Trīsstūri

1. Trīsstūra nevienādības

Lauzta līnija ir figūra, kas sastāv no vairākiem nogriežņiem. Katriem diviem secīgiem nogriežņiem ir tieši viens kopējs punkts (abu nogriežņu galapunkts), turklāt, vispārīgi runājot, šie nogriežņi neatrodas uz vienas taisnes. Par lauztas līnijas **posmiem** sauc nogriežņus, no kurām lauztā līnija sastāv, bet posmu galapunktus – par lauztās līnijas **virsotnēm**. Visu lauztas līnijas posu garumu summu sauc par šīs **lauztās līnijas garumu**.

Acīmredzami, ka ir spēkā šāds apgalvojums:

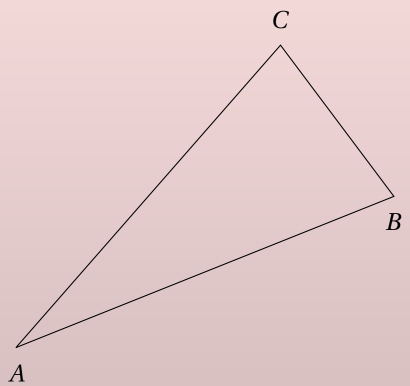
Lauztas līnijas garums

Lauztas līnijas garums ir lielāks nekā attālums starp tās galapunktiem.

Kā speciālgadījums šim apgalvojumam iegūstamas t.s. trīsstūra nevienādības:

Trīsstūra nevienādības

1. Trīsstūra katras malas garums ir mazāks nekā abu pārējo malu garumu summa;
2. Trīsstūra katras malas garums ir lielāks nekā abu pārējo malu garumu starpība.



$$AB < AC + CB$$
$$AC < AB + BC$$
$$BC < BC + CA$$

$$AB > |AC - CB|$$
$$AC > |AB - BC|$$
$$BC > |BC - CA|$$

Pierādījums. Tas, ka $AB < AC + CB$, izriet no apgalvojuma par lauztas līnijas garumu: lauztās līnijas, kas sastāv no nogriežņiem AC un CB, garums (kas ir šo nogriežņu garumu summa $AC + CB$) ir mazāks nekā nogriežņa, kas savieno lauztās līnijas galapunktus (nogrieznis AB), garums.

Analoģiski var pamatot nevienādības $AC < AB + BC$ un $BC < BC + CA$.

Savukārt pārējās trīs nevienādības izriet no nupat iegūtajām: piemēram, nevienādība $AB > |AC - CB|$ ir ekvivalenta apgalvojumam, ka abas nevienādības

$$AB > (AC - CB) \tag{1}$$

un

$$AB > -(AC - CB) \tag{2}$$

ir patiesas. Taču (1) ir ekvivalenta nevienādībai $AB + CB > AC$, kas ir viena no pirmajām trim nevienādībām; un (2) ir ekvivalenta nevienādībai $AB + CB > AC$, kas arī ir viena no jau pamatotajām nevienādībām. Tātad nevienādība $AB > |AC - CB|$ ir patiesa. Līdzīgi parāda, ka arī pārējās nevienādības ir patiesas. □

Var jautāt, kas notiek tad, ja doti trīs pozitīvi skaitļi a, b, c, kas apmierina trīsstūra nevienādības – vai no tā izriet, ka noteikti eksistē trīsstūris ar šādiem malu garumiem? Izrādās, ka atbilde ir apstiprinoša:

Trīsstūra ar dotiem malu garumiem eksistence

Ja a, b un c ir pozitīvi skaitļi, kas apmierina nevienādības $a < b + c$, $b < a + c$ un $c < a + b$, tad eksistē trīsstūris, kura malu garumi ir a, b un c.

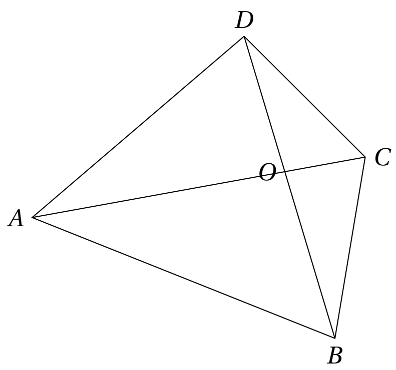
Pierādījumu skat. nodaļā ”Pierādījumi”.

Trīsstūra malu garumiem izpildās vēl cita svarīga īpašība:

Trīsstūrī pret garāko malu atrodas lielākais leņķis.

1. piemērs. Pierādīt četrstūra nevienādību: izliekta četrstūra diagonāļu garumu summa ir lielāka nekā jebkuru divu pretējo malu garumu summa.

Risinājums. Patvaļīgā izliektā četrstūrī $ABCD$ jāpierāda nevienādību $AB + CD < AC + BD$.



Tā kā četrstūris ir izliekts, tā diagonāles krustojas; apzīmēsim diagonāļu krustpunktu ar O.

- Trīsstūrī AOB no trīsstūra nevienādības seko
$$AB < AO + OB. \tag{3}$$
- Trīsstūrī DOC no trīsstūra nevienādības seko
$$CD < DO + OC. \tag{4}$$

Saskaitot nevienādības (3) un (4), iegūstam

$$AB + CD < AO + OB + DO + OC.$$

Tā kā $AO + OC = AC$, $DO + OB = BD$, esam pamatojuši nevienādību

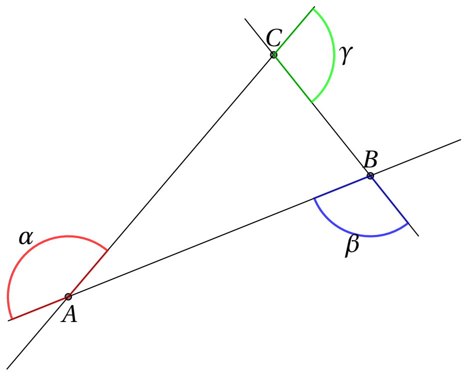
$$AB + CD < AC + BD,$$

kas bija jāpierāda.

2. Ārējais leņķis

Par izliekta daudzstūra **ārējo leņķi** sauc iekšējā leņķa blakusleņķi. Izliektam daudzstūrim pie katras virsotnes ir divi ārējie leņķi.

Piemēram, 1. zīmējumā iezīmēts ΔABC ārējais leņķis α, ārējais leņķis β un ārējais leņķis γ.



1. zīm.: Trīsstūra ārējie leņķi

Viegli pārliecināties, ka trīsstūra ārējo leņķu summa ir 360° (pie katras virsotnes skaitot tikai vienu ārējo leņķi).

Pierādījums. Pieņemsim, ka trīsstūrī ABC leņķa A blakusleņķis ir α, leņķa B blakusleņķis ir β un leņķa C blakusleņķis ir γ. Tad $\alpha = 180^\circ - \sphericalangle CAB$ (kā blakusleņķi), līdzīgi $\beta = 180^\circ - \sphericalangle CBA$ un $\gamma = 180^\circ - \sphericalangle ACB$. Tad

$$\alpha+\beta+\gamma = (180^\circ - \sphericalangle CAB) + (180^\circ - \sphericalangle CBA) + (180^\circ - \sphericalangle ACB) = 3\cdot 180^\circ - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB) = 3\cdot 180^\circ - 180^\circ = 360^\circ.$$

Šeit izmantots fakts, ka trīsstūra iekšējo leņķu summa ir vienāda ar 180°, tātad $\sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB = 180^\circ$. □

Izrādās, šis apgalvojums ir spēkā visiem izliektiem daudzstūriem.

