF, iegūst

$$EF=\sqrt{EO^2+FO^2}=\sqrt{2}.$$

Ar S_O apzīmēsim ievilktā riņķa laukumu. Aprēķinām katras iekrāsotās daļas laukumu:

- $S_1=\frac{1}{4}(S(ABCD)-S_O)=\frac{1}{4}(4-\pi)$;
- $S_2=\frac{1}{4}(S_O-S(EFGH))=\frac{1}{4}(\pi-2)$.

Līdz ar to

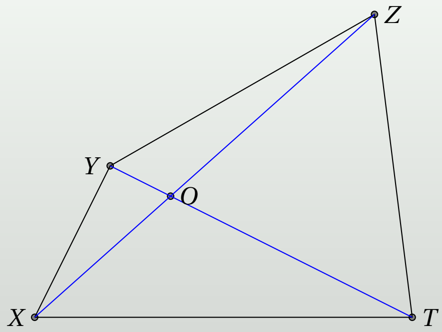
$$S_1+S_2=\frac{4-\pi}{4}+\frac{\pi-2}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

3. Četrstūra laukums

Izliekta četrstūra laukums

Izliekts četrstūris

Ja izliekta četrstūra diagonāļu garumi ir d_1 un d_2, bet leņķis starp diagonālēm ir ϕ, tad šī četrstūra laukums ir vienāds ar $\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\phi$.



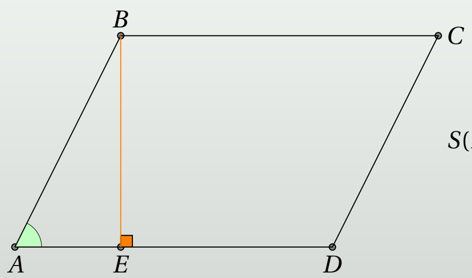
$$S(XYZT) = \frac{1}{2} \cdot XZ \cdot YT \cdot \sin\sphericalangle XOY$$

Paralelograma laukums

Paralelograms

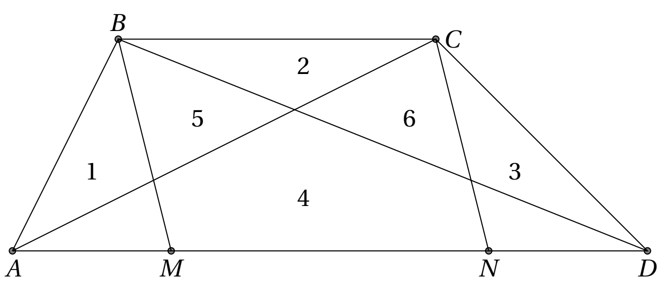
Paralelograma laukums ir vienāds

- ar tā malas un augstuma, kurš novilkts pret šo malu, garumu reizinājumu: $S = a \cdot h_a$.
- ar tā blakus malu garumu a, b un to ietvertā leņķa α sinusa reizinājumu: $S = ab \cdot \sin\alpha$.



$$S(ABCD) = AD \cdot BE = AD \cdot AB \cdot \sin\sphericalangle DAB$$

3. piemērs. Uz trapeces $ABCD$ garākā pamata AD ņemti tādi divi iekšējie punkti M un N, ka $BM \parallel CN$. Pierādīt, ka daļu 1, 2 un 3 (sk. zīm.) laukumu summa ir vienāda ar daļas 4 laukumu.



Risinājums

Ar $S(k)$ apzīmēsim k-tās daļas laukumu.

Pieskaitot pierādāmās vienādības $S(1)+S(2)+S(3)=S(4)$ abām pusēm lielumu $S(5)+S(2)+S(6)$ un ņemot vērā, ka

$$S(1)+S(2)+S(5)=S(ABC),\quad S(2)+S(6)+S(3)=S(BCD),\quad S(2)+S(5)+S(6)+S(4)=S(BCNM),$$

iegūstam ekvivalentu vienādību

$$S(ABC)+S(DBC)=S(BCNM).$$

Ievērojam, ka $BCNM$ ir paralelograms (jo pretējās malas ir pa pāriem paralēlas). Apzīmējam attālumu starp taisnēm AD un BC ar h, bet $BC=MN=a$.

Tad

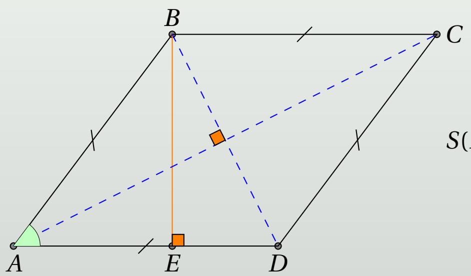
$$S(ABC)=\frac{ah}{2},\quad S(DBC)=\frac{ah}{2},\quad S(BCNM)=ah.$$

Redzam, ka izpildās vienādība $S(ABC)+S(DBC)=S(BCNM)$, tātad izpildās arī ekvivalentā vienādība $S(1)+S(2)+S(3)=S(4)$, kas bija jāpierāda.

