SKAITĻU DALĀMĪBA

Teorija un piemēri 5.-9. klasei, gatavojoties Atklātajai matemātikas olimpiādei 2022./2023. m. g.

Skaitļu teorija ir matemātikas apakšnozare, kas pēta veselo skaitļu dalāmību.

Skaitļu dalāmība

Ja a un b ir veseli skaitļi, tad ne vienmēr, dalot a ar b, dalījumā iegūst veselu skaitli. Ja dalījums ir vesels skaitlis, tad saka, ka a dalās ar b, pretējā gadījumā saka, ka a nedalās ar b.

Definīcija. Ja $b \neq 0$ un $a : b = k$, kur a, b, k – veseli skaitļi, tad saka, ka a dalās ar b. Pretējā gadījumā saka, ka a nedalās ar b.

Piemēram, 15 dalās ar 3, bet 15 nedalās ar 2.

Iegaumē! Ja tiek runāts par skaitļu dalāmību, tad runa ir tikai par veseliem skaitļiem.

Dalāmības pazīmes

Noskaidrot, vai viens vesels skaitlis dalās ar otru, tikai ar definīcijas palīdzību, tas ir, izdalot skaitļus, bieži vien ir neparocīgi un laikietilpīgi. Šo uzdevumu atvieglo skaitļu dalāmības pazīmes. Tālāk dotas biežāk lietotās dalāmības pazīmes.

Dalāmības pazīme	**Piemēri**
Skaitlis dalās ar 2, ja tā pēdējais cipars ir pāra, tas ir, tā pēdējais cipars ir 0, 2, 4, 6 vai 8.	201**6** dalās ar 2, jo tā pēdējais cipars ir pāra
Skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3.	2016 dalās ar 3, jo $2 + 0 + 1 + 6 = 9$ dalās ar 3
Skaitlis dalās ar 4, ja tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4.	20**16** dalās ar 4, jo 16 dalās ar 4
Skaitlis dalās ar 5, ja tā pēdējais cipars ir 0 vai 5.	201**5** dalās ar 5, jo tā pēdējais cipars ir 5
Skaitlis dalās ar 6, ja tas dalās gan ar 2, gan ar 3.	2016 dalās ar 6, jo tas dalās ar 2 un 3
Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8.	12**800** dalās ar 8, jo 800 dalās ar 8 2**016** dalās ar 8, jo pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis ir 16, kas dalās ar 8
Skaitlis dalās ar 9, ja tā ciparu summa dalās ar 9.	2016 dalās ar 9, jo $2 + 0 + 1 + 6 = 9$ dalās ar 9
Skaitlis dalās ar 10, ja tā pēdējais cipars ir 0.	15**0** dalās ar 10, jo tā pēdējais cipars ir 0
Skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.	$\underline{1}0\underline{8}6\underline{4}7$ dalās ar 11, jo $(1 + 8 + 4) - (0 + 6 + 7) = 0$, kas dalās ar 11 $\underline{9}4\underline{8}3\underline{1}$ dalās ar 11, jo $(9 + 8 + 1) - (4 + 3) = 11$, kas dalās ar 11

Citas dalāmības pazīmes

- Skaitlis dalās ar 10^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 10^n.
- Skaitlis dalās ar 2^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 2^n.
- Skaitlis dalās ar 5^n, ja tā pēdējo n ciparu veidotais skaitlis dalās ar 5^n.

Kombinējot iepriekš dotās pazīmes, var iegūt arī pazīmes dalāmībai ar citiem skaitļiem. Piemēram, skaitlis dalās ar 12, ja tas dalās ar 3 un 4; skaitlis dalās ar 90, ja tas dalās ar 9 un 10 jeb skaitļa ciparu summa dalās ar 9 un tā pēdējais cipars ir nulle. Šādi pazīmes veido, doto dalītāju sadalot reizinātājos, kas ir savstarpēji pirmskaitļi un pārbaudot dalāmību ar katru no tiem.

Definīcija. Par savstarpējiem pirmskaitļiem sauc skaitļus, kam lielākais kopīgais dalītājs ir skaitlis 1.

