NEVIENĀDĪBU PIERĀDĪŠANA – PILNO KVADRĀTU ATDALĪŠANA

Teorija un piemēri 10.-12. klasei, gatavojoties Atklātajai matemātikas olimpiādei 2023./2024. m. g.

Skolas kursā galvenais uzsvars tiek likts uz nevienādību risināšanu, bet matemātikas olimpiādēs nevienādības vairumā gadījumu ir jāpierāda. Svarīgi ir saprast atšķirību starp nevienādības atrisināšanu un pierādīšanu.

Atrisināt nevienādību nozīmē atrast visus tās atrisinājumus un pierādīt, ka citu atrisinājumu nav. Visu nevienādības atrisinājumu apvienojumu sauc par šīs nevienādības atrisinājumu kopu.

Pierādīt nevienādību ar vienu vai vairākiem mainīgajiem nozīmē pamatot, ka nevienādība ir patiesa pie jebkurām pieļaujamajām mainīgo vērtībām.

Divas nevienādības sauc par **ekvivalentām**, ja tām ir viena un tā pati atrisinājumu kopa.

Bieži vien nevienādības pierāda, izmantojot ekvivalentus pārveidojumus. Tādējādi iegūst nevienādību, kuras patiesums ir viegli noskaidrojams ar elementāru spriedumu palīdzību.

Nevienādību ekvivalenti pārveidojumi

- Nevienādības kādu pusi aizstāj ar tai identisku izteiksmi.
- Nevienādības abām pusēm pieskaita vienu un to pašu skaitli vai izteiksmi, kas nemaina nevienādības definīcijas kopu.
- Nevienādības abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu pozitīvu skaitli (vai izteiksmi, kas ir pozitīva visām mainīgo vērtībām).
- Nevienādības abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu negatīvu skaitli (vai izteiksmi, kas ir negatīva visām mainīgo vērtībām).
- Nevienādības abas puses kāpina kvadrātā vai velk kvadrātsakni, ja definīcijas kopā dotās nevienādības abas puses ir nenegatīvas.
- Nevienādības abas puses kāpina m-tajā pakāpē vai velk m-tās pakāpes sakni, kur m ir naturāls nepāra skaitlis.
- Nevienādības abas puses kāpina m-tajā pakāpē vai velk m-tās pakāpes sakni, kur m ir naturāls pāra skaitlis un definīcijas kopā dotās nevienādības abas puses ir nenegatīvas.

Pilno kvadrātu atdalīšana

Viens no ekvivalento pārveidojumu veidiem ir pilno kvadrātu atdalīšana. Lai atdalītu pilno kvadrātu, izmanto saīsinātās reizināšanas formulas:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Bieži vien tikai ar formulu izmantošanu nepietiek, tāpēc jāizmanto arī spriedumi. Visbiežāk izmantotie ir šādi:

- ja A ir algebriska izteiksme, tad $A^2 \geq 0$;
- ja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ir algebriskas izteiksmes, tad $A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2 \geq 0$;
- ja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ir algebriskas izteiksmes un $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ir nenegatīvas izteiksmes, tad $c_1A_1^2 + c_2A_2^2 + \cdots + c_nA_n^2 \geq 0$.

Piezīme. $A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2 = 0$ tad un tikai tad, ja $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0$.

Uzdevumu piemēri

1. Pierādīt nevienādību $x^2 + 8x + y^2 - 2y + 17 \geq 0$ visiem reāliem skaitļiem x un y.

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 \geq 0;$$

$$(x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2) + (y^2 - 2y \cdot 1 + 1^2) \geq 0;$$

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad pēdējās nevienādības kreisajā pusē ir divu nenegatīvu skaitļu summa, kas arī ir nenegatīvs skaitlis. Tātad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x un y.

2. Pierādīt nevienādību $x^2 - xy + y^2 \geq 0$ visiem reāliem skaitļiem x un y.

1. atrisinājums. Reizinām nevienādības abas puses ar 2 un veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 \geq 0;$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + x^2 + y^2 \geq 0;$$

$$(x - y)^2 + x^2 + y^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad pēdējās nevienādības kreisajā pusē ir trīs nenegatīvu skaitļu summa, kas arī ir nenegatīvs skaitlis. Tātad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x un y.

2. atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}y^2\right) + \frac{3}{4}y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad $\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 \geq 0$ un $\frac{3}{4}y^2 \geq 0$. Divu nenegatīvu skaitļu summa ir nenegatīva, tāpēc $\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x un y.

3. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem a, b un c izpildās nevienādība $a + \frac{bc}{a} \geq \frac{4bc}{b+c}$.

Atrisinājums. Abas nevienādības puses reizinām ar pozitīvu izteiksmi $a(b + c)$:

$$a^2(b + c) + bc(b + c) \geq 4abc;$$

$$a^2b + a^2c + b^2c + bc^2 - 4abc \geq 0;$$

$$a^2b - 2abc + bc^2 + a^2c - 2abc + b^2c \geq 0;$$

$$b(a^2 - 2ac + c^2) + c(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0;$$

$$b(a - c)^2 + c(a - b)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs un $b > 0, c > 0$, tad $b(a - c)^2 \geq 0$ un $c(a - b)^2 \geq 0$. Divu nenegatīvu skaitļu summa ir nenegatīva, tāpēc pēdējā iegūtā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem pozitīviem skaitļiem a, b un c.

