SKAITĻA PIERAKSTS

Teorija un piemēri 5.-9. klasei, gatavojoties Atklātajai matemātikas olimpiādei 2023./2024. m. g.

5.-7. klase

Risinot uzdevumus jāzina atšķirība starp skaitli un ciparu, jāzina, kas ir naturāls skaitlis, jāprot salīdzināt divus naturālus skaitļus, novērtēt izteiksmes vērtību.

Atceries! Cipari ir simboli, kurus izmantojam skaitļu pierakstīšanai. Ir desmit cipari: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Līdzīgi kā no burtiem mēs veidojam vārdus, tā no cipariem mēs veidojam skaitļus. Piemēram, divciparu skaitlis 14, viencipara skaitlis 7.

Atceries! Naturāli skaitļi ir skaitļi, kas rodas skaitīšanas rezultātā: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; … Iegaumē, ka mazākais naturālais skaitlis ir 1, skaitlis 0 nav naturāls skaitlis.

Uzdevumu piemēri

1. Divu naturālu skaitļu pierakstā izmantoti tikai cipari 2, 3, 7 un 8. Vai var gadīties, ka viens skaitlis ir tieši trīs reizes lielāks nekā otrs skaitlis?

Atrisinājums. Ja skaitļa pēdējais cipars ir 2, 3, 7 vai 8, tad trīs reizes lielāka skaitļa pēdējais cipars ir attiecīgi 6, 9, 1 vai 4, bet pēc uzdevuma nosacījumiem nevienu no šiem cipariem nevar izmantot skaitļu pierakstā. Tātad uzdevumā prasītais nav iespējams.

2. Atrodi vislielāko piecciparu skaitli, kuram ceturtais cipars (desmitu cipars) ir lielāks nekā piektais cipars (vienu cipars), trešais cipars lielāks nekā ceturtā un piektā cipara summa, otrais cipars ir lielāks nekā trešā, ceturtā un piektā cipara summa, bet pirmais cipars ir lielāks nekā visu pārējo ciparu summa!

Atrisinājums. Meklētais piecciparu skaitlis ir 95210. Pamatosim, ka vēl lielāku skaitli nevar iegūt. Tā kā jāmeklē vislielākais skaitlis, tad pirmajam ciparam jābūt iespējami lielam, tas ir, 9. Tātad pārējo četru ciparu summa nedrīkst pārsniegt 8. Visiem cipariem jābūt dažādiem, jo katrs cipars ir lielāks nekā tam sekojošo ciparu summa. Tūkstošu cipars nevar būt lielāks kā 5, jo jau $8-6=2$, ko nevar izteikt kā trīs dažādu ciparu summu. Tātad, lai atrastu lielāko piecciparu skaitli, tūkstošu ciparam jābūt 5 un tas nozīmē, ka simtu, desmitu un vienu cipars attiecīgi var būt tikai 2, 1 un 0. Līdz ar to lielākais piecciparu skaitlis, kam izpildās prasītās īpašības, ir 95210.

3. Vai ir tāds naturāls četrciparu skaitlis ar šādu īpašību: ja skaitļa pēdējo ciparu pārceļ uz skaitļa sākumu, tad iegūst četrciparu skaitli, kas ir 6 reizes mazāks nekā sākotnējais skaitlis?

Atrisinājums. Nē, nav tāds skaitlis. Apzīmēsim sākotnējo četrciparu skaitli ar x, bet iegūto četrciparu skaitli ar y. Tādā gadījumā $6\cdot y=x$. Tā kā vienādojuma kreisajā pusē iegūstam pāra skaitli, tad x ir pāra skaitlis. Tātad x pēdējais cipars ir pāra cipars. Tas nevar būt 0, jo tad y nebūtu četrciparu skaitlis. Tātad četrciparu skaitļa x pēdējā cipara mazākā iespējamā vērtība ir 2 un tas nozīmē, ka y pirmais cipars nav mazāks 2. Pat tādā gadījumā, ja mēs izvēlētos pašu mazāko četrciparu skaitli ar šādu īpašību, tas ir, skaitli 2000, to reizinot ar 6, jau iegūst piecciparu skaitli, bet x ir četrciparu skaitlis, tātad tas nav iespējams.