Rombs

Romba laukums ir vienāds

- ar tā malas un augstuma reizinājumu: $S=a\cdot h$ (ievērot, ka rombā visas malas ir vienādas un arī visi augstumi ir vienādi!);
- ar malas garuma kvadrāta un leņķa sinusa reizinājumu: $S=a^2\cdot\sin\alpha$.
- ar diagonāļu garumu reizinājuma pusi: $S=\frac{1}{2}d_1d_2$.

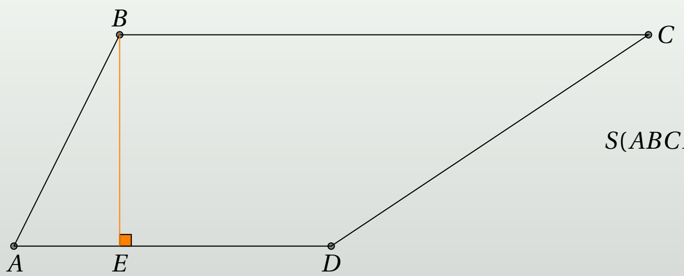


$$S(ABCD)=AD\cdot BE=AB^2\cdot\sin\sphericalangle DAB=\frac{AC\cdot BD}{2}$$

Trapeces laukums

Trapece

Trapeces laukums ir vienāds ar pamatu garumu pussummas un trapeces augstuma (attālums starp pamatiem) reizinājumu.



$$S(ABCD)=\frac{AD+BC}{2}\cdot BE$$

Varinjona paralelograms

Varinjona (Varignon) teorēma

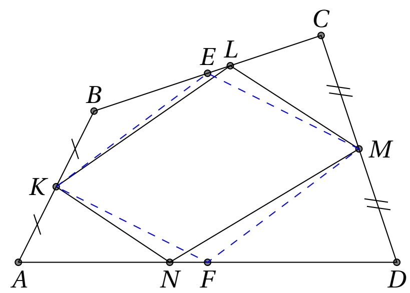
Pieņemsim, ka $ABCD$ ir patvaļīgs četrstūris (ne noteikti izliekts). Ar P, Q, R, S apzīmēti attiecīgi malu AB, BC, CD un DA viduspunkti. Tad četrstūris $PQRS$ ir paralelograms (saukts par Varinjona paralelogramu).

Turklāt, ja $ABCD$ ir izliekts četrstūris, tad paralelograma $PQRS$ laukums ir vienāds ar pusi no $ABCD$ laukuma, t.i., $S(ABCD) = 2S(PQRS)$.

4. piemērs. Dots, ka $ABCD$ ir izliekts četrstūris. Paralelograma divas virsotnes atrodas malu AB un CD viduspunktos, bet divas citas virsotnes – uz malām BC un AD. Pierādīt, ka šī paralelograma laukums ir divas reizes mazāks nekā $ABCD$ laukums.

Risinājums

Dotā paralelograma virsotnes apzīmēsim ar K, L, M un N, bet malu BC un AD viduspunktus E un F.



No trijstūru ABC un ADC viduslīniju KE un MF īpašībām izriet, ka

$$KE \parallel MF \parallel AC, \quad KE = MF = \frac{AC}{2}.$$

No trijstūru BAD un BCD viduslīniju KF un ME īpašībām izriet, ka

$$KF \parallel ME \parallel BD, \quad KF = ME = \frac{BD}{2}.$$

Tātad $KEMF$ ir paralelograms.

Visa četrstūra $ABCD$ laukumu var aprēķināt pēc formulas:

$$S(ABCD) = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\phi}{2},$$

kur ϕ ir leņķis starp diagonālēm AC un BD.

Paralelograma $KEMF$ laukumu var aprēķināt kā

$$S(KEMF) = KE \cdot KF \cdot \sin\sphericalangle FKE.$$

Taču $KE = 0.5\,AC$, $KF = 0.5\,BD$. Turklāt, tā kā $KE \parallel AC$, $KF \parallel BD$, tad leņķis starp taisnēm KE un KF ir vienāds ar leņķi starp taisnēm AC un BD. Līdz ar to

$$S(KEMF) = \frac{AC}{2} \cdot \frac{BD}{2} \cdot \sin\phi = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\phi}{2} = \frac{1}{2} S(ABCD).$$

Secinām, ka $KEMF$ laukums ir puse no dotā četrstūra laukuma.

Tā kā $KLMN$ ir paralelograms, tad KM un LN viduspunkti sakrīt. Tā kā $KEMF$ ir paralelograms, tad KM un EF viduspunkti sakrīt. Tātad sakrīt arī LN un EF viduspunkti. Tas iespējams divos gadījumos.

