Uzdevumu atrisinājumi

1. Pierādīt, ka $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$ visām reālām x vērtībām!

Atrisinājums. Abas nevienādības puses reizinām ar pozitīvu izteiksmi $2(1+x^4)$ un veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$2x^2 \leq 1 + x^4;$$
$$x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0;$$
$$(x^2-1)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad pēdējā iegūtā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visām reālām x vērtībām.

2. Pierādīt, ka $4x^2 - 12xy + 34y^2 - 10y + 5 > 0$ visām reālām x un y vērtībām!

Atrisinājums. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

$$4x^2 - 12xy + 34y^2 - 10y + 5 = (4x^2 - 12xy + 9y^2) + (25y^2 - 10y + 1) + 4 =$$
$$= (2x-3y)^2 + (5y-1)^2 + 4 > 0,$$

jo $(2x-3y)^2 + (5y-1)^2 \geq 0$ kā reālu skaitļu kvadrātu summa un $4 > 0$.

3. Pierādīt, ka izteiksme $a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2a + 2b - 2c + 1$ ir nenegatīva visām nenegatīvām a, b, c vērtībām!

Atrisinājums. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

$$a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2a + 2b - 2c + 1 =$$
$$= (a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + 2a + 2b - 2c + 1 =$$
$$= (a-b)^2 + (b-c)^2 + 2(b-c) + 1 + 2a =$$
$$= (a-b)^2 + (b-c+1)^2 + 2a \geq 0,$$

jo $(a-b)^2 + (b-c+1)^2 \geq 0$ kā reālu skaitļu kvadrātu summa, bet $a \geq 0$ saskaņā ar doto.

4. Atrast izteiksmes $5x + y + xy - 40\sqrt{xy} - 6\sqrt{x} + 324$ mazāko iespējamo vērtību, ja x un y ir nenegatīvi skaitļi!

Atrisinājums. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

$$5x + y + xy - 40\sqrt{xy} - 6\sqrt{x} + 324 =$$
$$= \left(x - 6\sqrt{x} + 9\right) + \left(4x + y - 4\sqrt{xy}\right) + \left(xy - 36\sqrt{xy} + 324\right) - 9 =$$
$$= \left(\sqrt{x} - 3\right)^2 + \left(2\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + \left(xy - 2 \cdot 18\sqrt{xy} + 324\right) - 9 =$$
$$= \left(\sqrt{x} - 3\right)^2 + \left(2\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{xy} - 18\right)^2 - 9 \geq -9,$$

jo $\left(\sqrt{x} - 3\right)^2 + \left(2\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{xy} - 18\right)^2 \geq 0$ kā reālu skaitļu kvadrātu summa. Vienādība izpildās pie $x = 9$ un $y = 36$. Tātad dotās izteiksmes mazākā iespējamā vērtība ir -9.

5. Pierādīt, ka izteiksmes

$$4c^3 + a^2b + a^2c + 4ab^2 + 4ac^2 + bc^2 - 4ab - 2ac - 4c^2 + a + c - 2abc$$

vērtība ir nenegatīva visām nenegatīvām a, b, c vērtībām!

Atrisinājums. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

$$4c^3 + a^2b + a^2c + 4ab^2 + 4ac^2 + bc^2 - 4ab - 2ac - 4c^2 + a + c - 2abc =$$
$$= (a^2b + 4ab^2 - 4ab + a) + (4c^3 + a^2c + 4ac^2 - 2ac - 4c^2 + c) + (bc^2 - 2abc) =$$
$$= a(4b^2 - 4b + 1 + ab) + b(c^2 - 2ac) + c(4c^2 + a^2 + 4ac - 2a - 4c + 1) =$$
$$= a(2b-1)^2 + b(a^2 + c^2 - 2ac) + c((2c+a)^2 - 2(2c+a) + 1) =$$
$$= a(2b-1)^2 + b(a-c)^2 + c(2c+a-1)^2 \geq 0,$$

jo $(2b-1)^2$, $(a-c)^2$ un $(2c+a-1)^2$ ir nenegatīvi kā reālu skaitļu kvadrāti, savukārt a, b, c ir nenegatīvi saskaņā ar doto.