Izliekta daudzstūra ārējo leņķu summa

Izliekta daudzstūra ārējo leņķu summa ir 360°.

Kā redzējām iepriekš, trīsstūru ārējiem leņķiem ir spēkā arī šāda īpašība:

Trīsstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu trīsstūra iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķi.

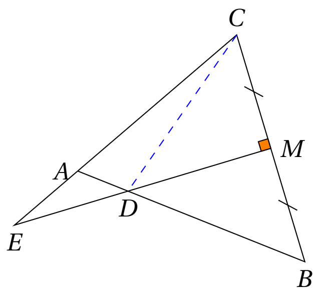
No tā izriet arī šāds apgalvojums:

Trīsstūra ārējais leņķis ir lielāks par katru no tiem diviem trīsstūra iekšējiem leņķiem, kas nav tā blakusleņķi.

Piemēram, 1. zīmējumā leņķis α vienāds ar $\sphericalangle ABC$ un $\sphericalangle ACB$ summu, jo

$$\alpha = 180^\circ - \sphericalangle CAB = (\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB) - \sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB.$$

2. piemērs. Trīsstūrī ABC novilkts malas BC vidusperpendikuls. Tas krusto malu AB punktā D, bet malas AC pagarinājumu – punktā E. Pierādīt, ka $AD < AE$.



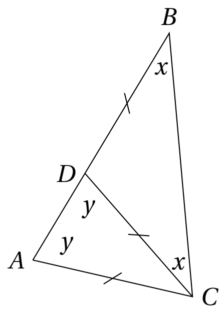
Risinājums. $\Delta BMD = \Delta CMD$ (pazīme mlm), jo

- $CM = MB$ pēc vidusperpendikula definīcijas;
- $\sphericalangle CMD = \sphericalangle BMD = 90^\circ$ pēc vidusperpendikula definīcijas;
- MD – kopīga mala.

Tad $\sphericalangle EDA = \sphericalangle BDM = \sphericalangle CDM > \sphericalangle CEM$ (jo $\sphericalangle CDM$ ir trīsstūra CEM ārējais leņķis). Trīsstūrī EDA pret garāko malu atrodas lielākais leņķis, tādēļ $AE > AD$.

3. piemērs. Trīsstūrī ABC izvēlēts malas AB iekšējs punkts D un novilkts nogrieznis CD. Dots, ka izpildās vienādības $AB = BC$ un $BD = DC = CA$. Aprēķināt leņķi ABC.

Risinājums.



Apzīmēsim $\sphericalangle ABC = x$ un $\sphericalangle BAC = y$ (sk. zīmējumu). Tā kā ΔABC ir vienādsānu, tad $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAC = y$; tā kā ΔACD ir vienādsānu, tad $\sphericalangle CDA = \sphericalangle BAC = y$; tā kā ΔBDC ir vienādsānu, tad $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC = x$.

$\sphericalangle CDA$ ir ΔBDC ārējais leņķis, tātad $\sphericalangle CDA = \sphericalangle BCD + \sphericalangle DBC$ jeb $y = x + x = 2x$. Trīsstūra ABC leņķu summa ir

$$180^\circ = y + y + x = 2x + 2x + x = 5x,$$

līdz ar to $x = \sphericalangle ABC = 36^\circ$.

4. piemērs. Kāds lielākais skaits malu var būt izliektam daudzstūrim, kura visu leņķu lielumi grādos ir veseli skaitļi?

Risinājums.

Tā kā katrs n-stūra iekšējais leņķis nav lielāks kā 179°, tad katrs ārējais leņķis ir vismaz 1°; līdz ar to visu n ārējo leņķu summa ir vismaz n°. Tā kā izliektam n-stūrim ārējo leņķu summa ir 360°, iegūstam nevienādību $n \leq 360$.

Visbeidzot, ir iespējams, ka $n = 360$: izvēlas regulāru 360-stūri. Katrs tā leņķis ir vienāds ar

$$180^\circ \cdot \frac{n-2}{n} = 180^\circ \cdot \frac{358}{360} = 179^\circ,$$

tātad apmierina uzdevuma prasības.

Atbilde: lielākais malu skaits šādam daudzstūrim ir 360.

5. piemērs. 2014-stūrim ir 4 šauri leņķi. Vai ir iespējams, ka visi tā leņķi ir mazāki nekā 180°?

Risinājums.

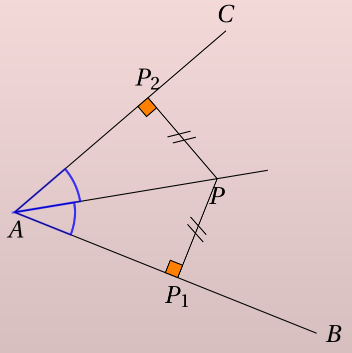
Nē, nav iespējams. Ja 2014-stūrim visi leņķi būtu mazāki nekā 180°, tas būtu izliekts daudzstūris un tā ārējo leņķu summa būtu 360°. Taču četru šauro leņķu blakusleņķi (kas ir četri dotā 2014-stūra ārējie leņķi) katrs ir lielāks nekā $180° - 90° = 90°$, tātad to summa pārsniedz 360°. Seko, ka arī visu ārējo leņķu summa ir lielāka nekā 360°, tātad dotais 2014-stūris nevar būt izliekts.

3. Bisektrise

Atgādināsim, ka **bisektrise** ir stars, kura sākumpunkts ir leņķa virsotnē un kas dala leņķi divās vienādās daļās. Nākamajās īpašībās uzskatīsim, ka runa ir par leņķiem, kas mazāki nekā 180°.

Bisektrises īpašība

1. Leņķa bisektrises katrs punkts atrodas vienādos attālumos no leņķa malām.
2. Ja punkts atrodas vienādā attālumā no leņķa malām, tad tas atrodas uz leņķa bisektrises.

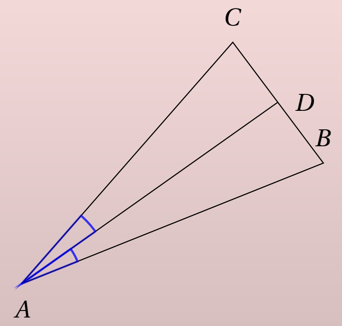


$$PP_1 = PP_2 \quad \Leftrightarrow \quad \sphericalangle P_1AP = \sphericalangle P_2AP$$

Trīsstūra visu trīs leņķu bisektrises krustojas vienā punktā.

Attiecība, kurā trīsstūra bisektrise dala pretējo malu

Trīsstūra bisektrise dala pretējo malu tādā attiecībā, kāda ir abu tai pieguļošo malu attiecība.



$$\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AB}$$

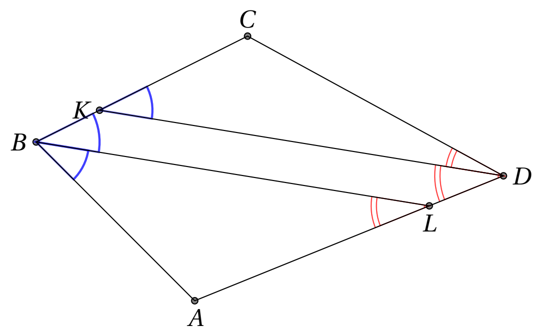
Pierādījumu skat. nodaļā ”Pierādījumi”.

