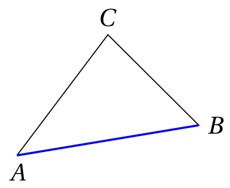
NNV 14/15 1. nodarbība

1-1. Aplūkosim divus gadījumus:

a) Izvēlētais pretējās malas punkts vienlaikus ir arī trīsstūra virsotne:

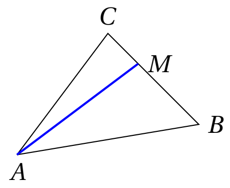


Šajā gadījumā jāpierāda nevienādība $AB < \frac{1}{2}\mathrm{P}(ABC) = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$. No trīsstūra nevienādības seko, ka

$$AB < BC + CA.$$

Pieskaitot šīs nevienādības abām pusēm AB, iegūstam $2AB < AB + BC + CA$. Dalot iegūto nevienādību ar 2, iegūst pierādāmo nevienādību.

b) Uz pretējās malas izvēlēts tās iekšējs punkts M.



Šajā gadījumā jāpierāda nevienādība $AM < \dfrac{1}{2}(AB + BC + CA)$. No trīsstūra nevienādības ΔABM seko, ka

$$AM < AB + BM. \tag{1}$$

No trīsstūra nevienādības ΔACM seko, ka

$$AM < AC + CM. \tag{2}$$

Saskaitot nevienādības (1) un (2), iegūstam nevienādību

$$2AM < AB + BM + CM + AC = AB + BC + AC,$$

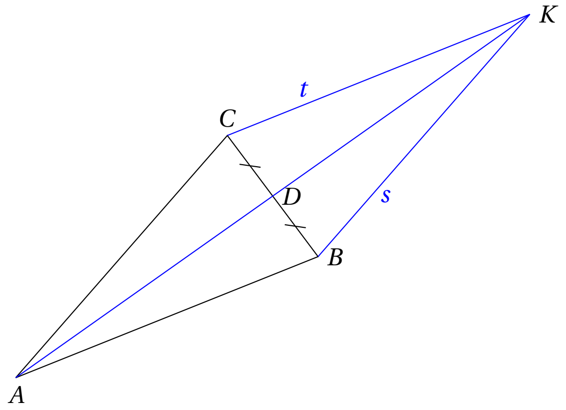
jo $BM + CM = AC$. Dalot iegūtās nevienādības abas puses ar 2, iegūst vajadzīgo nevienādību:

$$AM < \frac{1}{2}(AB + BC + CA).$$

1-2. Pieņemsim, ka trīsstūrī ABC punkts D ir malas BC viduspunkts un AD ir mediāna, tad jāpierāda, ka

$$AD < \frac{1}{2}(AB + AC).$$

Caur C novelk taisni $t \parallel AB$ un caur B novelk $s \parallel AC$; taišņu s un t krustpunktu apzīmē ar K.



NNV 14/15 1. nodarbība

Četrstūris $ABKC$ ir paralelograms, jo tā malas ir pa pāriem paralēlas. Paralelograma diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm, kas nozīmē, ka AK iet caur BC viduspunktu D, turklāt $AK = 2AD$.

No trīsstūra nevienādības ΔACK izriet, ka

$$AK < AC + CK.$$

Tā kā $AK = 2AD$ un $CK = AB$ (kā pretējās paralelograma malas), iegūstam

$$2AD < AB + AC,$$

jeb, ekvivalenti,

$$AD < \frac{AB + AC}{2},$$

kas arī bija jāpierāda.

1-3. Apzīmēsim trešās malas garumu ar a, tad trīsstūra malu garumi (centimetros) ir 7, 13 un a.

No trīsstūra nevienādības izriet, ka

$$a + 7 > 13 \quad \text{un} \quad 7 + 13 > a.$$

Tātad $6 < a < 20$. Tā kā a ir naturāls skaitlis, tas nozīmē, ka $7 \le a \le 19$. Vienīgie pirmskaitļi, kas atrodas šajā intervālā, ir 7, 11, 13, 17 un 19.

