NNV 15/16 4. nodarbība

4-1. Ar V_n apzīmēsim veidu skaitu, kā no A_1 nokļūt pilsētā A_n, $n = 2, 3, \ldots, 15$. Acīmredzami, ka $V_2 = 1$, $V_3 = 2$.

Vispārīgi, katram $n \geq 3$ pilsētā A_n var nokļūt vai nu pa ceļu no pilsētas A_{n-2}, vai pa ceļu no pilsētas A_{n-1}. Tātad dažādo veidu skaitu, kā nokļūt A_n, var atrast, saskaitot veidus, kā nokļūt pilsētās A_{n-2} un A_{n-1}, t.i.,

$$V_n = V_{n-1} + V_{n-2}.$$

Izmantojot atrasto rekurences sakarību, var aprēķināt V_{15}:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
V_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Tātad ir 610 veidi, kā no A_1 nokļūt pilsētā A_{15}.

Piezīme. Var ievērot, ka $V_n = F_n$ ir Fibonači virknes n-tais loceklis.

4-2. Doto rekurences sakarību var pierakstīt formā

$$a_{n+2} = -4a_{n+1} + 21a_n.$$

Rekurences sakarības raksturīgais vienādojums ir

$$t^2 + 4t - 21 = 0,$$

tā saknes ir $t_1 = -7$ un $t_2 = 3$. Tātad eksistē tādas konstantes C_1 un C_2, ka visiem n izpildās

$$a_n = C_1 \cdot (-7)^n + C_2 \cdot 3^n.$$

Izmantojot sākuma nosacījumus $a_0 = 5$, $a_2 = -3$, iegūstam lineāru vienādojumu sistēmu attiecībā pret konstantēm C_1 un C_2:

$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2 \\ -3 = -7C_1 + 3C_2. \end{cases}$$

Atrisinot šo sistēmu, iegūstam $C_1 = \frac{9}{5}$, $C_2 = \frac{16}{5}$. Tātad

$$a_n = \frac{9 \cdot (-7)^n + 16 \cdot 3^n}{5}, \quad \text{visiem } n \geq 0.$$

Līdz ar to

$$a_{2016} = \frac{9 \cdot (-7)^{2016} + 16 \cdot 3^{2016}}{5}.$$

4-3. Ar f_n apzīmēsim virkņu ar vajadzīgo īpašību garumā n skaitu. Jebkurai virknei garumā n var pierakstīt sākumā jebkuru no cipariem 1, 2, 3, 4 (šādā veidā iegūstam $4f_{n-1}$ virknes), taču no iegūtajām virknēm ir jāizslēdz tās, kas sākas ar 'aizliegto' fragmentu '123'.

Visas izslēdzamās virknes sākas ar '123', taču nesatur šo fragmentu nekur citur, tāpēc šādu virkņu ir tikpat daudz, cik virkņu garumā $n-3$, kas nesatur fragmentu '123', t.i., f_{n-3}.

Līdz ar to secinām, ka f_n apmierina rekurences sakarību

$$f_n = 4f_{n-1} - f_{n-3}, \quad \text{visiem } n \geq 4.$$

Viegli pārbaudīt, ka $f_1 = 4$, $f_2 = 4^2 = 16$ un $f_3 = 4^3 - 1 = 63$. Nākamos locekļus varam aprēķināt, izmantojot rekursīvo sakarību:

n	1	2	3	4	5	6	7
f_n	4	16	63	248	976	3841	15116

Tātad ir 15116 virknes garumā 7 ar vajadzīgo īpašību.

4-4. Acīmredzami, ka $a_1 = 9$, $a_2 = 9 \cdot 8 = 72$.

Aplūkosim, kāds var būt šādas virknes priekšpēdējais ($n-1$-ais) loceklis. Ir divi iespējamie gadījumi:

- Priekšpēdējais loceklis ir cipars; tad sākotnējā virkne ir iegūstama, pareizai virknei garumā $n-1$ (tādu var izvēlēties a_{n-1} veidos) pierakstot beigās ciparu (to var izvēlēties 8 veidos, jo šis cipars nedrīkst sakrist ar priekšpēdējo virknes locekli); tātad šādu virkni var sastādīt $8a_{n-1}$ veidos.
- Priekšpēdējais loceklis ir simbols; tad virknes $n-2$-ais loceklis noteikti ir cipars un pirmie $n-2$ virknes locekļi veido pareizu virkni garumā $n-2$ (tādu var izvēlēties a_{n-2}) veidos, kurai galā pierakstīts simbols (to var izvēlēties 4 veidos) un cipars (to var izvēlēties 9 veidos). Līdz ar to šādu virkni var sastādīt $9 \cdot 4 \cdot a_{n-2} = 36a_{n-2}$ veidos.