Tā kā uz trīsstūra malas ir tikai viens punkts, kas izveidojušos nogriežņus dala noteiktā attiecībā, tad ir spēkā arī apgrieztais apgalvojums:

Ja trīsstūrī ABC punkts D ir tāds nogriežņa AC punkts, ka izpildās vienādība $\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AB}$, tad AD ir bisektrise.

6. piemērs. Izliektā četrstūrī $ABCD$ leņķu $\sphericalangle ABC$ un $\sphericalangle ADC$ bisektrises ir paralēlas savā starpā. Pierādīt, ka $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$.

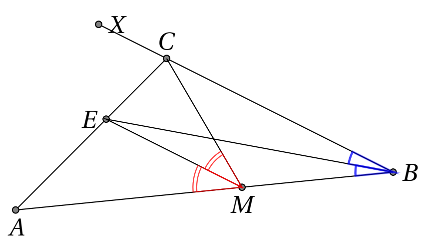
Risinājums.



$$
\begin{aligned}
\sphericalangle BCD &= 180^\circ - (\sphericalangle CKD + \sphericalangle CDK) && \text{(trīsstūra leņķu summa ir } 180^\circ\text{)}\\
&= 180^\circ - (\sphericalangle CBL + \sphericalangle CDK) && \text{(kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm ir vienādi)}\\
&= 180^\circ - (\sphericalangle CBL + \sphericalangle KDA) && \text{(bisektrises definīcija)}\\
&= 180^\circ - (\sphericalangle CBL + \sphericalangle BLA) && \text{(kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm ir vienādi)}\\
&= 180^\circ - (\sphericalangle ABL + \sphericalangle BLA) && \text{(bisektrises definīcija)}\\
&= \sphericalangle BAD && \text{(trīsstūra leņķu summa ir } 180^\circ\text{).}
\end{aligned}
$$

7. piemērs. Uz trīsstūra malas AB ņemts tās iekšējs punkts M. Zināms, ka $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC}$. Pierādīt, ka leņķis ACB ir plats.

Risinājums.



Uz taisnes BC atliek punktu X (tā, lai punktu secība uz šīs taisnes būtu X, C, B). Novelkam leņķa ABC bisektrisi BE. Tad

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MC}.$$

Tāpēc ME ir leņķa AMC bisektrise. Tātad E atrodas vienādos attālumos no taisnēm AB un CM (jo E ir uz $\sphericalangle AMC$ bisektrises) un no taisnēm AB un BC (jo E ir uz $\sphericalangle ABC$ bisektrises). Tātad E atrodas vienādā attālumā no taisnēm MC un BC, līdz ar to E atrodas uz $\sphericalangle XCM$ bisektrises.

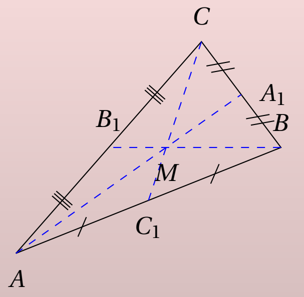
Tas nozīmē, ka $\sphericalangle BCA > \sphericalangle MCA = \sphericalangle XCA$; tā kā $\sphericalangle BCA$ ir lielāks nekā tā blakusleņķis, tad $\sphericalangle BCA$ ir plats.

4. Mediāna

Mediāna ir nogrieznis trīsstūra iekšpusē, kas savieno trīsstūra virsotni ar pretējās malas viduspunktu. Visas trīs trīsstūra mediānas krustojas vienā punktā.

Mediānu krustpunkta īpašība

Mediānu krustpunkts mediānas dala attiecībā 2:1, skaitot no virsotnes.

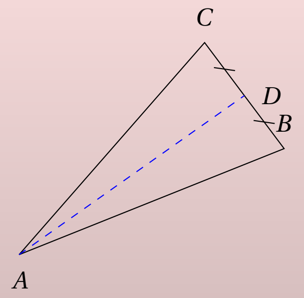


$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = \frac{CM}{MC_1} = \frac{2}{1}$$

Par mediānu garumiem

Pret trīsstūra garāko malu ir novilkta īsākā mediāna.

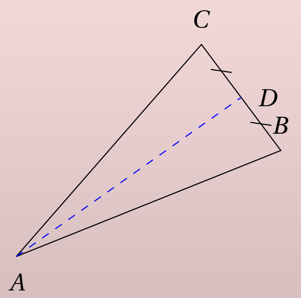
Katras mediānas garums ir mazāks nekā puse no to malu garumu summas, starp kurām atrodas šī mediāna.



$$AD < \frac{1}{2}(AB + AC).$$

Apolonija teorēma

Ja trīsstūrī ABC nogrieznis AD ir mediāna, tad $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

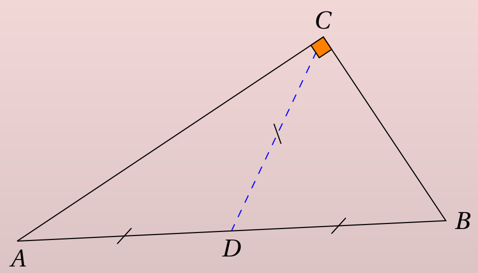


$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

Pierādījumu skat. nodaļā ”Pierādījumi”.

Mediāna pret hipotenūzu

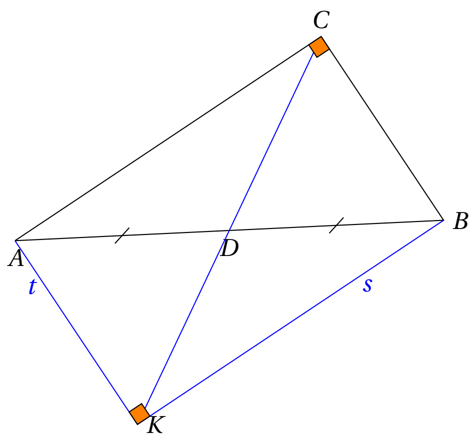
Taisnleņķa trīsstūrī mediānas, kura novilkta no taisnā leņķa virsotnes pret hipotenūzu, garums ir vienāds ar pusi no hipotenūzas garuma.



$$CD = \frac{1}{2}AB \Rightarrow DA = DB = DC.$$

Pierādījums. Apgalvojums izriet no fakta, ka taisnleņķa trīsstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas hipotenūzas viduspunktā. Alternatīvi šo apgalvojumu var pierādīt, papildinot ΔABC līdz taisnstūrim:

Caur A novelk taisni $t \parallel BC$ un caur B novelk $s \parallel AC$; taišņu s un t krustpunktu apzīmē ar K.



Četrstūris $ACBK$ ir paralelograms, jo tā malas ir pa pāriem paralēlas. Paralelograms $ACBK$ ir taisnstūris, jo viens no tā leņķiem ir 90° (leņķis ACB). Taisnstūra diagonāles ir vienādas un krustpunktā dalās uz pusēm, kas nozīmē, ka CK iet caur AB viduspunktu D, turklāt $CK = AB = 2AD = 2DB = 2DC = 2DK$. No tā arī izriet, ka $CD = \frac{1}{2}AB$, kas bija jāpierāda. □

Ir spēkā arī šāds apgalvojums:

Ja trīsstūrī ABC mediānas CD garums ir vienāds ar pusi no malas AB garuma, tad ABC ir taisnleņķa trīsstūris ar $\sphericalangle C = 90°$.