Pārbaudīsim, kādos gadījumos trīsstūra perimetrs P ir pirmskaitlis:

- ja $a = 7$, tad $P = 7 + 7 + 13 = 27 = 3 \cdot 9$ nav pirmskaitlis;
- ja $a = 11$, tad $P = 7 + 11 + 13 = 31$ **ir pirmskaitlis**;
- ja $a = 13$, tad $P = 7 + 13 + 13 = 33 = 3 \cdot 11$ nav pirmskaitlis;
- ja $a = 17$, tad $P = 7 + 13 + 17 = 37$ **ir pirmskaitlis**;
- ja $a = 19$, tad $P = 7 + 13 + 19 = 39 = 3 \cdot 13$ nav pirmskaitlis.

Tātad pieļaujamās a vērtības ir 11 un 17. Pārbaude liecina, ka tās abas der:

- ja $a = 11$, tad izpildās trīsstūra nevienādības:

  $$7 + 11 > 13, \quad 7 + 13 > 11, \quad 13 + 11 > 7,$$

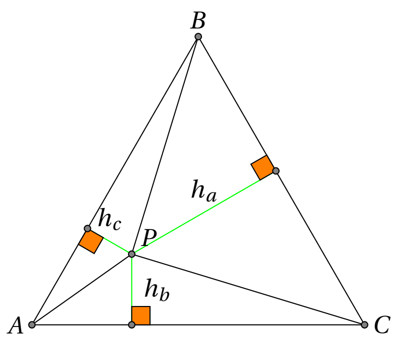
  tātad eksistē trīsstūris ar šādiem malu garumiem (piezīme: faktiski pietiek tikai pārbaudīt, vai divu īsāko malu garumu summa lielāka nekā garākā mala, t.i., vai $7 + 11 > 13$);
- ja $a = 17$, arī tad izpildās trīsstūra nevienādības:

  $$7 + 13 > 17, \quad 7 + 17 > 13, \quad 13 + 17 > 7,$$

  tātad eksistē trīsstūris ar šādiem malu garumiem (pietiek tikai pārbaudīt, vai $7 + 13 > 17$).

Līdz ar to esam ieguvuši, ka trešās malas garums var būt 11 vai 17 centimetri.

1-4. Trīsstūru ABP, BCP, CAP laukumu summa ir vienāda ar ΔABC laukumu S.



No otras puses,

$$S(ABP) = \frac{1}{2}\,AB \cdot h_c = \frac{1}{2}h_c;$$
$$S(BCP) = \frac{1}{2}\,BC \cdot h_a = \frac{1}{2}h_a;$$
$$S(CAP) = \frac{1}{2}\,CA \cdot h_b = \frac{1}{2}h_b.$$

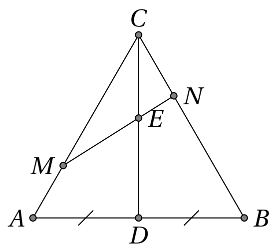
Saskaitām iegūtās vienādības:

$$S(ABP) + S(BCP) + S(CAP) = \frac{1}{2}h_c + \frac{1}{2}h_a + \frac{1}{2}h_b;$$
$$h_a + h_b + h_c = 2\,(S(ABP) + S(BCP) + S(CAP)) = 2S(ABC) = 2S.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka

$$h_a + h_b + h_c = 2S.$$

1-5.



Tā kā no dotā izriet, ka ΔABC ir vienādsānu trīsstūris ar pamatu AB, tad mediāna CD ir vienlaikus arī augstums un bisektrise. Tātad $\sphericalangle MCE = \sphericalangle ECN$.