1. Punkts E sakrīt ar L un N sakrīt ar F; šajā gadījumā vajadzīgais jau ir pierādīts.

2. $ELFN$ ir paralelograms. Tad $BC \parallel AD$ (un līdz ar to $ABCD$ ir trapece vai paralelograms). Šajā gadījumā

$$S(ABCD) = KM \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{2} h \cdot KM = 2 \cdot S(KLMN),$$

kur ar h apzīmēts attālums starp taisnēm BC un AD.

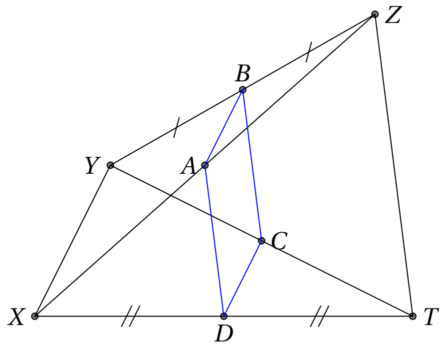
Piezīme. Var ievērot, ka $KEMF$ ir Varinjona paralelograms četrstūrim $ABCD$. Faktiski risinājuma pirmajā daļā pamatota Varinjona teorēma.

5. piemērs. Izliektā četrstūrī $XYZT$ nav paralēlu malu. Pierādīt, ka

1. nogriežņu XZ, YZ, YT un XT viduspunkti ir paralelograma virsotnes;
2. ja $XY = ZT$, tad šis paralelograms ir rombs!

Risinājums

Apzīmēsim XZ, YZ, YT un XT viduspunktus attiecīgi ar A, B, C un D.



No trīsstūru XYZ un XYT viduslīniju AB un DC īpašībām izriet, ka

$$AB \parallel XY \parallel CD \quad \text{un} \quad AB = CD = \frac{XY}{2}.$$

Četrstūra $ABCD$ pretējās malas AB un CD pretējās malas ir vienādas un paralēlas, tātad $ABCD$ ir paralelograms.

Analoģiski parāda, ka $AD \parallel BC \parallel ZT$ un $AD = BC = \frac{ZT}{2}$. Līdz ar to, ja izpildās arī vienādība $XY = ZT$, tad iegūstam

$$AB = \frac{XY}{2} = \frac{ZT}{2} = AD,$$

tātad $ABCD$ ir rombs kā paralelograms, kura blakus malas ir vienādas.

Četrstūru laukumu nevienādības

Četrstūru izoperimetriskā teorēma

Ja četrstūra perimetrs ir P un laukums S, tad izpildās nevienādība

$$S \le \frac{1}{16} P^2,$$

turklāt vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja četrstūris ir kvadrāts.

Citiem vārdiem, no visiem četrstūriem ar fiksētu perimetru vislielākais laukums ir kvadrātam.

Citas četrstūru laukumu nevienādības:

1. Ja izliekts četrstūris nav deģenerēts (t.i., tas nav ne trīsstūris, ne nogrieznis vai punkts), tad tā laukums S apmierina nevienādību

$$S \leq \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

kur a, b, c, d ir četrstūra malu garumi, bet $p = 0.5(a+b+c+d)$ – pusperimetrs, turklāt vienādība pastāv tikai tad, ja ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju.

2. Ja izliekta četrstūra diagonāļu garumi ir d_1 un d_2, tad tā laukums S apmierina nevienādību

$$S \leq \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

6. piemērs. Četrstūris $ABCD$ ievilkts riņķa līnijā. Tā diagonāles AC un BD vienlaikus ir attiecīgi leņķu $\sphericalangle BAD$ un $\sphericalangle CDA$ bisektrises. Nogriežņa BC garums ir a, bet AD garums ir $2a$. Aprēķināt četrstūra $ABCD$ laukumu!

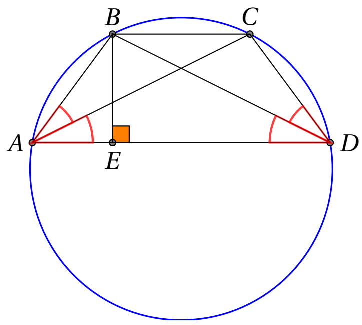
Risinājums

Tā kā AC un BD ir bisektrises, tad

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD \quad \text{un} \quad \sphericalangle CDB = \sphericalangle BDA.$$

Tā kā ievilktie leņķi $\sphericalangle BDC$ un $\sphericalangle BAC$ balstās uz vienu loku, tad $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC$. Tātad pastāv vienādības

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CDB = \sphericalangle BDA.$$



Hordas, uz kurām balstās vienādi ievilkti leņķi, ir vienādas, tātad $AB = BC = CD$.