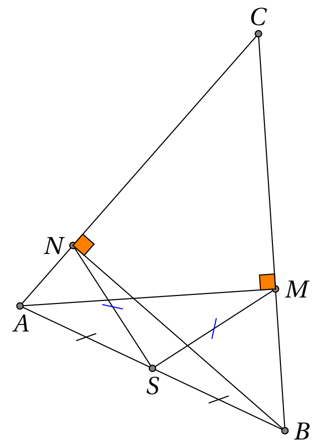
Pierādījums. Konstruē riņķa līniju ω ar centru punktā D (kas ir AB viduspunkts) un rādiusu CD. Tā kā $CD = AD = BD$, trīsstūra ABC virsotnes atrodas uz riņķa līnijas ω. Tad $\sphericalangle ACB = 90°$ (kā ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru AB), kas arī bija jāpierāda. □

8. piemērs. Šaurleņķu trīsstūrī ABC zināms, ka $\sphericalangle BCA = 45°$; AM un BN ir šī trīsstūra augstumi, S ir malas AB viduspunkts. Pierādīt, ka nogriežņi SM un SN ir vienādi un perpendikulāri savā starpā!

Risinājums.

SM un SN ir mediānas pret hipotenūzu attiecīgi taisnleņķa trīsstūros AMB un ANB, kuru hipotenūza ir AB. Līdz ar to

$$SM = SN = \frac{AB}{2}.$$



Aplūkojot vienādsānu trīsstūri ASN, iegūstam

$$\sphericalangle NSA = 180^\circ - \sphericalangle CAB - \sphericalangle ANS = 180^\circ - 2\sphericalangle CAB.$$

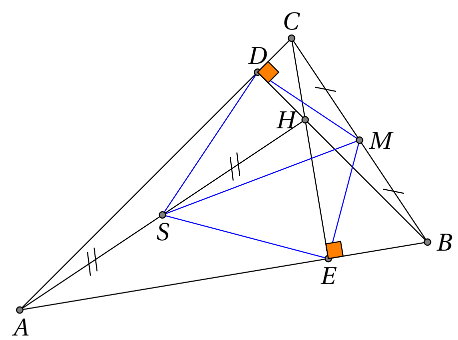
Līdzīgi (no trīsstūra ASM) iegūst $\sphericalangle MSB = 180^\circ - \sphericalangle CBA - \sphericalangle SMB = 180^\circ - 2\sphericalangle CBA$. Tāpēc

$$\sphericalangle NSM = 180^\circ - (180^\circ - 2\sphericalangle CAB) - (180^\circ - 2\sphericalangle CBA) = 2(\sphericalangle A + \sphericalangle B) - 180^\circ = 2(180^\circ - \sphericalangle C) - 180^\circ = 360^\circ - 90^\circ - 180^\circ = 90^\circ.$$

Līdz ar to esam pierādījuši, ka $SM = SN$ un $SM \perp SN$.

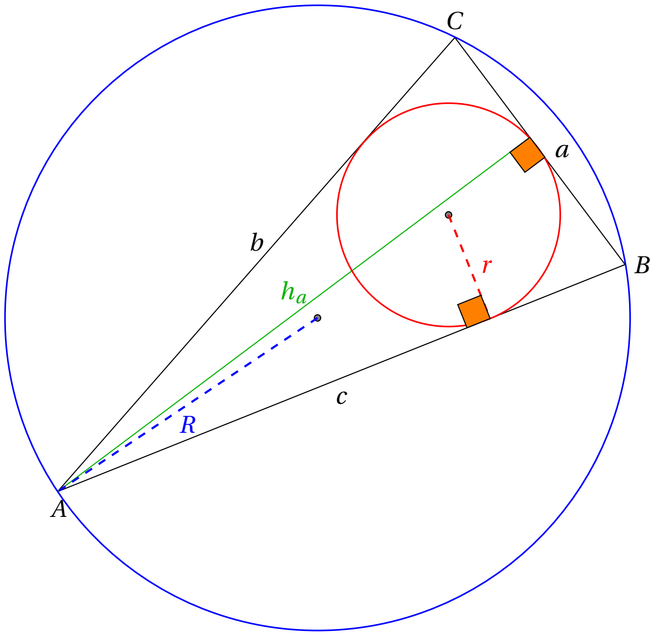
9. piemērs. Šaurleņķu trīsstūrī ABC nogriežņi BD un CE ir augstumi, H – augstumu krustpunkts, M – malas BC viduspunkts, S – nogriežņa AH viduspunkts. Pierādīt, ka $DE \perp MS$.

Risinājums. No taisnleņķa trīsstūriem AEH un ADH, kuros ES un DS ir mediāna pret hipotenūzu, iegūstam $ES = DS = 0.5AH$. Līdzīgi no ΔBEC un ΔCDB iegūst, ka $ME = MD$. Tāpēc $\Delta SEM = \Delta SDM$ (pazīme mmm). Šajos trīsstūros no atbilstošajām virsotnēm E un D velkot augstumus pret SM (kas ir atbilstošā mala abos trīsstūros), augstumu pamati sakrīt. Tāpēc $DE \perp SM$.



5. Trīsstūra laukuma aprēķināšanas formulas

Šajā nodaļā pieņemsim, ka trīsstūrī ABC malu garumi ir $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Ar $p = 0.5\,(a+b+c)$ apzīmēts trīsstūra ABC pusperimetrs, bet no leņķa A vilktais augstums apzīmēts ar h_a. Ar R apzīmē trīsstūrim ABC apvilktās (centrs – vidusperpendikulu krustpunkts) riņķa līnijas rādiusu, bet ar r – ievilktās (centrs – bisektrišu krustpunkts) riņķa līnijas rādiusu.



Trīsstūra laukums ir vienāds ar malas un pret to vilktā augstuma reizinājuma pusi.

$$S = \frac{1}{2} a\, h_a$$

Trīsstūra laukums ir vienāds ar divu malu un starp tām ietvertā leņķa sinusa reizinājuma pusi.

$$S(ABC) = \frac{1}{2} a\, b \sin C$$

Trīsstūra laukums ir vienāds ar visu trīs malu reizinājumu, dalītu ar četrkāršotu apvilktās riņķa līnijas rādiusu.

$$S(ABC) = \frac{abc}{4R}$$

Trīsstūra laukums ir vienāds ar pusperimetra un ievilktās riņķa līnijas rādiusa reizinājumu.

$$S(ABC) = pr$$

Hērona formula

$$S(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ir vēl citas iespējas, kā aprēķināt trīsstūra laukumu; piemēram, ja ir zināmi trīsstūra leņķi:

$$S(ABC) = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$
$$S(ABC) = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

Pierādījumu skat. nodaļā "Pierādījumi".

10. piemērs. Trīsstūra malu garumi ir a, b, c, mediānu garumu m_1, m_2, m_3; apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir R. Pierādīt nevienādību
$$ab + bc + ca \le 2R(m_1 + m_2 + m_3).$$

Risinājums.