4. Līdzīgi kā rallijā katrai mašīnai piešķir sacensību numuru, tā Ziemassvētku vecītis arī saviem ātrajiem rikšotājiem ziemeļbriežiem ir piešķīris numurus.
Ziemeļbriedis Rūdolfs zina, ka
1) viņa numurs ir sešciparu skaitlis, kas vienādi lasāms gan no kreisās, gan no labās puses;
2) tas dalās ar 3;
3) nosvītrojot pirmo un pēdējo ciparu, iegūst četrciparu skaitli, kura visi pirmreizinātāji ir vienādi ar 11.
Kāds numurs var būt piešķirts Rūdolfam?
Atrisinājums. Sāksim ar 3) nosacījumu. Tā kā $11 \cdot 11 = 121$ ir trīsciparu skaitlis un $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 = 14641$ ir piecciparu skaitlis, tad vienīgā iespēja, ka iegūts četrciparu skaitlis $11 \cdot 11 \cdot 11 = 1331$. Tad, izmantojot 1) nosacījumu, meklēto sešciparu skaitli varam pierakstīt $\overline{a1331a}$. No 2) nosacījuma šim skaitlim jādalās ar 3. Skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3. Tātad $a + 1 + 3 + 3 + 1 + a = 8 + 2 \cdot a$ jādalās ar 3. Ja cipars a ir 0, 1, 3, 4, 6, 7 vai 9, tad $8 + 2 \cdot a$ nedalās ar 3; ja $a = 2$, tad $8 + 2 \cdot a = 12$, kas dalās ar 3; ja $a = 5$, tad $8 + 2 \cdot a = 18$, kas dalās ar 3; ja $a = 8$, tad $8 + 2 \cdot a = 24$, kas dalās ar 3. Tātad Rūdolfam var būt piešķirts vai nu numurs 213312, vai 513315, vai 813318.

Ievēro! Ja skaitlī nav zināmi kādi cipari, tos var apzīmēt ar burtiem, un tādā gadījumā virs skaitļa tiek vilkta horizontāla svītra, piemēram, trīsciparu skaitlis $\overline{xyz}$, četrciparu skaitlis $\overline{abcd}$.

5. Pierādi, ka, uzrakstot vienu otram galā divus naturālus divciparu skaitļus, iegūst lielāku skaitli nekā šos pašus divciparu skaitļus sareizinot!
Atrisinājums. Pirmo divciparu skaitli apzīmēsim ar $\overline{ab}$, bet otro apzīmēsim ar $\overline{cd}$. Uzrakstot šos skaitļus vienu otram galā, iegūsim skaitli $\overline{abcd}$, kas ir lielāks nekā četrciparu skaitlis, kuram pēdējie divi cipari ir nulles, tas ir, $\overline{ab00}$. Skaitli, kuram pēdējie divi cipari ir nulles, varam izteikt kā $\overline{ab00} = \overline{ab} \cdot 100$, bet divciparu skaitļa reizinājums ar trīsciparu skaitli ir lielāks nekā divu divciparu skaitļu reizinājums $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$. Līdz ar to esam pierādījuši, ka $\overline{abcd} > \overline{ab} \cdot \overline{cd}$.

8.-9. klase

Ievēro! Divciparu skaitli varam izteikt kā $\overline{ab} = 10a + b$, trīsciparu skaitli varam izteikt kā $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ utt. Piemēram, $2023 = 1000 \cdot \mathbf{2} + 100 \cdot \mathbf{0} + 10 \cdot \mathbf{2} + 1 \cdot \mathbf{3}$.

Uzdevumu piemēri

6. Zelmas dzīvokļa numurs ir divciparu skaitlis un tam piemīt šāda īpašība: saskaitot tā ciparu summu un tā ciparu reizinājumu, atkal iegūst šo pašu skaitli. Atrodi visus tādus divciparu skaitļus, kam piemīt šāda īpašība!
Atrisinājums. Apzīmējot meklēto divciparu skaitli ar $\overline{ab}$, iegūstam vienādojumu $(a + b) + ab = 10a + b$ jeb $ab - 9a = 0$. Tā kā $a \neq 0$ (jo tas ir divciparu skaitļa pirmais cipars), tad, abas vienādības puses dalot ar a, iegūstam, ka $b - 9 = 0$ jeb $b = 9$. Tā kā a var būt jebkurš nenulles cipars, tad uzdevumā dotā īpašība piemīt visiem divciparu skaitļiem, kuru vienu cipars ir 9, tas ir, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.