Tā kā $AB = CD$, tad loki $\overset{\frown}{AB}$ un $\overset{\frown}{CD}$, kurus savelk šīs hordas, arī ir vienādi; taču no tā, ka loki starp hordām BC un AD ir vienādi, izriet, ka $BC \parallel AD$. Secinām, ka $ABCD$ ir vienādsānu trapece, kuras sānu malas ir vienādas ar īsāko pamatu $BC = a$, bet garākais pamats AD pēc dotā ir vienāds ar $2a$.

Novilksim augstumu BE un apzīmēsim tā garumu ar h. Tad

$$AE = \frac{AD - BC}{2} = \frac{2a - a}{2} = \frac{a}{2}$$

un, no trīsstūra ABE,

$$h = BE = \sqrt{BA^2 - AE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Tātad trapeces $ABCD$ laukums ir vienāds ar

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot h = \frac{a + 2a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2.$$

7. piemērs. Pierādīt, ka izliekta četrstūra laukums ir ne lielāks kā šī četrstūra visu malu garumu kvadrātu summas ceturtdaļa!

Risinājums

Pieņemsim, ka dots izliekts četrstūris, kura pēc kārtas ņemtu malu garumi ir a, b, c, d. Četrstūra leņķi, kuru veido malas ar garumiem a un b, apzīmēsim ar α, bet leņķi, kuru veido malas ar garumiem c un d, apzīmēsim ar β. Tad četrstūra laukums ir

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta.$$

Izmantosim faktu, ka sinusa funkcijas maksimālā vērtība ir 1, t.i., $\sin\alpha \leq 1$ un $\sin\beta \leq 1$, kā arī nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko (ja x, y ir nenegatīvi skaitļi, tad $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$), no kuras izriet nevienādības

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}, \quad cd \leq \frac{c^2+d^2}{2}.$$

Tātad dotā četrstūra laukumu var novērtēt kā:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta \leq \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd \leq \frac{a^2+b^2}{4} + \frac{c^2+d^2}{4} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4},$$

kas arī bija jāpierāda.

8. piemērs. Kvadrāts ar izmēriem 1×1 sadalīts dažos izliektos četrstūros. Pierādīt, ka visu iegūto četrstūru visu malu garumu kvadrātu summa ir vismaz 4.

Risinājums

Pieņemsim, ka dotais kvadrāts sadalīts n četrstūros, turklāt i-tā četrstūra malu garumi ir a_i, b_i, c_i un d_i, bet laukums ir S_i.

Visu sadalījuma četrstūru laukumu summa ir vienāda ar sākotnējā kvadrāta laukumu jeb

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = 1,$$

savukārt jāpierāda nevienādība

$$\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2\right) + \left(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2\right) + \ldots + \left(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2\right) \geq 4.$$

Taču no iepriekšējā piemēra ir zināms, ka visiem $i = 1, 2, \ldots, n$ izpildās nevienādība

$$a_i^2+b_i^2+c_i^2+d_i^2 \geq 4S_i.$$

Saskaitot šīs n nevienādības, iegūstam vajadzīgo:

$$\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2\right) + \left(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2\right) + \ldots + \left(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2\right) \geq 4(S_1+S_2+\ldots+S_n) = 4.$$

9. piemērs. Attālumi no punkta O līdz izliekta četrstūra virsotnēm ir a, b, c, d, pie tam $a < b < c < d$. Kāds ir lielākais iespējamais šī četrstūra laukums?

Risinājums

Pieņemsim, ka dots izliekts četrstūris $XYZT$.

Katrs $XYZT$ punkts pieder vismaz vienam no trīsstūriem OXY, OYZ, OZT un OTX, tāpēc apskatāmā četrstūra laukums nav lielāks kā šo četru trīsstūru laukumu summa:

$$S(XYZT) \leq S(OXY) + S(OYZ) + S(OZT) + S(OTX), \tag{1}$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja trīsstūri nepārklājas.

Jebkura trīsstūra OMN laukums ir $\frac{1}{2}OM \cdot ON \cdot \sin\sphericalangle MON \leq \frac{1}{2}OM \cdot ON$, tātad

$$S(OXY)+S(OYZ)+S(OZT)+S(OTX) \leq \frac{OX\cdot OY+OY\cdot OZ+OZ\cdot OT+OT\cdot OX}{2} = \frac{(OX+OZ)\cdot(OY+OT)}{2}, \tag{2}$$

turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja

$$\sphericalangle XOY = \sphericalangle ZOY = \sphericalangle ZOT = \sphericalangle XOT = 90^\circ.$$