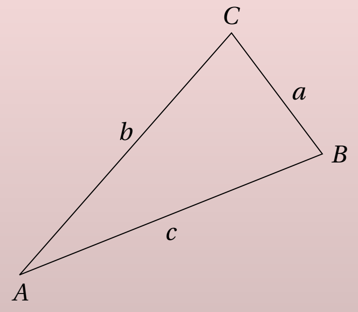
Apzīmēsim trīsstūra laukumu ar S, bet pret malām a, b, c vilktos augstumus attiecīgi ar h_a, h_b, h_c. No formulām
$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{ch_c}{2}$$
seko vienādība $ab = 2Rh_c$. Analoģiski iegūst $bc = 2Rh_a$ un $ac = 2Rh_b$. Tātad
$$ab + bc + ca = 2R(h_a + h_b + h_c).$$
Tā kā trīsstūra mediānas garums ir ne mazāks kā no tās pašas virsotnes vilktā augstuma garums (jo augstums ir īsākais nogrieznis no trīsstūra virsotnes līdz pretējai malai), tad izpildās nevienādība $h_a + h_b + h_c \le m_1 + m_2 + m_3$ un līdz ar to
$$ab + bc + ca = 2R(h_a + h_b + h_c) \le 2R(m_1 + m_2 + m_3).$$

6. Citas noderīgas teorēmas

Šī nodaļa paredzēta 10.-12.klases skolēniem, jo tiek izmantotas trigonometriskās sakarības.

Sinusu teorēma

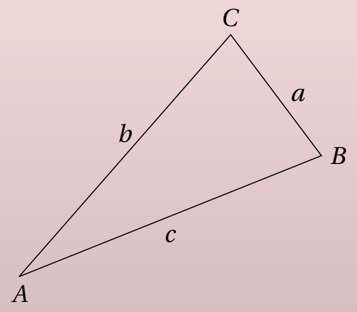
Trīsstūra malas ir proporcionālas pretleņķu sinusiem, turklāt malas un pretleņķa sinusa attiecība ir vienāda ar apvilktās riņķa līnijas diametra garumu.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Kosinusu teorēma

Trīsstūra jebkuras malas garuma kvadrāts ir vienāds ar divu pārējo malu garumu kvadrātu summu, no kuras atņemts divkāršots šo malu garumu reizinājums ar to ietvertā leņķa kosinusu.

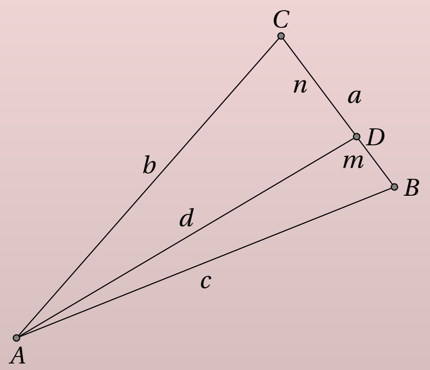


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$$

Stjuarta teorēma

Pieņemsim, ka D ir nogriežņa BC iekšējs punkts. Trīsstūrī ABC malu garumi ir apzīmēti $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Apzīmēsim arī $BD = m$, $CD = n$ un $AD = d$. Tad

$$b^2 m + c^2 n = a(mn + d^2).$$

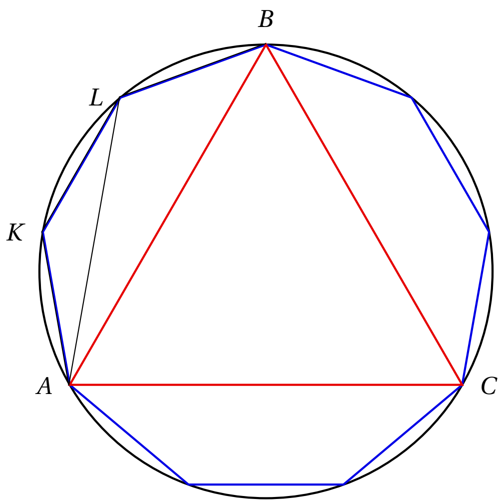


$$b^2 m + c^2 n = a(mn + d^2).$$

Izmantojot Stjuarta teorēmu, var pierādīt Apolonija teorēmu, izteikt bisektrises garumu, izmantojot trīsstūra malu garumus u.t.t.

11. piemērs. Vienā riņķa līnijā ievilkts regulārs deviņstūris un regulārs trīsstūris. Kas ir lielāks: dotā deviņstūra malu kvadrātu summa vai dotā trīsstūra malu kvadrātu summa?

Risinājums.



Aplūkosim regulārā trīsstūra malu AB un trīs sekojošas deviņstūra malas AK, KL, LB. Ievērosim, ka trīsstūri AKL un ALB ir platleņķa, jo $\sphericalangle AKL$ un $\sphericalangle ALB$ balstās uz lokiem, kas ir lielāki nekā $180°$ ($\overparen{A_C B} = 240°$).

No kosinusu teorēmas seko, ka

$$AK^2 + KL^2 - 2AK \cdot KL \cos \sphericalangle AKL = AL^2.$$

Tā kā $\sphericalangle AKL$ ir plats, tad $\cos \sphericalangle AKL < 0$ un $-2AK \cdot KL \cos \sphericalangle AKL > 0$. Secinām, ka izpildās nevienādība

$$AK^2 + KL^2 < AL^2. \tag{5}$$

Analoģiski, izmantojot kosinusu teorēmu trīsstūrī ALB, secinām, ka

$$AL^2 + LB^2 < AB^2. \tag{6}$$

Nevienādības (5) abām pusēm pieskaitot LB^2, iegūst $AK^2 + KL^2 + LB^2 < AL^2 + LB^2$. Tad, izmantojot (6), iegūstam, ka

$$AK^2 + KL^2 + LB^2 < AL^2 + LB^2 < AB^2.$$

Tas nozīmē, ka regulāra deviņstūra trīs malu kvadrātu summa ir mazāka nekā regulāra trīsstūra malas kvadrāts. Tātad visu deviņu regulārā deviņstūra malu kvadrātu summa ir mazāka nekā visu trīs regulārā trīsstūra malu kvadrātu summa.

Nākamais piemērs parāda, ka ģeometriskās sakarības var izmantot arī vienādību pierādīšanā. Lai izprastu uzdevumu, nepieciešams zināt trigonometriskās sakarības, ko skolā apgūst 11. klasē.

12. piemērs. Trīsstūra malu garumi ir a, b un c, bet malu pretleņķu lielumi ir atbilstoši α, β un γ. Pierādīt, ka

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\cos\alpha + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\cos\beta + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\cos\gamma = 3.$$

Risinājums.

Ekvivalenti pārveidojam dotās vienādības kreiso pusi:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cos\alpha+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cos\beta+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cos\gamma= \\
&=\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)\cos\beta+\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)\cos\gamma= && \text{(no sinusu teorēmas)} \\
&=\frac{\sin\gamma\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\gamma\cos\alpha+\sin\alpha\cos\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta}{\sin\gamma}= && \text{(saskaita daļas ar vienādiem saucējiem)} \\
&=\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha}+\frac{\sin(\gamma+\alpha)}{\sin\beta}+\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma}= && \text{(izmantota summas sinusa formula)} \\
&=\frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\sin\alpha}+\frac{\sin(180^\circ-\beta)}{\sin\beta}+\frac{\sin(180^\circ-\gamma)}{\sin\gamma}= && \text{(trīsstūra leņķu summa ir } 180^\circ\text{)} \\
&=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\beta}{\sin\beta}+\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma}=3. && \text{(redukcijas formula } \sin(180^\circ-x)=\sin x\text{)}
\end{aligned}$$

Prasītā vienādība pierādīta.

13. piemērs. Sauksim divus trīsstūrus par *gandrīz vienādiem*, ja viena trīsstūra divas malas un leņķis pret pirmo no tām ir attiecīgi vienādi ar otra trīsstūra divām malām un leņķi pret pirmo no tām.