4. Pierādīt, ka $2x^4 + 1 \geq 2x^3 + x^2$ visiem reāliem skaitļiem x.

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$2x^4 + 1 - 2x^3 - x^2 \geq 0;$$

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0;$$

$$x^2(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 1)^2 \geq 0;$$

$$x^2(x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad $x^2(x-1)^2 \geq 0$ un $(x^2 - 1)^2 \geq 0$. Divu nenegatīvu skaitļu summa ir nenegatīva, tāpēc pēdējā iegūtā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x.

5. Pierādīt, ka $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \geq 0$ visiem reāliem skaitļiem x un y.

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2(x + y) + 2y^2 + 4y + 3 \geq 0;$$

$$((x + y)^2 + 2(x + y) + 1) + 2(y^2 + 2y + 1) \geq 0;$$

$$(x + y + 1)^2 + 2(y + 1)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad $(x + y + 1)^2 \geq 0$ un $2(y + 1)^2 \geq 0$. Divu nenegatīvu skaitļu summa ir nenegatīva, tāpēc pēdējā iegūtā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x un y.

Citi avoti

Lai pilnvērtīgāk apgūtu tematu par nevienādībām, ļoti ieteicams patstāvīgi risināt, piemēram, grāmatā A. Ločmele, I. Palma, L. Ramāna, A. Andžāns “Nevienādību pierādīšanas metodes” dotos vingrinājumus un uzdevumus. Grāmata pieejama arī elektroniski NMS mājas lapā sadaļā Arhīvs un materiāli.

Uzdevumi

1. Pierādīt, ka $9x^6 - x^3 + 1 > 0$ visiem reāliem x!

2. Pierādīt, ka $x^2 + 2y^2 + 2xy + y + 1 > 0$, ja x, y – reāli skaitļi!

3. Pierādīt, ka $x^4 + 2x^3y + 2xy^3 + y^4 \geq 6x^2y^2$, ja x un y ir reāli pozitīvi skaitļi!

4. Pierādīt, ka $x^2 + y^2 + 4 \geq 2x - 2y - xy$, ja x, y – reāli skaitļi!

Uzdevumu atrisinājumi doti nākamajā lapā.

Uzdevumu atrisinājumi

1. Pierādīt, ka $9x^6 - x^3 + 1 > 0$ visiem reāliem x!

1. atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$(3x^3)^2 - 2 \cdot 3x^3 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{35}{36} > 0;$$
$$\left(3x^3 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{35}{36} > 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs un $\frac{35}{36}$ ir pozitīvs skaitlis, tad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x.

2. atrisinājums. Reizinām nevienādības abas puses ar 2 un veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$18x^6 - 2x^3 + 2 > 0;$$
$$x^6 - 2x^3 + 1 + 17x^6 + 1 > 0;$$
$$(x^3 - 1)^2 + 17x^6 + 1 > 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, saskaitāmais $17x^6$ ir nenegatīvs un skaitlis 1 ir pozitīvs skaitlis, tad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x.

2. Pierādīt, ka $x^2 + 2y^2 + 2xy + y + 1 > 0$, ja x, y – reāli skaitļi!

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$(x^2 + 2xy + y^2) + y^2 + y + 1 > 0;$$
$$(x + y)^2 + \left(y^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \frac{3}{4} > 0;$$
$$(x + y)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs un $\frac{3}{4}$ ir pozitīvs skaitlis, tad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x un y.

3. Pierādīt, ka $x^4 + 2x^3y + 2xy^3 + y^4 \geq 6x^2y^2$, ja x un y ir reāli pozitīvi skaitļi!

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$(x^4 - 2x^2y^2 + y^4) + 2x^3y + 2xy^3 - 4x^2y^2 \geq 0;$$
$$(x^2 - y^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2 - 2xy) \geq 0;$$
$$(x^2 - y^2)^2 + 2xy(x - y)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs un $xy > 0$ pēc dotā, tad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem pozitīviem skaitļiem x un y.

4. Pierādīt, ka $x^2 + y^2 + 4 \geq 2x - 2y - xy$, ja x, y – reāli skaitļi!

Atrisinājums. Reizinām nevienādības abas puses ar 2 un veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$2x^2 + 2y^2 + 8 \geq 4x - 4y - 2xy;$$
$$x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 4x + y^2 + 4y + 8 \geq 0;$$
$$(x + y)^2 + (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 4y + 4) \geq 0;$$
$$(x + y)^2 + (x - 2)^2 + (y + 2)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad pēdējās nevienādības kreisajā pusē ir trīs nenegatīvu skaitļu summa, kas arī ir nenegatīvs skaitlis. Tātad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x un y.