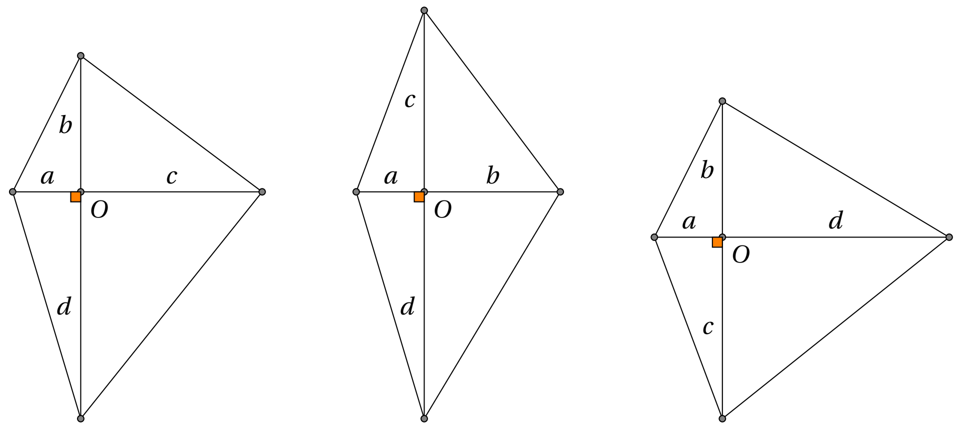
No (1) un (2) secinām, ka

$$S(XYZT) \leq \frac{(OX+OZ)\cdot(OY+OT)}{2},$$

turklāt vienādība izpildās tad un tikai tad, ja

1. trīsstūri OXY, OYZ, OZT un OTX nepārklājas un
2. $\sphericalangle XOY = \sphericalangle ZOY = \sphericalangle ZOT = \sphericalangle XOT = 90^\circ$.

Tas ir iespējams, ja $XYZT$ diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras un O ir to krustpunkts. Pastāv 3 iespējas, kā izvēlēties attālumus no O līdz četrstūra virsotnēm, sk. zīm.:



Laukumi ir attiecīgi

$$S_1 = \frac{1}{2}(a+c)(b+d), \quad S_2 = \frac{1}{2}(a+b)(c+d), \quad S_3 = \frac{1}{2}(a+d)(b+c).$$

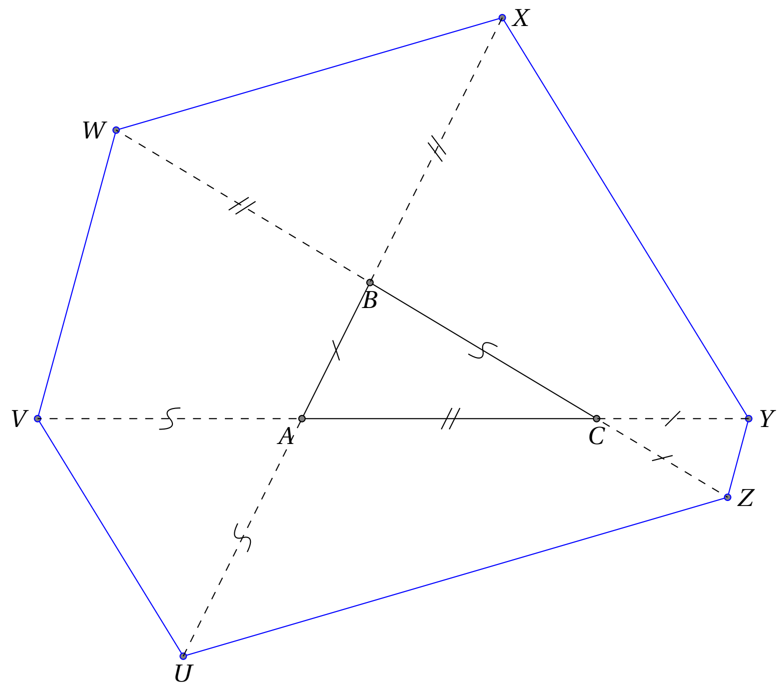
Ievērojam, ka

$$S_3 - S_1 = \frac{1}{2}(ab+ac+db+dc-ab-ad-cb-cd) = \frac{1}{2}(ac+db-ad-cb) = \frac{1}{2}(b-a)(d-c) > 0.$$

Līdzīgi pierāda, ka $S_3 > S_2$. Tātad lielākais iespējamais četrstūra $XYZT$ laukums ir $S_3 = \frac{1}{2}(a+d)(b+c)$.