Doti n trīsstūri. Zināms, ka pirmais ir *gandrīz vienāds* ar otro, otrais *gandrīz vienāds* ar trešo, ..., $(n-1)$-ais *gandrīz vienāds* ar n-to. Turklāt zināms, ka pirmais trīsstūris ir līdzīgs n-tajam. Vai pirmais trīsstūris noteikti ir vienāds ar n-to?

Risinājums.

Vispirms pamatosim šādu apgalvojumu; ja trīsstūri ir gandrīz vienādi, tad ap šiem trīsstūriem apvilkto riņķa līniju rādiusi ir vienādi.

Pieņemsim, ka $A_1B_1C_1$ ir *gandrīz vienāds* ar $A_2B_2C_2$, turklāt $\sphericalangle A_1=\sphericalangle A_2$, kā arī $B_1C_1=B_2C_2$. Ap $A_1B_1C_1$ apvilktās riņķa līnijas rādiuss, saskaņā ar sinusu teorēmu, ir

$$R_1=\frac{B_1C_1}{2\sin A_1}.$$

Ap $A_2B_2C_2$ apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir

$$R_2=\frac{B_2C_2}{2\sin A_2}.$$

Redzam, ka no $\sphericalangle A_1=\sphericalangle A_2$ un $B_1C_1=B_2C_2$ izriet, ka

$$R_1=\frac{B_1C_1}{2\sin A_1}=\frac{B_2C_2}{2\sin A_2}=R_2.$$

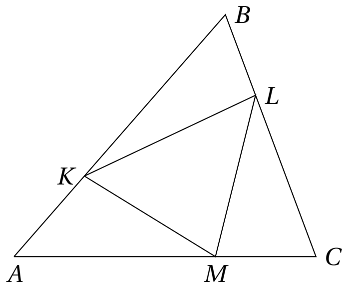
Apgalvojums ir pamatots.

No tā varam secinām, ka visu n doto trīsstūru apvilktās riņķa līnijas rādiusi ir vienādi. Tātad arī pirmajam un n-tajam trīsstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiusi ir vienādi. Bet, ja diviem līdzīgiem trīsstūriem ir vienādi kādi lineārie izmēri (šajā gadījumā apvilkto riņķa līniju rādiusi), tad tie ir vienādi. Tātad pirmais trīsstūris ir vienāds ar n-to.

14. piemērs. Uz trīsstūra ABC malām AB, BC, CA ņemti atbilstoši punkti K, L, M tā, ka

$$\frac{AK}{KB}=\frac{BL}{LC}=\frac{CM}{MA}=\frac{1}{2}.$$

Ap trīsstūriem AKM, BLK, CML apvilkto riņķa līniju rādiusi ir vienādi. Pierādīt, ka arī tajos ievilkto riņķa līniju rādiusi ir vienādi.



Risinājums.

Pierādīsim, ka trīsstūris ABC ir regulārs. Tad ΔAKM, ΔBLK, ΔCML būs vienādi (pēc pazīmes mlm), tātad arī izpildīsies prasītais.

Apzīmēsim trīsstūra ABC malu AB, BC, CA garumus attiecīgi ar c, a, b un ap ΔAKM, ΔBLK, ΔCML apvilkto riņķa līniju rādiusu garumu ar R.

Saskaņā ar sinusu teorēmu,

$$KM = 2R\sin A, \quad KL = 2R\sin B, \quad LM = 2R\sin C.$$

Tātad

$$KM : KL : LM = \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c,$$

kur pēdējā vienādība seko no sinusu teorēmas trīsstūrī ABC. Tātad ΔLMK ir līdzīgs trīsstūrim ΔABC (līdzības pazīme mmm).

Ievērosim, ka

$$S(AMK) = \frac{1}{2}AK \cdot AM \cdot \sin\sphericalangle KAM = \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{3}\cdot\frac{2b}{3}\sin\sphericalangle BAC = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}cb\sin\sphericalangle BAC\right) = \frac{2}{9}S(ABC).$$

Līdzīgi pierāda, ka arī

$$S(CLM) = S(BKL) = \frac{2}{9}S(ABC),$$

tādēļ

$$S(LMK) = S(ABC) - S(AMK) - S(CLM) - S(BKL) = \frac{1}{3}S(ABC).$$

Tā kā ΔLMK ir līdzīgs ΔABC, tad $S(LMK) = k^2 S(ABC)$, kur k ir līdzības koeficients. No tikko pamatotās vienādības secinām, ka līdzības koeficients ir $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Varam secināt, ka ΔLMK malu garumi ir

$$KL = \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad MK = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad LM = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Izmantosim kosinusu teorēmu ΔABC un ΔAKM:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \qquad \text{(trīsstūris } ABC\text{)}$$
$$\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{2b}{3}\cdot\frac{c}{3}\cos A. \qquad \text{(trīsstūris } AKM\text{)}$$

Iegūtās vienādības var pārveidot formā

$$4bc\cos A = 2b^2 + 2c^2 - 2a^2,$$
$$4bc\cos A = 4b^2 + c^2 - 3a^2.$$

Tātad

$$2b^2 + 2c^2 - 2a^2 = 4b^2 + c^2 - 3a^2$$

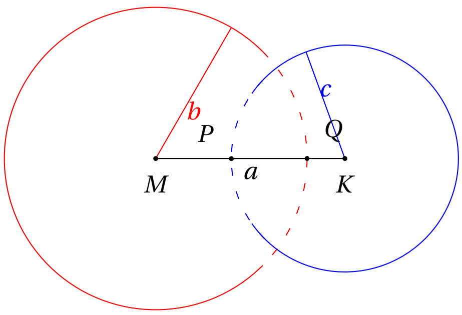
un $a^2 + c^2 = 2b^2$.

Analoģiski var pierādīt, ka $a^2 + b^2 = 2c^2$ un $c^2 + b^2 = 2a^2$. No šīm vienādībām izriet $a = b = c$, kas nozīmē, ka trīsstūris ABC ir regulārs.

Pierādījumi*

Trīsstūra ar dotiem malu garumiem eksistence

Pierādījums. Varam pieņemt, ka vislielākais no skaitļiem a, b, c ir a (citus gadījumus apskata līdzīgi). Atliksim plaknē nogriezni MK ar garumu a (skaidrs, ka to ir iespējams izdarīt). Konstruē riņķa līniju ω_1 ar centru M un rādiusu b; tad konstruē riņķa līniju ω_2 ar centru K un rādiusu c.

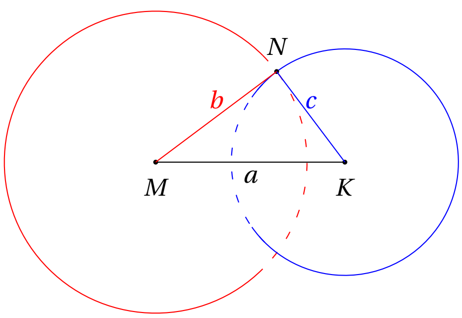


Pirmkārt, atzīmēsim, ka ω_1 un ω_2 krusto nogriezni MK, jo abu riņķa līniju rādiusi ir ne lielāki par nogriežņa MK garumu a (jo apskatām gadījumu, kad $a \geq b$ un $a \geq c$).

Ar P apzīmē ω_2 krustpunktu ar nogriezni MK; ar Q apzīmē ω_1 krustpunktu ar nogriezni MK. Iespējama situācija, ka Q sakrīt ar K (tas notiek, ja $a = b$) un ka P sakrīt ar M (tas notiek, ja $a = c$). Tālākos spriedumus šie speciālgadījumi neietekmēs.

