Neklātienes nodarbības vidusskolēniem
2016./2017. mācību gads

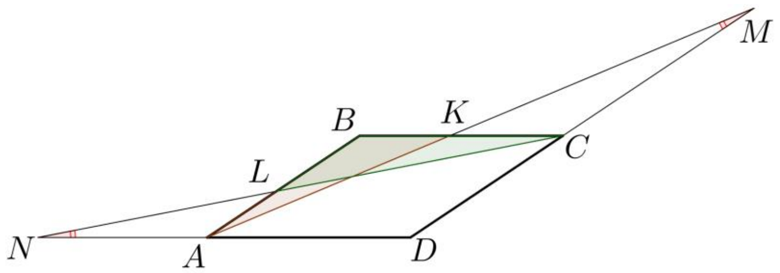
1. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. uzdevums

Uz paralelograma $ABCD$ malām AB un BC atlikti attiecīgi punkti L un K; taisne AK krusto taisni DC punktā M, taisne CL krusto taisni DA punktā N.

Pierādīt, ka $\Delta ABK \sim \Delta CBL$, ja dots, ka $\sphericalangle CND = \sphericalangle AMD$!

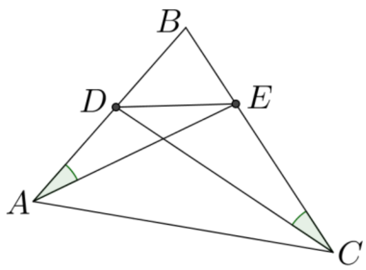
Atrisinājums. Ievēro, ka $\sphericalangle CND = \sphericalangle BCL$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm AD un BC; līdzīgi iegūst $\sphericalangle BAK = \sphericalangle AMD$. No dotā tad izriet $\sphericalangle BAK = \sphericalangle AMD = \sphericalangle CND = \sphericalangle BCL$. Tātad $\Delta ABK \sim \Delta CBL$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle ABK$ abos trijstūros ir kopīgs, bet $\sphericalangle BCL = \sphericalangle BAK$ pēc pierādītā.



2. uzdevums

Uz trijstūra ABC malām AB un BC ņemti attiecīgi punkti D un E. Dots, ka $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BCD$. Pierādīt, ka trijstūri ABC un BED ir līdzīgi!

1. atrisinājums. Tā kā $\sphericalangle ABC$ ir kopīgs un $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BCD$ pēc dotā, trijstūri ABE un CBD ir līdzīgi pēc pazīmes $\ell\ell$. Tātad šo trijstūru atbilstošās malas ir proporcionālas: $\frac{BD}{BE} = \frac{CB}{AB}$. Taču tagad redzam, ka trijstūri ABC un EBD ir līdzīgi pēc pazīmes $m\ell m$, jo leņķis $\sphericalangle ABC$ ir abiem trijstūriem kopīgs, bet tam piegulošās malas ir proporcionālas: $\frac{BD}{BC} = \frac{BE}{AB}$.

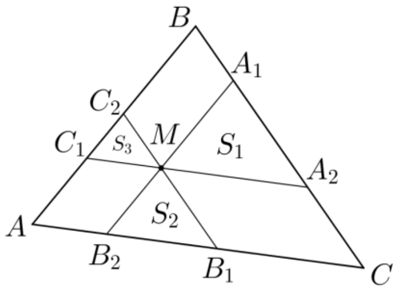


2. atrisinājums. Tā kā $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BCD$, tad četrstūri $ADEC$ var apvilkt riņķa līniju. Tātad četrstūra $ADEC$ pretējo leņķu summa ir $180°$, tas ir, $\sphericalangle ADE + \sphericalangle ACE = 180°$ jeb $\sphericalangle ACE = 180° - \sphericalangle ADE$. Ievērojam, ka $\sphericalangle BDE = 180° - \sphericalangle ADE$ pēc blakusleņķu īpašības. Līdz ar to $\Delta ABC \sim \Delta EBD$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo leņķis $\sphericalangle ABC$ ir abiem trijstūriem kopīgs un $\sphericalangle ACE = \sphericalangle BDE$.

3. uzdevums

Trijstūrī ABC izvēlēts tā iekšējs punkts M. Caur M novilktas taisnes, kas ir paralēlas ABC malām. Šīs taisnes sadala trijstūri sešās daļās; no tām trīs ir trijstūri ar laukumiem S_1, S_2 un S_3. Pierādīt, ka izteiksmes $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$ vērtība nav atkarīga no punkta M izvēles!