Piemērs. Ja skaitlis dalās ar 2 un 6, mēs nevaram apgalvot, ka tas dalās arī ar $2 \cdot 6 = 12$, piemēram, 18 dalās gan ar 2, gan ar 6, bet 18 nedalās ar 12. Tāpēc ir ļoti svarīgi, lai reizinātāji būtu savstarpēji pirmskaitļi.

Teorēma. Ja b un c ir savstarpēji pirmskaitļi un a dalās ar b un a dalās ar c, tad a dalās ar $b \cdot c$.

Uzdevumu piemēri

1. Vienādi burti apzīmē vienādus ciparus, dažādi – dažādus. Zināms, ka trīsciparu skaitlis $\overline{ASS}$ dalās ar 5, bet nedalās ar 4. Vai skaitlis $\overline{OLA}$ var dalīties ar 5?

Piezīme. Ar $\overline{abc}$ apzīmē trīsciparu skaitli, kura pirmais cipars ir a, otrais – b, trešais – c.

Atrisinājums. Tā kā skaitlis $\overline{ASS}$ dalās ar 5, tad $S = 0$ vai $S = 5$.

1. Ja $S = 0$, tad iegūstam skaitli $\overline{A00}$, kas dalās ar 4, bet tā ir pretruna ar doto, ka $\overline{ASS}$ nedalās ar 4. Tātad S nevar būt 0.
2. Apskatīsim gadījumu, kad $S = 5$. Lai skaitlis $\overline{OLA}$ dalītos ar 5, tad vai nu $A = 0$, vai $A = 5$. Tā kā dažādiem burtiem atbilst dažādi cipari, tad A nevar būt 5 un tāpēc $A = 0$. Bet tad skaitlis $\overline{ASS}$ nebūtu trīsciparu skaitlis, jo tā pirmais cipars būtu 0. Tātad S nevar būt arī 5.

Esam ieguvuši, ka skaitlis $\overline{OLA}$ nevar dalīties ar 5.

2. Naturālā vienpadsmitciparu skaitlī vienādus ciparus aizstāja ar vienādiem burtiem, bet dažādus – ar dažādiem; ieguva pierakstu $PĀRSTEIGUMS$. Zināms, ka šis skaitlis dalās ar 18. Noteikt, kurš cipars aizstāts ar burtu S.

Atrisinājums. Vārdā $PĀRSTEIGUMS$ pavisam ir 11 burti, no tiem pirmie 10 dažādi, tātad pirmie 10 burti apzīmē visus desmit ciparus. Tad

$$P + \bar{A} + R + S + T + E + I + G + U + M + S =$$
$$= 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + S = 45 + S$$

Tā kā dotais vienpadsmitciparu skaitlis dalās ar 18, tad tas dalās ar 2 un 9. Tas nozīmē, ka tas ir pāra skaitlis un tā ciparu summa dalās ar 9. Tātad S ir pāra cipars un $45 + S$ dalās ar 9. Tā kā $45 + S$ jādalās ar 9 un skaitlis 45 dalās ar 9, tad arī S jādalās ar 9. Tātad ar burtu S ir aizstāts cipars 0.

Piezīme. Lai noteiktu, kurš cipars aizstāts ar burtu S, izteiksmē $45 + S$ var arī ievietot visas iespējamās S vērtības – 0, 2, 4, 6, 8 – un pārbaudīt katru no šiem gadījumiem.

3. Kādi cipari var būt burtu a un b vietā, lai piecciparu skaitlis $\overline{a543b}$ dalītos ar 36?

Atrisinājums. Lai skaitlis $\overline{a543b}$ dalītos ar 36, tam jādalās gan ar 9, gan ar 4. Lai skaitlis $\overline{a543b}$ dalītos ar 4, tā pēdējo divu ciparu veidotajam skaitlim jādalās ar 4. Tātad pēdējo divu ciparu veidotajam skaitlim jābūt vai nu 32, vai 36, līdz ar to $b = 2$ vai $b = 6$. Lai dotais skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai jādalās ar 9.

- Ja $b = 2$, tad skaitļa ciparu summa ir $a + 5 + 4 + 3 + 2 = 14 + a$. Der $a = 4$, jo $14 + 4 = 18$, kas dalās ar 9. Tā kā a ir cipars, tad citus skaitļus, kas dalās ar 9, iegūt nevar.
- Ja $b = 6$, tad skaitļa ciparu summa ir $a + 5 + 4 + 3 + 6 = 18 + a$. Vērtība $a = 0$ neder, jo a ir skaitļa pirmais cipars. Der $a = 9$, jo $18 + 9 = 27$, kas dalās ar 9. Tā kā a ir cipars, tad citus skaitļus, kas dalās ar 9, iegūt nevar.