Ievērosim, ka uz taisnes punkti M, P, Q un K ir izvietoti tieši šādā secībā: ja secība būtu M, Q, P, K, tad nogriežņa MK garums (kas ir vienāds ar a) būtu vismaz tikpat liels, cik nogriežņu MQ un PK garumu (attiecīgi b un c) summa – t.i., pretruna ar doto, ka $a < b + c$. Nav iespējams, ka P sakrīt ar Q, jo tādā gadījumā būtu $a = b + c$ – joprojām pretruna ar doto.

Tātad pamatots, ka punkti M, P, Q un K ir izvietoti tieši šādā secībā. Taču tas nozīmē, ka riņķa līnijas ω_1 un ω_2 krustojas. Apzīmē vienu no šiem krustpunktiem ar N. Tādā gadījumā trīsstūra MKN malu garumi ir a, b un c, kas pierāda vajadzīgā trīsstūra eksistenci.



□

Attiecība, kurā trīsstūra bisektrise dala pretējo malu

Pierādījums. No sinusu teorēmas ΔACD un ΔABD izriet, ka

$$\frac{AC}{\sin\sphericalangle CDA} = \frac{CD}{\sin\sphericalangle CAD} \quad \text{un} \quad \frac{AB}{\sin\sphericalangle BDA} = \frac{BD}{\sin\sphericalangle BAD}.$$

Tātad

$$\frac{AC}{CD} = \frac{\sin\sphericalangle CDA}{\sin\sphericalangle CAD}, \qquad \frac{AB}{BD} = \frac{\sin\sphericalangle BDA}{\sin\sphericalangle BAD}$$

Tā kā AD ir bisektrise, tad $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD$ un arī leņķu sinusi ir vienādi: $\sin\sphericalangle CAD = \sin\sphericalangle BAD$. Tā kā $\sphericalangle BDA$ un $\sphericalangle CDA$ ir blakusleņķi, tad arī to sinusi ir vienādi: $\sin\sphericalangle BDA = \sin\sphericalangle CDA$. Iegūstam, ka

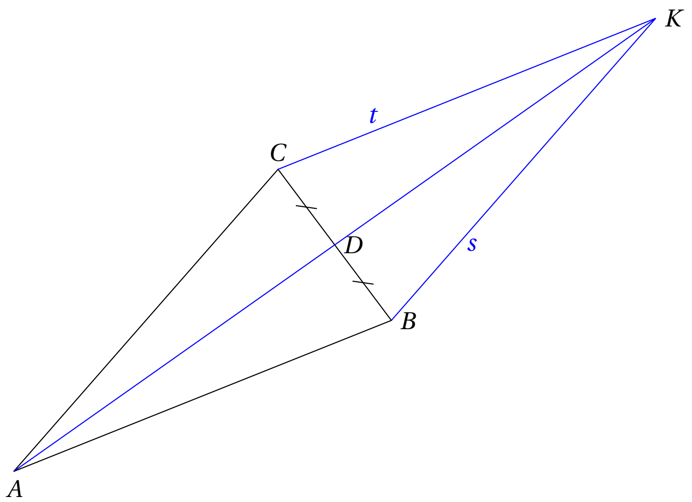
$$\frac{AC}{CD} = \frac{\sin\sphericalangle CDA}{\sin\sphericalangle CAD} = \frac{\sin\sphericalangle BDA}{\sin\sphericalangle BAD} = \frac{AB}{BD}.$$

Līdz ar to ir pierādīts, ka $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD}$ jeb, ekvivalenti pārveidojot, $\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{BA}$. □

Apolonija teorēma

Pierādījums. Šo faktu var pierādīt, papildinot trīsstūri ABC līdz paralelogramam $ABKC$ tā, lai BC būtu paralelograma diagonāle.

Caur C novelk taisni $t \parallel AB$ un caur B novelk $s \parallel AC$; taišņu s un t krustpunktu apzīmē ar K.



Četrstūris $ABKC$ ir paralelograms, jo tā malas ir pa pāriem paralēlas. Paralelograma diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm, kas nozīmē, ka AK iet caur AC viduspunktu D, turklāt $AK = 2AD$.

Saskaņā ar paralelograma likumu, paralelograma diagonāļu kvadrātu summa vienāda ar divkāršotu abu malu kvadrātu summu jeb

$$2(AB^2 + AC^2) = BC^2 + AK^2.$$

Taču $AK = 2AD$, tātad šo vienādību var pārrakstīt kā

$$2AB^2 + 2AC^2 = BC^2 + 4AD^2 \tag{7}$$

jeb $AD^2 = \frac{1}{4}\left(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2\right)$ – mediānas garuma aprēķināšanas formula, ja zināmi trīsstūra visu malu garumi.

Ievērojot, ka $BC = 2BD$, vienādību (7) var pārveidot arī formā

$$2AB^2 + 2AC^2 = 4BD^2 + 4AD^2$$

jeb

$$AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2).$$

□

Formulas trīsstūra laukuma aprēķināšanai, ja doti trīsstūra leņķi

Pierādījums. Izmantojam formulu $S(ABC) = \frac{1}{2} a\, b \sin C$.

1. formulas pierādījums: no sinusu teorēmas izriet, ka $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$. Tātad

$$a = 2R\sin A,\ \ b = 2R\sin B.$$

Ievietojot šīs vērtības formulā $S(ABC) = \frac{1}{2} a\, b \sin C$, iegūstam

$$S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin A \cdot 2R\sin B \cdot \sin C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

kas arī bija jāpierāda.

2. formulas pierādījums: izmanto sinusu teorēmu, no kuras izriet sakarība $b = a \cdot \frac{\sin A}{\sin B}$. Ievietojot šo izteiksmi formulā $S(ABC) = \frac{1}{2} a\, b \sin C$, iegūstam

$$S(ABC) = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{\sin A}{\sin B} \sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A},$$

kas arī bija jāpierāda. □

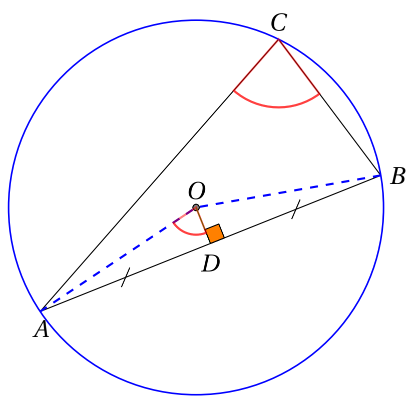
Sinusu teorēma

Pierādījums. Pierādīsim, ka patvaļīgam trīsstūrim

$$\frac{c}{2} = R \cdot \sin C.$$

Skaidrs, ka no tā izrietēs $\frac{c}{\sin C} = 2R$. Tā kā šī vienādība būs pierādīta patvaļīgam trīsstūrim un patvaļīgai tā malai c ar pretleņķi C, tad būs pierādīta arī sinusu teorēma.

Apskata gadījumu, kad $\sphericalangle C < 90°$**:** Konstruē trīsstūrim ABC apvilkto riņķa līniju ar centru O un rādiusu R; novelk rādiusus OA un OB, kā arī trīsstūra OAB augstumu OD.