Apzīmēsim trīsstūra ABC malas $AC = CB$ garumu ar $21x$, kur $x > 0$. Tad, tā kā $CM : CA = 5 : 7$, tad

$$CM = \frac{5}{7}AC = \frac{5}{7} \cdot 21x = 15x.$$

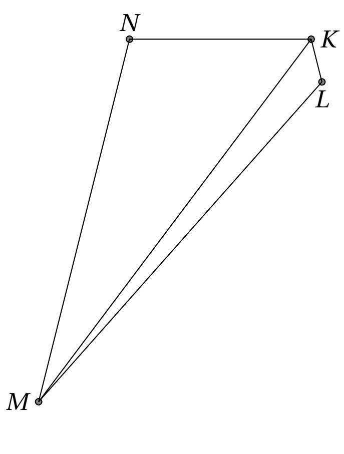
No otras puses, tā kā $CN : CB = 1 : 3$, tad

$$CN = \frac{1}{3}CB = \frac{1}{3} \cdot 21x = 7x.$$

Aplūkojam trīsstūri MCN. Tā kā CE šajā trīsstūrī ir bisektrise, tad tā dala pretējo malu attiecībā, kas vienāda ar atbilstošo malu attiecību:

$$\frac{ME}{EN} = \frac{MC}{CN} = \frac{15x}{7x} = \frac{15}{7}.$$

1-6. No dotā seko, ka $\sphericalangle MNK = \sphericalangle NKL > \sphericalangle NKM$.



NNV 14/15 1. nodarbība

Trīsstūrī MNK pret garāko malu atrodas lielākais leņķis, tādēļ secinām, ka $MK > MN = 17$.

No trīsstūra nevienādības ΔMKL izriet, ka

$$ML + KL > MK,$$

tātad $ML > MK - KL = MK - 2$. Tā kā ieguvām, ka $MK > 17$, tad seko, ka

$$ML > 17 - 2 = 15,$$

kas arī bija jāpierāda.

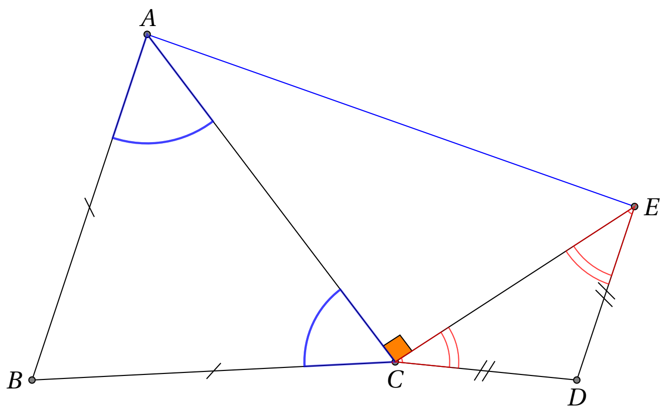
1-7.

1. risinājums

Vajadzīgais būs pierādīts, ja izdosies parādīt, ka $\sphericalangle BCD = 180°$. Tā kā

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle BCA + \sphericalangle ACE + \sphericalangle ECD = \sphericalangle BCA + \sphericalangle ECD + 90°,$$

jo dots, ka $AC \perp CE$ (līdz ar ko $\sphericalangle ACE = 90°$), tad nepieciešams parādīt, ka $\sphericalangle BCA + \sphericalangle ECD = 90°$.



Novilksim nogriezni AE. Tad, tā kā $AB \parallel ED$, izpildās vienādība

$$\sphericalangle BAE + \sphericalangle AED = 180°, \tag{3}$$

jo iekšējo vienpusleņķu summa pie paralēlām taisnēm ir 180°. Ievērojot, ka $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAE$ un $\sphericalangle AED = \sphericalangle AEC + \sphericalangle CED$, vienādību (3) var pārrakstīt kā

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle CAE + \sphericalangle AEC + \sphericalangle CED = 180°. \tag{4}$$

Tā kā ΔABC un ΔCDE ir vienādsānu trīsstūri ar pamatiem AC un CE, tad pamatu pieleņķi ir vienādi, tātad $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB$ un $\sphericalangle CED = \sphericalangle ECD$. Izmantojot šīs vienādības, (4) varam pārrakstīt kā

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle CAE + \sphericalangle AEC + \sphericalangle ECD = 180°. \tag{5}$$

Tā kā no dotā izriet, ka ΔACE ir taisnleņķa trīsstūris ar $\sphericalangle ACE = 90°$, tad tā šauro leņķu summa arī ir 90°: $\sphericalangle CAE + \sphericalangle AEC = 90°$. Līdz ar to (5) varam varam vienkāršot par vienādību