No summas likuma izriet, ka

$$a_n = 8a_{n-1} + 36a_{n-2}.$$

Nākamos locekļus varam aprēķināt, izmantojot rekurences sakarību:

n	1	2	3	4	5
a_n	9	72	900	9792	110736

Tātad ir 110736 pareizas virknes garumā 5.

Lai atrastu virknes $(a_n)_{n\geq 1}$ vispārīgo locekli, atrod virknes raksturīgā vienādojuma $t^2 - 8t - 36 = 0$ saknes $t_1 = 4 - 2\sqrt{13}$ un $t_2 = 4 + 2\sqrt{13}$. Tātad eksistē tādas konstantes C_1 un C_2, ka visiem n izpildās

$$a_n = C_1 \left(4 - 2\sqrt{13}\right)^n + C_2 \left(4 + 2\sqrt{13}\right)^n.$$

Izmantojot sākuma nosacījumus $a_1 = 9$, $a_2 = 72$, iegūstam lineāru vienādojumu sistēmu pret konstantēm C_1 un C_2:

$$\begin{cases} 9 = C_1 \left(4 - 2\sqrt{13}\right) + C_2 \left(4 + 2\sqrt{13}\right) \\ 72 = C_1 \left(68 - 16\sqrt{13}\right) + C_2 \left(68 + 16\sqrt{13}\right). \end{cases}$$

Atrisinot šo sistēmu, iegūstam $C_1 = -\frac{9\sqrt{13}}{52}$, $C_2 = \frac{9\sqrt{13}}{52}$. Tātad

$$a_n = \frac{9\sqrt{13}}{52} \cdot \left(\left(4 + 2\sqrt{13}\right)^n - \left(4 - 2\sqrt{13}\right)^n\right), \quad \text{visiem } n \geq 1.$$

Piezīme. Ekvivalenti šo izteiksmi var pierakstīt kā

$$a_n = \frac{9}{4\sqrt{13}} \cdot \left(\left(4 + 2\sqrt{13}\right)^n - \left(4 - 2\sqrt{13}\right)^n\right), \quad \text{visiem } n \geq 1.$$

4-5. Pieņemsim, ka x ir fiksēts reāls skaitlis; tad ar rekurences sakarību

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x^4 + x^2)P_{n-1}(x)$$

ir definēta rekurenta skaitļu virkne. Šīs virknes raksturīgais vienādojums ir kvadrātvienādojums

$$t^2 - t - (x^4 + x^2) = 0,$$

tā saknes ir

$$t_1 = -x^2 \quad \text{un } t_2 = x^2 + 1.$$

Tās ir dažādas (viena no tām ir pozitīva, otra – negatīva vai 0), tātad eksistē tādas konstantes C_1 un C_2 (kuras var būt atkarīgas no fiksētās x vērtības, bet ne no n), ka $P_n(x)$ var izteikt formā

$$P_n(x) = C_1(-x^2)^n + C_2(x^2+1)^n.$$

Izmantojot sākuma nosacījumus $P_0(x) = 0$, $P_1(x) = 1$, iegūstam, ka

$$C_2 = -C_1 = \frac{1}{2x^2+1},$$

tātad

$$P_n(x) = \frac{(x^2+1)^n - (-x^2)^n}{2x^2+1}.$$

NNV 15/16 4. nodarbība

Gadījumā, kad $n = 100$, iegūstam

$$P_{100}(x) = \frac{(x^2+1)^{100} - x^{200}}{2x^2+1} \quad \text{jeb} \quad (2x^2+1)P_{100}(x) = (x^2+1)^{100} - x^{200}.$$

Ja $x = \sqrt{k}$, kur $k \geq 0$ ir vesels skaitlis, tad

$$(2k+1) \cdot P_{100}(\sqrt{k}) = (k+1)^{100} - k^{100}.$$

Līdz ar to meklētā summa ir vienāda ar

$$\left(1^{100} - 0^{100}\right) + \left(2^{100} - 1^{100}\right) + \left(3^{100} - 2^{100}\right) + \ldots + \left(2016^{100} - 2015^{100}\right) = 2016^{100}.$$