7. Leonards izvēlējās patvaļīgu trīsciparu skaitli, pareizināja to ar 2 un tam galā pierakstīja sākotnējo skaitli. Vai viņa iegūtais skaitlis noteikti dalās ar 23?
Atrisinājums. Jā, noteikti dalās. Apzīmējam sākotnējo skaitli ar $\overline{abc}$. Skaitlim $2 \cdot \overline{abc}$ pierakstīt galā $\overline{abc}$ ir tas pats, kas skaitli $2 \cdot \overline{abc}$ reizināt ar 1000 un tad tam pieskaitīt $\overline{abc}$. Tātad iegūstam skaitli $2 \cdot \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} =$ $= 2001 \cdot \overline{abc}$. Tā kā reizinātājs 2001 dalās ar 23 ($2001 : 23 = 87$), tātad arī iegūtais skaitlis $2001 \cdot \overline{abc}$ noteikti dalās ar 23.

8. Četrciparu skaitlim pārlika ciparus citā secībā. Pierādi, ka sākotnējā un iegūtā skaitļa starpība dalās ar 9.

Atrisinājums. Apzīmējam četrciparu skaitli ar $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$. Vienādības labās puses summu uzrakstām citādāk: $\overline{abcd} = (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d)$.

Uzrakstām citu četrciparu skaitli, kas sastāv no šiem pašiem cipariem un līdzīgā veidā sadalām saskaitāmajos, kur viens no saskaitāmajiem ir visu četru ciparu summa $(a + b + c + d)$. Aprēķinot abu šo skaitļu starpību, ievērojam, ka saskaitāmie $(a + b + c + d)$ saīsinās. Katrs no atlikušajiem saskaitāmajiem dalās 9, jo katrs saskaitāmais satur kādu no reizinātājiem 9, 99, 999 un, ja viens no reizinātājiem dalās 9, tad arī reizinājums dalās ar 9. Tā kā katrs no saskaitāmajiem dalās ar 9, tad arī aprēķinātā starpība dalās ar 9.

9. Skaitļi A un B ir naturāli divciparu skaitļi. Skaitli X iegūst, pierakstot skaitlim A galā skaitli B; skaitli Y iegūst, pierakstot skaitlim B galā skaitli A. Zināms, ka $X - Y$ dalās ar 91. Pierādi, ka $A = B$.

Atrisinājums. Apzīmējam $A = \overline{ab}$, $B = \overline{cd}$, tad $X = \overline{abcd}$, bet $Y = \overline{cdab}$. Līdz ar to

$$X - Y = \overline{abcd} - \overline{cdab} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} - \overline{cd} \cdot 100 - \overline{ab} = 99 \cdot \overline{ab} - 99 \cdot \overline{cd} = 99 \cdot (\overline{ab} - \overline{cd}).$$

No uzdevumā dotā $99 \cdot (\overline{ab} - \overline{cd})$ dalās ar 91. Tā kā skaitļu 99 un 91 lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad $(\overline{ab} - \overline{cd})$ dalās ar 91. Ievērojam, ka $\overline{ab} - \overline{cd} \leq 89$ (89 iegūst, ja atņem no lielākā divciparu skaitļa mazāko divciparu skaitli). Tāpēc vienīgā iespēja, ka $\overline{ab} - \overline{cd} = 0$ jeb $\overline{ab} = \overline{cd}$, kas arī bija jāpierāda.

Uzdevumi

1. Skaitlim 2016201620172017 izsvītroja vienu vai vairākus ciparus tā, ka iegūtais skaitlis dalās ar 3. Kādu lielāko skaitli varēja iegūt?

2. Skaitlim 201720182019 izsvītroja vienu vai vairākus ciparus tā, ka iegūtais skaitlis dalās ar 9. Kādu lielāko skaitli varēja iegūt?

3. Piecciparu skaitļa, kas dalās ar 13, pirmais cipars ir vienāds ar ceturto, bet otrais – ar piekto. Kāds ir šī skaitļa trešais cipars? Atrodi visas iespējamās vērtības un pamato, ka citu nav!