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle ECD = 90°. \tag{6}$$

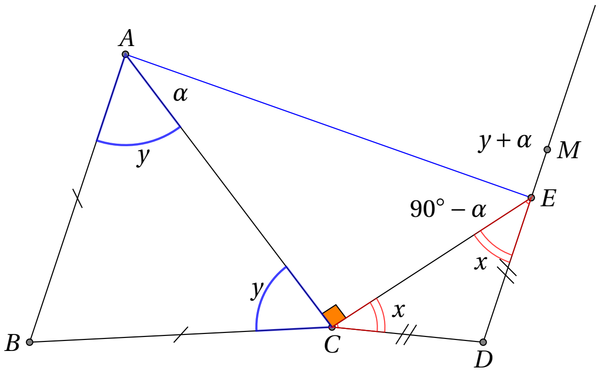
Tagad redzam, ka

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACB + \sphericalangle ACE + \sphericalangle ECD = (\sphericalangle ACB + \sphericalangle ECD) + 90° = 90° + 90° = 180°,$$

tātad punkts C atrodas uz taisnes BD.

NNV 14/15 1. nodarbība

2. risinājums



Apzīmē $\sphericalangle DEC = \sphericalangle ECD = x$ un $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = y$ kā leņķi vienādsānu trīsstūros pie pamata.

Tā kā pēc dotā $AC \perp EC$, tad $\sphericalangle ACE = 90°$.

Lai pierādītu, ka $C \in BD$, nepieciešams pierādīt, ka $\sphericalangle BCA + \sphericalangle ACE + \sphericalangle ECD = 180°$ jeb $x + y = 90°$.

Novelkam AE. Apzīmējam $\sphericalangle CAE = \alpha$, tad $\sphericalangle CEA = 90° - \alpha$.

Tā kā $AB \parallel ED$, tad (iekšējie šķērsleņķi)

$$\sphericalangle AEM = \sphericalangle BAE = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAE = \gamma + \alpha.$$

Punkti D, E, M atrodas uz vienas taisnes, tāpēc

$$\begin{aligned}&\sphericalangle DEC + \sphericalangle CEA + \sphericalangle AEM = 180°;\\&x + 90° - \alpha + y + \alpha = 180°;\\&x + y = 90°,\end{aligned}$$

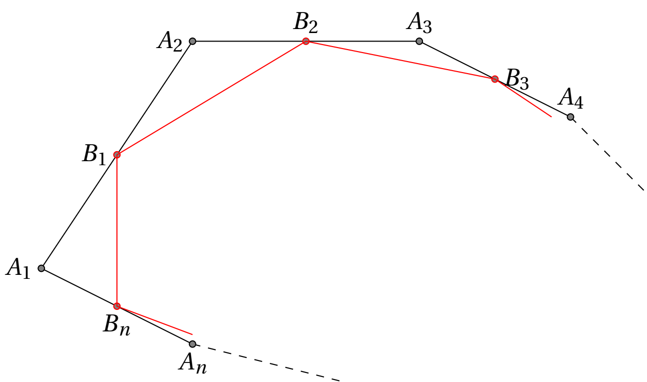
kas arī bija jāpierāda.

1-8. Pierādīsim šādus apgalvojumus, ja dots izliekts n-stūris $A_1A_2 \dots A_n$, $n \geq 4$, un B_1, B_2, …, B_n ir attiecīgi malu A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 viduspunkti:

a) $P(B_1B_2 \dots B_n) < P(A_1A_2 \dots A_n)$;

b) $P(B_1B_2 \dots B_n) > 0.5P(A_1A_2 \dots A_n)$.

