Uzdevumi un atrisinājumi

1. Doti tādi seši pozitīvi skaitļi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 un a_6, kam

$$a_1 a_4 = a_2 a_3 = a_5 a_6 = 2017.$$

Kāda ir mazākā iespējamā izteiksmes $(a_1 + a_2 + a_3)(a_4 + a_5 + a_6)$ vērtība?

Atrisinājums. Saskaņā ar nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq 3\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \text{ un } a_4 + a_5 + a_6 \geq 3\sqrt[3]{a_4 a_5 a_6}.$$

Tātad

$$(a_1 + a_2 + a_3)(a_4 + a_5 + a_6) \geq 3\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \cdot 3\sqrt[3]{a_4 a_5 a_6} = 9\sqrt[3]{(a_1 a_4)(a_2 a_5)(a_3 a_6)} =$$

$$= 9\sqrt[3]{2017 \cdot 2017 \cdot 2017} = 9 \cdot 2017 = 18153.$$

Vienādība tiek sasniegta, piemēram, ja $a_1 = a_2 = a_3 = 2017$ un $a_4 = a_5 = a_6 = 1$. Tātad dotās izteiksmes mazākā iespējamā vērtība ir 18153.

2. Doti pozitīvi skaitļi x, y, z un t. Pierādīt, ka

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 44xyzt \leq 3(x + y + z + t)(x^3 + y^3 + z^3 + t^3).$$

Atrisinājums. Doto nevienādību var ekvivalenti pārveidot formā

$$44xyzt \leq 3(x + y + z + t)(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) - (x^4 + y^4 + z^4 + t^4).$$

Atverot labajā pusē iekavas, iegūstam tādu 44 saskaitāmo summu, kuru reizinājums ir vienāds ar $(xyzt)^{44}$:

$$3(x + y + z + t)(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) - (x^4 + y^4 + z^4 + t^4) =$$

$$= 2x^4 + 2y^4 + 2z^4 + 2t^4 + 3xy^3 + 3xz^3 + 3xt^3 + 3yx^3 + 3yz^3 +$$

$$+3yt^3 + 3zx^3 + 3zy^3 + 3zt^3 + 3tx^3 + 3ty^3 + 3tz^3$$

(saskaitāmo $2x^4$ uzskatām par divu saskaitāmo x^4 un x^4 summu, bet $3xy^3$ par trīs saskaitāmo summu $xy^3 + xy^3 + xy^3$).
Pielietojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko šiem 44 saskaitāmajiem, iegūstam, ka labās puses izteiksmes vērtība ir vismaz $44\sqrt[44]{(xyzt)^{44}} = 44xyzt$, kas arī bija jāpierāda.

3. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem x, y un z izpildās nevienādība

$$\frac{1}{x + xy} + \frac{1}{y + yz} + \frac{1}{z + zx} \geq \frac{3}{1 + xyz}.$$

Atrisinājums. Ekvivalenti pārveidojam doto nevienādību, reizinot abas puses ar pozitīvu skaitli $1 + xyz$ un tad abām pusēm pieskaitot 3. Iegūstam nevienādību

$$\frac{1 + xyz}{x + xy} + 1 + \frac{1 + xyz}{y + yz} + 1 + \frac{1 + xyz}{z + zx} + 1 \geq 6$$

jeb, ekvivalenti,

$$\frac{1 + x + xy + xyz}{x + xy} + \frac{1 + y + yz + xyz}{y + yz} + \frac{1 + z + zx + xyz}{z + zx} \geq 6.$$

Ievērosim, ka var pārveidot nevienādības kreisās puses izteiksmi:

$$\frac{1 + x}{x(1 + y)} + \frac{y(1 + z)}{1 + y} + \frac{1 + y}{y(1 + z)} + \frac{z(1 + x)}{1 + z} + \frac{1 + z}{z(1 + x)} + \frac{x(1 + y)}{1 + x} \geq 6.$$

Tagad kreisajā pusē ir seši saskaitāmie, kuru vidējais ģeometriskais ir $\sqrt[6]{1} = 1$. Pēc nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam, ka nevienādības kreisās puses izteiksmes vērtība ir vismaz 6, kas arī bija jāpierāda.

4. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļi a, b un c izpildās nevienādība

$$1 \geq \frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}}.$$

Atrisinājums. Vispirms pamatosim, ka $\sqrt{(a+b)(a+c)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{ac}$. Lai to pierādītu, kāpinām abas nevienādības puses kvadrātā, iegūstot $(a+b)(a+c) \geq ab+ac+2a\sqrt{bc}$ jeb, ekvivalenti, $a^2+bc \geq 2a\sqrt{bc}$. Taču šī nevienādība izriet no nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, tātad arī tai ekvivalentā nevienādība $\sqrt{(a+b)(a+c)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{ac}$ ir patiesa.
Veicot līdzīgus novērtējumus, iegūstam, ka dotās nevienādības labo pusi varam novērtēt šādi:

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq$$

$$\leq \frac{a}{a+\sqrt{ab}+\sqrt{ac}} + \frac{b}{b+\sqrt{ba}+\sqrt{bc}} + \frac{c}{c+\sqrt{cb}+\sqrt{ca}} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})} + \frac{b}{\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{c})} + \frac{c}{\sqrt{c}(\sqrt{c}+\sqrt{b}+\sqrt{a})} =$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = 1,$$

kas arī bija jāpierāda.

5. Pieņemsim, ka a, b un c ir pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$\frac{1}{(a+1)^2+(b+1)^2-2b} + \frac{1}{(b+1)^2+(c+1)^2-2c} + \frac{1}{(c+1)^2+(a+1)^2-2a} \leq \frac{1}{2}.$$

Atrisinājums. Ievērosim, ka saskaņā ar nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko

$$(a+1)^2+(b+1)^2 \geq 2(a+1)(b+1) = 2ab+2a+2b+2.$$

Tas nozīmē, ka pirmo saskaitāmo var novērtēt kā

$$\frac{1}{(a+1)^2+(b+1)^2-2b} \leq \frac{1}{2ab+2a+2b+2-2b} = \frac{1}{2ab+2a+2}.$$

Līdzīgi novērtējot pārējos saskaitāmos, iegūstam, ka pierādāmās nevienādības kreisā puse apmierina

$$\frac{1}{(a+1)^2+(b+1)^2-2b} + \frac{1}{(b+1)^2+(c+1)^2-2c} + \frac{1}{(c+1)^2+(a+1)^2-2a} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+bc}\right).$$

Apzīmējam $S = \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+bc}$. Pamatosim, ka $S = 1$, tas arī pierādīs prasīto nevienādību.
Tā kā $abc = 1$, tad eksistē tādi pozitīvi skaitļi x, y, z, ka $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$ un $c = \frac{z}{x}$. Līdz ar to pirmo S saskaitāmo var pārrakstīt kā

$$\frac{1}{1+a+ab} = \frac{1}{1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}} = \frac{yz}{yz+zx+xy}.$$

Līdz ar to iegūstam, ka

$$S = \frac{yz}{yz+zx+xy} + \frac{xz}{yz+zx+xy} + \frac{xy}{yz+zx+xy} = 1.$$