Tātad esam ieguvuši, ka $a = 4, b = 2$ vai $a = 9, b = 6$ ir vienīgās iespējamās vērtības.

4. Kāda ir mazākā iespējamā ciparu summa desmitciparu skaitlim, kas dalās ar 33?

Atrisinājums. Mazākā iespējamā ciparu summa desmitciparu skaitlim, kas dalās ar 33, ir 6, piemēram, skaitlim 3300000000.

Pierādīsim, ka ciparu summa nevar būt mazāka kā 6. Lai naturāls skaitlis dalītos ar 33, tam jādalās ar 3 un ar 11. Tā kā skaitlim jādalās ar 3, tad arī tā ciparu summai jādalās ar 3. Tas nozīmē, ka ir jāpierāda, ka ciparu summa nevar būt 3. Apzīmēsim skaitļa ciparu summu nepāra pozīcijās ar a un pāra pozīcijās – ar b, tad, lai skaitlis dalītos ar 11, $a-b$ jādalās ar 11. Pieņemsim, ka $a \geq b$, otru gadījumu aplūko analogi. Iespējami 2 gadījumi:

- $a-b=0$, tad $a=b$ un skaitļa ciparu summa ir $a+b$, kas ir pāra skaitlis, tātad tā nevar būt 3;
- $a-b \geq 11$, tad $a \geq 11$ un skaitļa ciparu summa ir lielāka kā 11, tātad tā nevar būt 3.

Piezīme. Uzdevumu var atrisināt arī, pārbaudot visus iespējamos gadījumus, kādus ciparus var saturēt desmitciparu skaitlis, kura ciparu summa ir 3: skaitlī ir viens (pirmais) cipars 3 un deviņas nulles; skaitlī ir viens cipars 1, viens cipars 2 un astoņas nulles; skaitlī ir trīs cipari 1 un septiņas nulles.

Uzdevumi

1. Rindā viens aiz otra bez tukšumiem ir uzrakstīti pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi no 1 līdz N, tādējādi veidojot vienu lielu skaitli (Piemēram, ja $N=12$, tad ir uzrakstīts skaitlis 123456789101**12**.).
Kāds ir mazākais iegūtais skaitlis, kas dalās ar **a)** 8; **b)** 18?

2. Rindā viens aiz otra bez tukšumiem ir uzrakstīti pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi no 1 līdz N, tādējādi veidojot vienu lielu skaitli (Piemēram, ja $N=12$, tad ir uzrakstīts skaitlis 123456789101**12**.).
Kāds ir mazākais iegūtais skaitlis, kas dalās ar **a)** 9; **b)** 24?

3. Dots naturāls skaitlis, kas dalās ar 99 un kura pēdējais cipars nav 0. Pierādi, ka, uzrakstot šī skaitļa ciparus pretējā secībā, arī iegūst skaitli, kas dalās ar 99.

4. Karlīna uzrakstīja divus skaitļus, kuru pierakstā nav izmantots cipars 0. Katru ciparu viņa aizstāja ar burtu: dažādus ciparus – ar dažādiem burtiem, vienādus – ar vienādiem. Viens no uzrakstītajiem skaitļiem *DUBĻUNNN* dalās ar 104. Pierādi, ka otrs skaitlis *BURBUĻVANNA* nedalās ar 56.

Uzdevumu atrisinājumi doti nākamajā lapā.

Uzdevumu atrisinājumi

1. Rindā viens aiz otra bez tukšumiem ir uzrakstīti pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi no 1 līdz N, tādējādi veidojot vienu lielu skaitli (Piemēram, ja $N = 12$, tad ir uzrakstīts skaitlis 1234567891011**12**.).
Kāds ir mazākais iegūtais skaitlis, kas dalās ar **a)** 8; **b)** 18?