Acīmredzami, ka tādā gadījumā, ņemot $n = 2014$, būs pierādīts vajadzīgais.



a) No trīsstūra nevienādības trīsstūrī $A_2B_2B_1$ iegūstam

$$B_1B_2 < B_1A_2 + A_2B_2.$$

Līdzīgi no $\Delta A_3B_3B_2$ iegūstam

$$B_2B_3 < B_2A_3 + A_3B_3.$$

Analoģiski turpinot, katram $j = 1,2,3,\dots,n-1$ no $\Delta A_{j+1}B_{j+1}B_j$ iegūstam nevienādības

$$B_jB_{j+1} < B_jA_{j+1} + A_{j+1}B_{j+1}.$$

Visbeidzot, no $\Delta A_1B_1B_n$ iegūstam nevienādības

$$B_nB_1 < B_nA_1 + A_1B_1.$$

Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam

$$B_1B_2 + B_2B_3 + \ldots + B_{n-1}B_n + B_nB_1 < B_1A_2 + A_2B_2 + B_2A_3 + A_3B_3 + \ldots + B_{n-1}A_n + A_nB_n + B_nA_1 + A_1B_1.$$

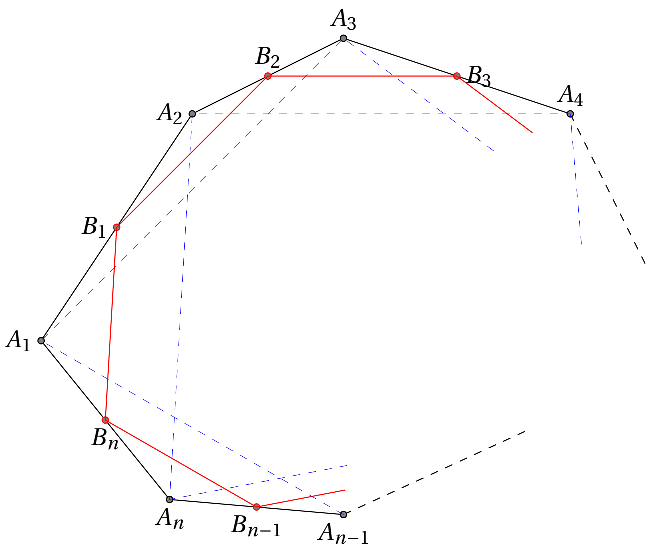
Skaidrs, ka kreisās puses izteiksme ir vienāda ar $\mathrm{P}(B_1B_2\ldots B_n)$. Savukārt labās puses izteiksmi pārveidojam kā (pārgrupējot saskaitāmos)

$$(A_1B_1 + B_1A_2) + (A_2B_2 + B_2A_3) + \ldots + (A_nB_n + B_nA_1) = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1 = \mathrm{P}(A_1\ldots A_n).$$

Tātad pierādīta vajadzīgā nevienādība

$$\mathrm{P}(B_1B_2\ldots B_n) < \mathrm{P}(A_1\ldots A_n).$$

b) Novilksim diagonāles A_1A_3, A_2A_4, $\ldots$, A_jA_{j+2}, $\ldots$, $A_{n-2}A_n$, $A_{n-1}A_1$ un A_nA_2 (1. attēls).



1. att.

B_1B_2 ir trīsstūra $A_2A_1A_3$ viduslīnija, tādēļ

$$B_1B_2 = \frac{1}{2}A_1A_3.$$

B_2B_3 ir trīsstūra $A_3A_2A_4$ viduslīnija, tādēļ

$$B_2B_3 = \frac{1}{2}A_2A_4.$$

Analoģiski, katram $j = 1,2,\dots,n-2$, nogrieznis B_jB_{j+1} ir trīsstūra $A_{j+1}A_jA_{j+2}$ viduslīnija, tādēļ

$$B_jB_{j+1} = \frac{1}{2}A_jA_{j+2}.$$

Visbeidzot, no $\Delta A_nA_{n-1}A_1$ un $\Delta A_1A_2A_n$ seko, ka

$$B_{n-1}B_n = \frac{1}{2}A_{n-1}A_1, \quad B_nB_1 = \frac{1}{2}A_nA_2.$$

Saskaitot iegūtās vienādības, secinām, ka $\mathrm{P}(B_1B_2\ldots B_n)$ ir viena puse no n novilkto diagonāļu garumu summas:

$$\mathrm{P}(B_1B_2\ldots B_n) = \frac{1}{2}\left(A_1A_3 + A_2A_4 + A_3A_5 + \ldots + A_{n-1}A_1 + A_nA_2\right). \tag{7}$$