10. piemērs. Dots trīsstūris ABC. Uz tā malu pagarinājumiem atliek nogriežņus $AV = AU = BC$, $BX = BW = AC$ un $CY = CZ = AB$ (sk. zīm.); pierādīt, ka

$$S(UVWXYZ) \geq 13S(ABC).$$



Risinājums

Apzīmēsim nogriežņu garumus

$$AV = AU = BC = a;$$
$$BX = BW = AC = b;$$
$$CY = CZ = AB = c.$$

Ievēro, ka

$$\frac{S(AXY)}{S(ABC)} = \frac{0.5\,AX \cdot AY \cdot \sin XAY}{0.5\,AB \cdot AC \cdot \sin BAC} = \frac{AX \cdot AY}{AB \cdot AC} = \frac{(AB+BX)\cdot(AC+CY)}{AB \cdot AC} = \frac{(b+c)^2}{bc}. \tag{3}$$

Līdzīgi pierāda, ka

$$\frac{S(BUZ)}{S(ABC)} = \frac{(a+c)^2}{ac}, \qquad \frac{S(CVW)}{S(ABC)} = \frac{(a+b)^2}{ab}. \tag{4}$$

Analoģiski,

$$\frac{S(CYZ)}{S(ABC)} = \frac{0.5\,CY \cdot CZ \cdot \sin ZCY}{0.5\,CB \cdot CA \cdot \sin BCA} = \frac{CY \cdot CZ}{CB \cdot CA} = \frac{c^2}{ab} \tag{5}$$

un

$$\frac{S(BWX)}{S(ABC)} = \frac{b^2}{ac}, \qquad \frac{S(AUV)}{S(ABC)} = \frac{a^2}{bc}. \tag{6}$$

Pierādāmais apgalvojums ir līdzvērtīgs apgalvojumam

$$\frac{S(UVWXYZ)}{S(ABC)} \geq 13.$$

Pieskaitot abām šīs nevienādības pusēm 2, iegūst ekvivalentu nevienādību

$$\frac{S(UVWXYZ)+2S(ABC)}{S(ABC)} \geq 15. \tag{7}$$

Ievērojot, ka

$$S(UVWXYZ)+2S(ABC) = \Big(S(CVW)+S(CYZ)\Big)+\Big(S(BUZ)+S(BWX)\Big)+\Big(S(AXY)+S(AUV)\Big),$$

pierādāmo nevienādību (7) var ekvivalenti pārveidot šādi:

$$\frac{S(CVW)}{S(ABC)}+\frac{S(BUZ)}{S(ABC)}+\frac{S(AXY)}{S(ABC)}+\frac{S(CYZ)}{S(ABC)}+\frac{S(BWX)}{S(ABC)}+\frac{S(AUV)}{S(ABC)}\geq 15. \tag{8}$$

Izmantojot (3)–(6), iegūstam, ka jāpierāda nevienādība

$$\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(a+c)^2}{ac}+\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{c^2}{ab}+\frac{b^2}{ac}+\frac{a^2}{bc}\geq 15. \tag{9}$$

Taču šī nevienādība izriet no sakarības starp nenegatīvu skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko (*AM-GM* nevienādības): ja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir nenegatīvi skaitļi, tad izpildās nevienādība

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Ņemot *AM-GM* nevienādībā $n=2$, $x_1=b>0$, $x_2=c>0$, iegūst

$$\frac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc}.$$

Kāpinot abas nevienādības puses kvadrātā (ekvivalents pārveidojums, jo nevienādības abas puses ir nenegatīvas), iegūst

$$\frac{(b+c)^2}{4}\geq bc$$

vai, ekvivalenti,

$$\frac{(b+c)^2}{bc}\geq 4.$$

Analoģiski parāda nevienādības

$$\frac{(a+c)^2}{ac}\geq 4,\quad \frac{(a+b)^2}{ab}\geq 4.$$

Saskaitot šīs trīs iegūtās nevienādības, iegūst

$$\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(a+c)^2}{ac}+\frac{(a+b)^2}{ab}\geq 12. \tag{10}$$

Visbeidzot, izmantojot *AM-GM* nevienādību ar $n=3$ un $x_1=\frac{c^2}{ab}$, $x_2=\frac{b^2}{ac}$, $x_3=\frac{a^2}{bc}$, iegūstam

$$\frac{\frac{c^2}{ab}+\frac{b^2}{ac}+\frac{a^2}{bc}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}\cdot\frac{b^2}{ac}\cdot\frac{a^2}{bc}}=1.$$

vai, ekvivalenti,

$$\frac{c^2}{ab}+\frac{b^2}{ac}+\frac{a^2}{bc}\geq 3. \tag{11}$$

Saskaitot patiesās nevienādības (10) un (11), iegūstam (9), tātad tā arī ir patiesa nevienādība. Līdz ar to ekvivalentā nevienādība $S(UVWXYZ)\geq 13S(ABC)$ arī ir patiesa.