Atrisinājums. a) Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8. Pārbaudot trīs ciparu veidotos skaitļus iegūstam, ka mazākais skaitlis, kas dalās ar 8, ir 123456.
b) Lai skaitlis dalītos ar 18, tam vienlaicīgi jādalās ar 2 un 9. Pirmais skaitlis, kas dalās ar 9 (pārbaudām pēc ciparu summas), ir 12345678. Tā kā šis ir arī pāra skaitlis, tad tas dalās ar 2 un līdz ar to tas dalās arī ar 18, jo skaitļi 2 un 9 ir savstarpēji pirmskaitļi. Tātad mazākais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 12345678.

2. Rindā viens aiz otra bez tukšumiem ir uzrakstīti pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi no 1 līdz N, tādējādi veidojot vienu lielu skaitli (Piemēram, ja $N = 12$, tad ir uzrakstīts skaitlis 1234567891011**12**.).
Kāds ir mazākais iegūtais skaitlis, kas dalās ar **a)** 9; **b)** 24?

Atrisinājums. a) Skaitlis dalās ar 9, ja tā ciparu summa dalās ar 9. Pārbaudot ciparu summas, iegūstam, ka mazākais skaitlis, kas dalās ar 9, ir 12345678, jo tā ciparu summa ir 36.
b) Lai skaitlis dalītos ar 24, tam vienlaicīgi jādalās ar 8 un 3. Pirmais skaitlis, kas dalās ar 8 (pārbaudām trīs ciparu veidotos skaitļus), ir 123456. Tā kā šī skaitļa ciparu summa ir $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, kas dalās ar 3, tad arī pats skaitlis dalās ar 3. Tātad skaitlis 123456 dalās ar 8 un ar 3, līdz ar to tas dalās arī ar 24, jo skaitļi 3 un 8 ir savstarpēji pirmskaitļi. Tātad mazākais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 123456.

3. Dots naturāls skaitlis, kas dalās ar 99 un kura pēdējais cipars nav 0. Pierādi, ka, uzrakstot šī skaitļa ciparus pretējā secībā, arī iegūst skaitli, kas dalās ar 99.

Atrisinājums. Ja skaitlis dalās ar 99, tad tas vienlaicīgi dalās gan ar 9, gan 11. Skaitlis dalās ar 9 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 9. Uzrakstot ciparus pretējā secībā, ciparu summa nemainīsies un arī iegūtais skaitlis dalīsies ar 9. Skaitlis dalās ar 11 tad un tikai tad, ja tā pāra un nepāra pozīcijās esošo ciparu summu starpība dalās ar 11. Pārrakstot skaitļa ciparus pretējā secībā, minētā īpašība saglabājas – pāra un nepāra pozīcijās esošo ciparu summu starpība dalīsies ar 11 un, tātad arī šis skaitlis dalīsies ar 11. Tā kā skaitlis vienlaicīgi dalās gan ar 9, gan 11 un skaitļi 9 un 11 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad iegūtais skaitlis dalās arī ar 99.

4. Karlīna uzrakstīja divus skaitļus, kuru pierakstā nav izmantots cipars 0. Katru ciparu viņa aizstāja ar burtu: dažādus ciparus – ar dažādiem burtiem, vienādus – ar vienādiem. Viens no uzrakstītajiem skaitļiem *DUBĻUNNN* dalās ar 104. Pierādi, ka otrs skaitlis *BURBUĻVANNA* nedalās ar 56.

Atrisinājums. Tā kā skaitlis *DUBĻUNNN* dalās ar $104 = 8 \cdot 13$, tad tas dalās arī ar 8. Ar 8 dalās skaitļi, kuru pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8, tātad skaitlis $\overline{NNN}$ jeb $100N + 10N + N = 111N$ dalās ar 8. Tā kā 111 ar 8 nedalās, tad ar 8 dalās N. Vienīgais cipars, kas nav 0 un kura veidotais viencipara skaitlis dalās ar 8, ir $N = 8$.
Ja skaitlis *BURBUĻVANNA* dalītos ar $56 = 8 \cdot 7$, tad tas dalītos arī ar 8, turklāt tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis $\overline{NNA}$ jeb $\overline{88A} = 880 + A$ dalītos ar 8. Tā kā 880 dalās ar 8, tad arī skaitlim A būtu jādalās ar 8, bet tas nav iespējams, jo A nevar būt ne 0, ne 8. Tātad skaitlis *BURBUĻVANNA* nedalās ar 56.