Taču skaidrs, ka novilkto diagonāļu garumu summa ir mazāka par iezīmēto (2. attēls) nogriežņu garumu summu, kas savukārt ir lielāka par daudzstūra $A_1A_2\ldots A_n$ perimetru:

- ar C_1 apzīmē A_nA_2 un A_1A_3 krustpunktu;
- ar C_2 apzīmē A_1A_3 un A_2A_4 krustpunktu;
- ar C_3 apzīmē A_2A_4 un A_3A_5 krustpunktu;
- ...
- ar C_{n-1} apzīmē $A_{n-2}A_n$ un $A_{n-1}A_1$ krustpunktu;
- ar C_n apzīmē $A_{n-1}A_1$ un A_nA_2 krustpunktu.

(piezīme: ja $n = 4$, tad visi punkti C_1, C_2, C_3 un C_4 sakrīt).

Tad, izmantojot trīsstūra nevienādību,

- no $\Delta A_1A_2C_1$ seko $A_1C_1 + C_1A_2 > A_1A_2$;
- no $\Delta A_2A_3C_2$ seko $A_2C_2 + C_2A_3 > A_2A_3$;
- ...
- no $\Delta A_nA_1C_n$ seko $A_nC_n + C_nA_1 > A_nA_1$.

Saskaitot iegūtās nevienādības, secinām, ka

$$A_1C_1 + C_1A_2 + A_2C_2 + C_2A_3 + \ldots + A_nC_n + C_nA_1 > \mathrm{P}(A_1A_2 \ldots A_n). \tag{8}$$

Tā kā

- $A_1C_1 + C_2A_3 \le A_1C_1 + C_2A_3 + C_1C_2 = A_1A_3$ (iespējama situācija (piem., ja $n = 4$), ka $C_1C_2 = 0$);
- $A_2C_2 + C_3A_4 \le A_2A_4$;
- $A_3C_4 + C_4A_5 \le A_3A_5$;
- ...
- $A_nC_n + C_1A_2 \le A_nA_2$.

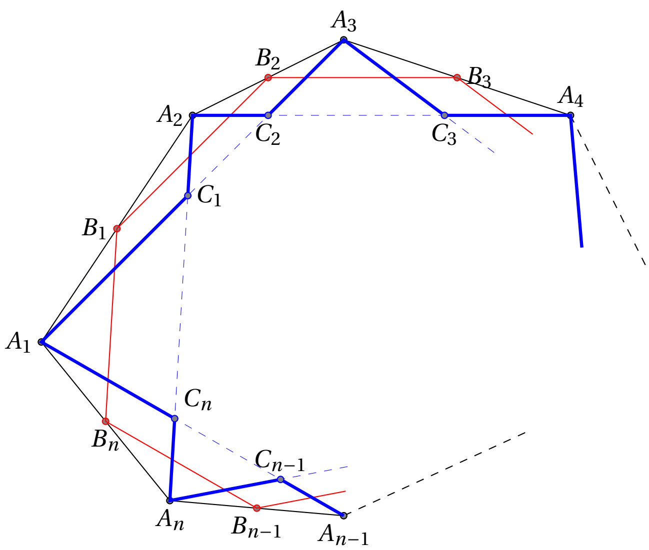
Saskaitot šīs nevienādības, secinām, ka (8) kreisā puse ir mazāka vai vienāda nekā summa $A_1A_3 + A_2A_4 + \ldots + A_nA_2$, līdz ar to

$$A_1A_3 + A_2A_4 + A_3A_5 + \ldots + A_nA_2 > \mathrm{P}(A_1A_2 \ldots A_n).$$

No (7) tad seko, ka

$$\mathrm{P}(B_1B_2 \ldots B_n) > \frac{1}{2}\mathrm{P}(A_1A_2 \ldots A_n),$$

kas arī bija jāpierāda.



2. att.