Atrisinājums. Pieņemsim, ka caur M novilktās taisnes ir A_1B_2, B_1C_2 un C_1A_2, kur $A_1, A_2 \in BC$, $B_1B_2 \in AC$ un $C_1, C_2 \in AB$. Tad dots, ka $A_1B_2 \parallel AB$, $B_1C_2 \parallel BC$ un $C_1A_2 \parallel AC$. Ar S_1, S_2 un S_3 apzīmēsim attiecīgi trijstūru MA_1A_2, MB_1B_2 un MC_1C_2 laukumus, ar S apzīmēsim ΔABC laukumu.



Ievērosim, ka $\Delta MA_1A_2 \sim \Delta ABC$, jo šo trijstūru malas ir pa pāriem paralēlas. Tātad

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{MA_2}{AC}\right)^2,$$

jo līdzīgu trijstūru laukumu attiecība ir vienāda ar atbilstošo malu attiecības kvadrātu. Secinām, ka

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{MA_2}{AC}.$$

Analoģiski pamato, ka

$$\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{B_1B_2}{AC} \quad \text{un} \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{MC_1}{AC}.$$

Tātad izpildās vienādība

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{MA_2+B_1B_2+MC_1}{AC}.$$

No otras puses, $AC = AB_2 + B_2B_1 + B_1C = MC_1 + B_2B_1 + MA_2$, jo AC_1MB_2 un B_1MA_2C ir paralelogrami (katram no tiem pretējās malas ir pa pāriem paralēlas) un līdz ar to $AB_2 = MC_1$ un $B_1C = MA_2$ kā paralelogramu pretējās malas. Secinām, ka

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = 1,$$

tas ir, izteiksmes $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$ vērtība ir $\sqrt{S}$, kas nav atkarīga no punkta M izvēles.

4. uzdevums

Trijstūra ABC leņķi apmierina vienādību $2\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$. Pierādīt vienādību

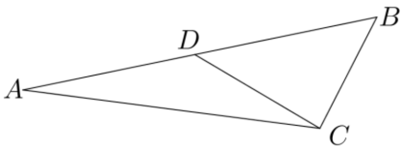
$$AB^2 = AC \cdot AB + BC^2.$$

Atrisinājums. No dotās leņķu vienādības izriet

$$\sphericalangle ACB = \frac{2\sphericalangle ACB}{2} = \frac{2\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB}{2} = \frac{\sphericalangle BAC + 180^\circ}{2} = 90^\circ + \frac{\sphericalangle BAC}{2}.$$

Atliksim punktu D uz malas AB tā, lai $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAC$, tad

$$\sphericalangle DCA = \sphericalangle ACB - \sphericalangle BAC = 90^\circ - \frac{\sphericalangle BAC}{2}$$



Ievērosim, ka arī $\sphericalangle ADC = 180^\circ - \sphericalangle DAC - \sphericalangle DCA = 90^\circ - \frac{\sphericalangle BAC}{2}$. Tātad ΔADC ir vienādsānu un $AD = AC$.
No otras puses $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ pēc pazīmes $\ell\ell$, tā kā $\sphericalangle ABC$ ir kopīgs un $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAC$ pēc konstrukcijas. Līdzīgu trijstūru atbilstošās malas ir proporcionālas, tādēļ

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{CB}.$$

No šejienes izriet $AB \cdot BD = BC^2$ jeb $AB \cdot (AB - AD) = BC^2$. Tā kā $AD = AC$, tad iegūtā vienādība ir ekvivalenta vienādībai $AB^2 = AB \cdot AC + BC^2$, kas arī bija jāpierāda.

Piezīme. Uzdevumu var atrisināt arī izmantojot kosinusu teorēmu, sinusu teorēmu un trigonometriskos pārveidojumus.

5. uzdevums

Dota trapece $ABCD$; uz tās garākā pamata AD atlikts tāds punkts E, ka $AE = CB$. Nogriežņi CA un CE krusto diagonāli BD attiecīgi punktos M un N. Zināms, ka $BM = ND$.

Pierādīt vienādību $BC^2 = DE \cdot DA$.

Atrisinājums. Apzīmējam $BM = ND = a$ un $MN = b$.

Ievērojam, ka $\Delta BMC \sim \Delta DMA$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle AMD = \sphericalangle CMB$ kā krustleņķi un $\sphericalangle CBD = \sphericalangle BDA$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm. Tātad trijstūru malas ir proporcionālas

$$\frac{BC}{AD} = \frac{BM}{MD} = \frac{a}{a+b}.$$

Līdzīgi iegūstam, ka $\Delta DNE \sim \Delta BNC$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle DNE = \sphericalangle BNC$ kā krustleņķi un $\sphericalangle NDE = \sphericalangle CBD$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm. Tātad trijstūru malas ir proporcionālas

$$\frac{ED}{BC} = \frac{ND}{BN} = \frac{a}{a+b}.$$

No abām vienādībām, iegūstam prasīto $\frac{BC}{AD} = \frac{ED}{BC}$ jeb $BC^2 = DE \cdot DA$.