4. Pīka formula

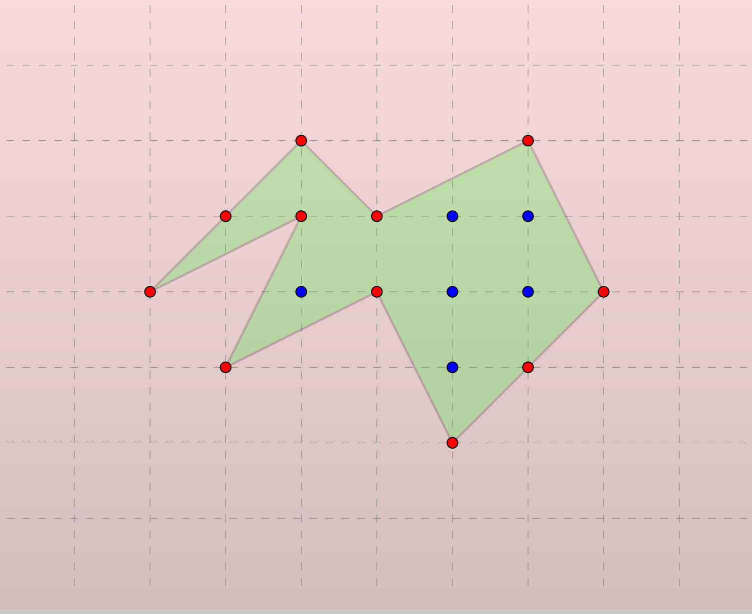
Pieņemsim, ka dots kvadrātisks režģis ar malas garumu 1. Apskatām daudzstūrus, kuru virsotnes atrodas režģa punktos.

Pīka formula

Ja daudzstūra visas virsotnes atrodas kvadrātiska režģa punktos, uz tā kontūra atrodas r režģa punkti (ieskaitot virsotnes), bet daudzstūra iekšpusē ir i režģa punkti, tad tā laukums ir vienāds ar

$$S=i+\frac{r}{2}-1.$$

Piemērs:



$r = 11$

$i = 6$

$$S = 6 + \frac{11}{2} - 1 = 6 + 5.5 - 1 = 10.5$$

11. piemērs. Trīsstūra ABC mala AB ir ar garumu 1 un visas ABC virsotnes ir režģa punkti. Zināms, ka augstuma, kas vilkts no C pret AB, garums ir 2. Pierādīt: uz vienas no malām AC vai BC atrodas tieši viens režģa punkts.

Risinājums

Trīsstūra laukums ir $S = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Saskaņā ar Pīka formulu, $S = i + \frac{r}{2} - 1$. Tātad izpildās vienādība

$$i + \frac{r}{2} = 2. \qquad (12)$$

Zināms, ka $r \geq 3$ un $i \geq 0$. Ja būtu $i \geq 1$ (t.i., ja ΔABC iekšpusē būtu kaut viens režģa punkts), tad $i + \frac{r}{2} \geq 1 + 1.5 = 2.5$ un vienādība (12) nevarētu izpildīties. Tātad $i = 0$. Taču tad no (12) seko, ka $r = 4$, t.i., bez punktiem A, B, C uz trīsstūra kontūra atrodas vēl viens režģa punkts. Tā kā tas nevar atrasties uz malas AB (jo tās garums ir 1), tad tas atrodas uz kādas no malām AC vai BC, kas arī bija jāpierāda.

12. piemērs. Piecstūra visas virsotnes atrodas kvadrātiska režģa punktos. Kāds ir mazākais iespējamais šī piecstūra laukums, ja tas

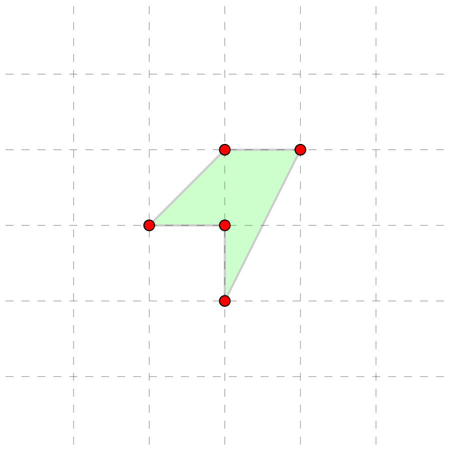
1. var būt ieliekts;
2. ir izliekts?

Risinājums

Tā kā piecstūrim uz kontūra atrodas vismaz pieci režģa punkti (virsotnes), tad $r \geq 5$, $i \geq 0$ un no Pīka formulas izriet, ka tā laukums ir

$$S = i + \frac{r}{2} - 1 \geq 0 + 2.5 - 1 = 1.5.$$

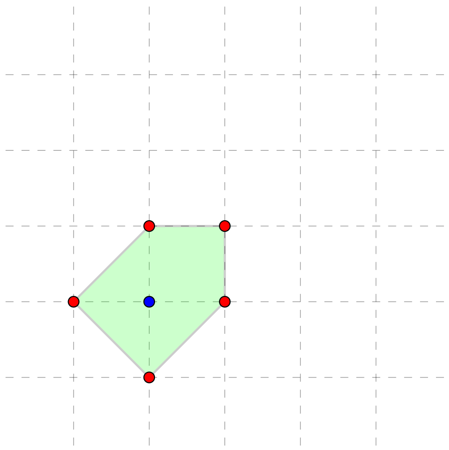
Ja piecstūris var būt ieliekts, tad tā laukums var būt 1.5, sk. piemēru:



$$S = 0 + \frac{5}{2} - 1 = 1.5$$

Tātad ieliektiem piecstūriem, kuriem visas virsotnes ir režģa punkti, mazākais iespējamais laukums ir 1.5.