4. Ja no piecciparu skaitļa, kam pirmais cipars vienāds ar ceturto, bet otrais – ar piekto, atņem vieninieku tad iegūtais skaitlis dalās ar 11. Kāds var būt sākotnējā piecciparu skaitļa trešais cipars? Atrodi visus iespējamos variantus un pamato, ka citu nav!

Uzdevumu atrisinājumi doti nākamajā lapā.

Uzdevumu atrisinājumi

1. Skaitlim 2016201620172017 izsvītroja vienu vai vairākus ciparus tā, ka iegūtais skaitlis dalās ar 3. Kādu lielāko skaitli varēja iegūt?

Atrisinājums. Lielākais skaitlis, kādu var iegūt, ir 201620162017017. Pamatosim, ka lielāku skaitli nevar iegūt. Lai iegūtu lielāko skaitli, jāizsvītro pēc iespējas mazāk cipari. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai jādalās ar 3. Dotā skaitļa ciparu summa ir 38. Vienīgā iespēja izsvītrot vienu ciparu, lai iegūtā skaitļa ciparu summa un tātad arī pats skaitlis dalītos ar 3, ir izsvītrot ciparu 2. No četriem skaitļiem, ko var iegūt, izsvītrojot divnieku (16201620172017, 201601620172017, 201620160172017, 201620162017017), lielākais ir 201620162017017.

2. Skaitlim 201720182019 izsvītroja vienu vai vairākus ciparus tā, ka iegūtais skaitlis dalās ar 9. Kādu lielāko skaitli varēja iegūt?

Atrisinājums. Lielākais skaitlis, kādu var iegūt, ir 2012012019. Pamatosim, ka lielāku skaitli nevar iegūt. Lai iegūtu lielāko skaitli, jāizsvītro pēc iespējas mazāk cipari. Lai skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai jādalās ar 9. Dotā skaitļa ciparu summa ir 33. Nav iespējams izsvītrot vienu ciparu, lai iegūtā skaitļa ciparu summa dalītos ar 9. Vienīgā iespēja izsvītrot divus ciparus, lai iegūtā skaitļa ciparu summa un tātad arī pats skaitlis dalītos ar 9, ir izsvītrot ciparus 7 un 8.

3. Piecciparu skaitļa, kas dalās ar 13, pirmais cipars ir vienāds ar ceturto, bet otrais – ar piekto. Kāds ir šī skaitļa trešais cipars? Atrodi visas iespējamās vērtības un pamato, ka citu nav!

Atrisinājums. Doto piecciparu skaitli varam uzrakstīt kā $\overline{abcab}$. Pārveidojam šo skaitli

$$\overline{abcab} = \overline{ab} \cdot 1000 + c \cdot 100 + \overline{ab} = 1001 \cdot \overline{ab} + 100c.$$

Tā kā 1001 dalās ar 13 ($1001 : 13 = 77$), tad, lai viss skaitlis dalītos ar 13, arī saskaitāmajam $100c$ jādalās ar 13. Tā kā 100 un 13 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad c jādalās ar 13, tas iespējams tikai tad, kad $c = 0$.

4. Ja no piecciparu skaitļa, kam pirmais cipars vienāds ar ceturto, bet otrais – ar piekto, atņem vieninieku tad iegūtais skaitlis dalās ar 11. Kāds var būt sākotnējā piecciparu skaitļa trešais cipars? Atrodi visus iespējamos variantus un pamato, ka citu nav!

Atrisinājums. Doto piecciparu skaitli varam uzrakstīt kā $\overline{abcab}$. Pārveidojam šo skaitli

$$\overline{abcab} - 1 = \overline{ab} \cdot 1000 + c \cdot 100 + \overline{ab} - 1 = \overline{ab} \cdot 1001 + 100c - 1 = \overline{ab} \cdot 1001 + 99c + c - 1.$$

Tā kā 1001 dalās ar 11 ($1001 : 11 = 91$) un 99 dalās ar 11, tad, lai viss skaitlis dalītos ar 11, arī $c - 1$ jādalās ar 11. Tas iespējams tikai tad, ja $c = 1$.