Tad $OA = OB = R$ kā rādiusi; tātad ΔOAB ir vienādsānu un OD ir augstums vienādsānu trīsstūrī pret pamatu. Seko, ka OD ir arī mediāna (tātad $AD = DB = 0.5AB = 0.5c$) un $\sphericalangle AOB$ bisektrise (tātad $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOD = 0.5\sphericalangle AOB$).

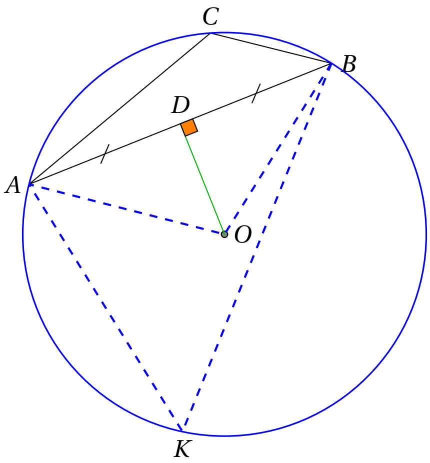
Centra leņķis ir divreiz lielāks nekā ievilktais leņķis, kas balstās uz to pašu loku, tādēļ $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB$; tad

$$\sphericalangle AOD = 0.5\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB.$$

Esam ieguvuši, ka AOD ir taisnleņķa trīsstūris, $AD = \frac{c}{2}$, $OA = R$ un $\sphericalangle AOD = \sphericalangle C$. Tātad

$$\frac{c}{2} = AD = AO \sin \sphericalangle AOD = R \sin C.$$

Apskata gadījumu, kad $\sphericalangle C > 90°$: Konstruē trīsstūrim ABC apvilkto riņķa līniju ar centru O un rādiusu R; novelk rādiusus OA un OB, kā arī trīsstūra OAB augstumu OD.



Tad $OA = OB = R$ kā rādiusi; tātad ΔOAB ir vienādsānu un OD ir augstums vienādsānu trīsstūrī pret pamatu. Seko, ka OD ir arī mediāna (tātad $AD = DB = 0.5AB = 0.5c$) un $\sphericalangle AOB$ bisektrise (tātad $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOD = 0.5\sphericalangle AOB$).

Uz loka $\overset{\frown}{AB}$ (kas nesatur C) izvēlas punktu K. Ievilktā leņķa lielums ir vienāds ar pusi no tā loka leņķiskā lieluma, uz kura tas balstās; tātad

$$\sphericalangle AKB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_C B} = \frac{1}{2}\left(360° - \overset{\frown}{A_K B}\right) = 180° - \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_K B} = 180° - \sphericalangle ACB.$$

Centra leņķis ir divreiz lielāks nekā ievilktais leņķis, kas balstās uz to pašu loku, tādēļ $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle AKB = 2(180° - \sphericalangle ACB)$; tad

$$\sphericalangle AOD = 0.5\sphericalangle AOB = 180° - \sphericalangle ACB.$$

Esam ieguvuši, ka AOD ir taisnleņķa trīsstūris, $AD = \frac{c}{2}$, $OA = R$ un $\sphericalangle AOD = 180° - \sphericalangle C$. Tā kā $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, tad $\sin\sphericalangle AOD = \sin C$. Tātad

$$\frac{c}{2} = AD = AO \sin \sphericalangle AOD = R \sin C.$$

Gadījums, ja $\sphericalangle C = 90°$: šajā gadījumā ABC ir taisnleņķa trīsstūris, un tā hipotenūza sakrīt ar diametru, t.i., $c = 2R$. Taču tad

$$\frac{c}{2} = R = R \cdot \sin 90° = R \cdot \sin C,$$

un vajadzīgā vienādība izpildās.

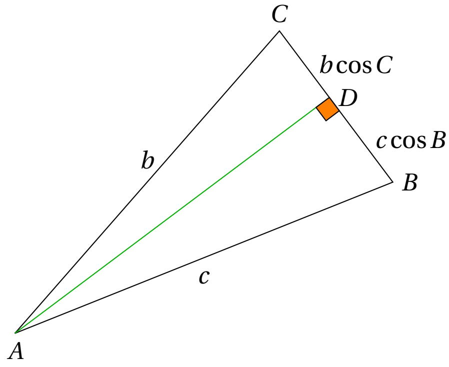
□

Kosinusu teorēma

Pierādījums. Novelk augstumu AD. No ΔACD iegūstam, ka $CD = b\cos C$; no ΔABD iegūstam, ka $BD = c\cos B$. Tātad

$$a = b\cos C + c\cos B.$$

(Piezīme: lai gan zīmējumā apskatīts šaurleņķu trīsstūris, šī formula paliek spēkā arī tad, ja trīsstūrī ABC kāds leņķis ir plats vai taisns).



Analoģiski iegūst formulas

$$b = c\cos A + a\cos C, \qquad c = a\cos B + b\cos A.$$

Reizinot iegūtās vienādības attiecīgi ar a, b un c, iegūstam

$$\begin{aligned} a^2 &= ab\cos C + ac\cos B,\\ b^2 &= bc\cos A + ab\cos C,\\ c^2 &= ac\cos B + bc\cos A. \end{aligned}$$

Tad

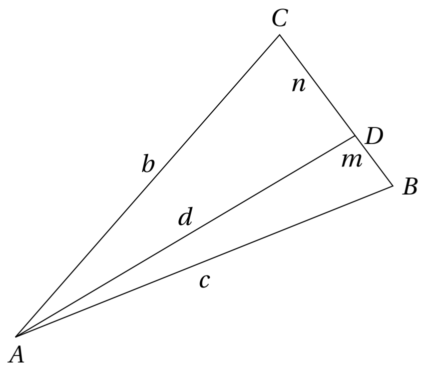
$$\begin{aligned} &b^2 + c^2 - a^2 =\\ &\qquad = (bc\cos A + ab\cos C) + (ac\cos B + bc\cos A) - (ab\cos C + ac\cos B) =\\ &\qquad = (bc\cos A + bc\cos A) + (ab\cos C - ab\cos C) + (ac\cos B - ac\cos B) =\\ &\qquad = 2bc\cos A. \end{aligned}$$

Līdz ar to pierādīts, ka

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

□

Stjuarta teorēma



Pierādījums. Apzīmēsim $\sphericalangle ADB = \alpha$, tad

$$\cos\sphericalangle ADC = \cos(180^\circ - \sphericalangle ADB) = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha.$$

Izmantojot kosinusu teorēmu trīsstūrim ABD, iegūstam

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD\cdot DB\cdot\cos\sphericalangle ADB$$

jeb

$$c^2 = m^2 + d^2 - 2md\cos\alpha. \tag{8}$$

Izmantojot kosinusu teorēmu trīsstūrim ACD, iegūstam

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos\sphericalangle ADC$$

jeb

$$b^2 = n^2 + d^2 + 2nd\cos\alpha. \tag{9}$$

Reizinām (8) ar n, (9) ar m un saskaitām abus vienādojumus, iegūstot

$$\begin{aligned}
b^2m + c^2n &= \\
&= m\left(n^2 + d^2 + 2nd\cos\alpha\right) + n\left(m^2 + d^2 - 2md\cos\alpha\right) = \\
&= mn^2 + md^2 + 2mnd\cos\alpha + nm^2 + nd^2 - 2mnd\cos\alpha = \\
&= mn^2 + nm^2 + md^2 + nd^2 = (m+n)(mn+d^2) = \\
&= a(mn+d^2).
\end{aligned}$$

Līdz ar to ir pierādīta vienādība

$$b^2m + c^2n = a(mn+d^2).$$

□