Pierādīsim, ka izliektu piecstūru gadījumā mazākais iespējamais laukums ir 2.5. To, ka eksistē tāds izliekts piecstūris ar virsotnēm režģa punktos, kura laukums ir 2.5, pierāda šāds piemērs:



$$S = 1 + \frac{5}{2} - 1 = 2.5$$

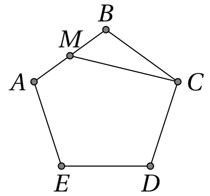
Pierādīsim, ka katram šādam piecstūrim iekšpusē atrodas vismaz viens režģa punkts, t.i., $i \geq 1$; tad no Pīka formulas sekos, ka šāda piecstūra laukums ir vismaz

$$S = i + \frac{r}{2} - 1 \geq 1 + 2.5 - 1 = 2.5,$$

un būs pierādīts, ka izliektu piecstūru gadījumā mazākais iespējamais laukums ir 2.5.

Pieņemam pretējo: eksistē izliekts piecstūris, kura virsotnes atrodas režģa punktos un kuram iekšpusē nav neviena režģa punkta.

Varam pieņemt, ka šādam piecstūrim uz malām nav citu režģa punktu kā vien piecstūra virsotnes. Pamatojums: ja tas tā nebūtu, piemēram, ja uz malas AB vēl atrastos režģa punkts M, tad sākotnējā piecstūra $ABCDE$ vietā varētu aplūkot piecstūri $AMCDE$, kas atkal ir izliekts piecstūris ar virsotnēm režģa punktos (turklāt $AMCDE$ iekšpusē nebūtu neviena režģa punkta, jo to nebija arī $ABCDE$ iekšpusē), sk. zīm. Tā kā uz katras malas var būt tikai galīgs režģa punktu skaits, tad šādā veidā var pakāpeniski nonākt līdz izliektam piecstūrim, kura visas virsotnes ir režģa punktos, bet citu punktu uz tā kontūra nav.



Var uzskatīt, ka plaknē ieviesta koordinātu sistēma tā, ka režģa punkti ir tie un tikai tie punkti, kam abas koordinātas ir veseli skaitļi. Visus režģa punktus var sadalīt četros tipos:

- punkti, kuriem abas koordinātas ir pāra skaitļi, t.i., punkti formā (p, p);
- punkti, kuriem abas koordinātas ir nepāra skaitļi, t.i., punkti formā (n, n);
- punkti, kuriem pirmā koordināta ir pāra skaitlis, bet otrā – nepāra, t.i., punkti formā (p, n);
- punkti, kuriem pirmā koordināta ir nepāra skaitlis, bet otrā – pāra, t.i., punkti formā (n, p).

Tā kā piecstūrim ir piecas virsotnes, tad vismaz divas no tām ir viena un tā paša tipa; šo virsotņu veidotā nogriežņa viduspunkts (apzīmēsim to ar N) līdz ar to arī ir režģa punkts.

Ir divas iespējas:

1. Šīs virsotnes nav piecstūra blakus virsotnes; tad to veidotais nogrieznis ir diagonāle un tās viduspunkts N ir piecstūra iekšējs punkts. Taču tā ir pretruna ar pieņēmumu, ka apskatāmajam piecstūrim iekšienē nav režģa punktu.
2. Šīs virsotnes ir blakus virsotnes; tad to veidotais nogrieznis ir piecstūra mala un tās viduspunkts N ir vēl viens režģa punkts, kas atrodas uz piecstūra kontūra. Taču tā ir pretruna ar pieņēmumu, ka apskatāmajam piecstūrim uz kontūra nav citu režģa punktu kā vien virsotnes.

Iegūta pretruna; tātad pieņēmums, ka eksistē izliekts piecstūris, kura virsotnes atrodas režģa punktos un kuram iekšpusē nav neviena režģa punkta, izrādījies aplams. Tas arī nozīmē, ka izliektu piecstūru gadījumā to laukums ir vismaz

$$S = i + \frac{r}{2} - 1 \geq 1 + 2.5 - 1 = 2.5.$$

No Pīka formulas izriet šāds secinājums:

Ja daudzstūra visas virsotnes atrodas kvadrātiska režģa (ar malas garumu 1) punktos, tad tā laukums ir vai nu naturāls skaitlis, vai arī naturāls skaitlis un viena puse; t.i., šāda daudzstūra laukumu var izteikt formā

$$S = \frac{n}{2},$$

kur n – naturāls skaitlis.