LINEĀRAS FUNKCIJAS UN KVADRĀTFUNKCIJAS

Teorija un piemēri 7.-12. klasei, gatavojoties Novada olimpiādei 2020./2021. m. g.

Jau skolas kursā, sākot ar 7. klasi, apgūsti dažādas zināšanas par funkcijām. Skolā galvenais uzsvars ir likts uz funkcijas grafiku konstruēšanu un informācijas nolasīšanu no grafika, piemēram, no grafika noteikt argumenta vērtības, ar kurām funkcijas vērtība ir pozitīva/negatīva, funkcija ir augoša/dilstoša, krustpunktus ar koordinātu asīm.
Šogad olimpiādē skolā apgūtās zināšanas būs jālieto nestandarta uzdevumos par lineārām funkcijām un kvadrātfunkcijām.

Atgādinām svarīgāko par lineāru funkciju.

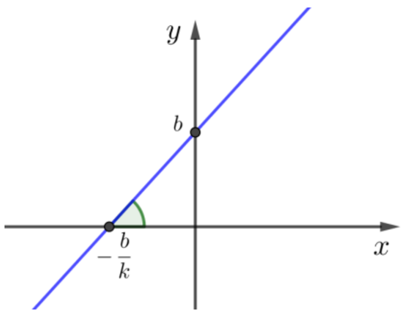
Definīcija. Par lineāru funkciju sauc funkciju, kuru var definēt ar formulu $\boldsymbol{y = kx + b}$, kur x ir neatkarīgais mainīgais, bet k un b ir kaut kādi reāli skaitļi.

Lineāras funkcijas grafiks ir **taisne**.

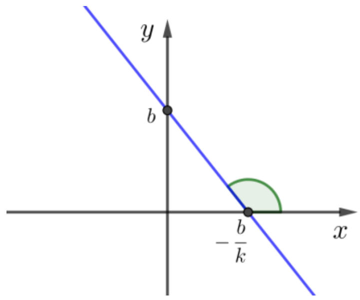
Koeficientu k sauc par **taisnes virziena koeficientu**. No koeficienta k ir atkarīgs lineārās funkcijas $y = kx + b$ grafika novietojums koordinātu plaknē:

- ja $k > 0$, tad funkcija ir augoša,
- ja $k < 0$, tad funkcija ir dilstoša,
- ja $k = 0$, tad taisne ir paralēla x asij.

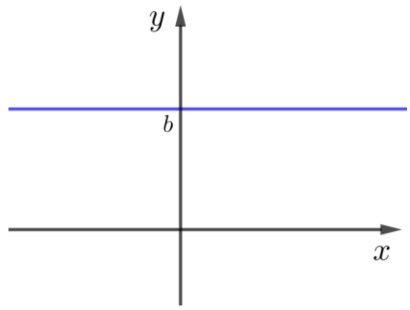
Lineāras funkcijas $y = kx + b$ grafiks krusto y asi punktā, kura koordinātas ir $(0; b)$, bet x asi punktā, kura koordinātas ir $(-\frac{b}{k}; 0)$.



$k > 0$



$k < 0$

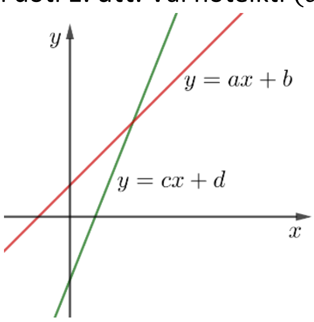


$k = 0$

Lai taisne $y = kx + b$ ietu caur punktu $(m; n)$, jāizpildās vienādībai $n = k \cdot m + b$.

Uzdevumu piemēri

1. Funkciju $y = ax + b$ un $y = cx + d$ grafiki doti 1. att. Vai noteikti $(c - a)(b - d) > 0$?



1. att.

1. atrisinājums. Jā, noteikti. Ievērojam, ka

- taisne $y = ax + b$ (sarkanā) krusto y asi punktā $(0; b)$, tātad $b > 0$,
- taisne $y = cx + d$ (zaļā) krusto y asi punktā $(0; d)$, tātad $d < 0$.

Līdz ar to $b - d > 0$, jo, no pozitīva skaitļa atņemot negatīvu skaitli, iegūst pozitīvu skaitli.

Tā kā funkcijas $y = cx + d$ (zaļā) vērtības palielinās straujāk nekā funkcijas $y = ax + b$ (sarkanā) vērtības, tad taisnes $y = cx + d$ virziena koeficients c ir lielāks nekā taisnes $y = ax + b$ virziena koeficients a. Līdz ar to $c - a > 0$.

Tātad nevienādība $(c - a)(b - d) > 0$ noteikti ir patiesa kā divu pozitīvu skaitļu reizinājums.

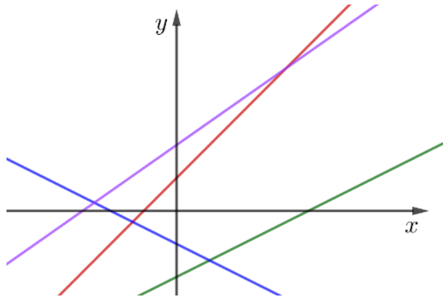
2. atrisinājums *(vidusskolēniem).* Jā, noteikti. Apskatot vienādojumu $ax + b = cx + d$, nosakām taišņu krustpunkta x koordinātu:

$$ax + b = cx + d,$$
$$cx - ax = b - d,$$
$$(c - a)x = b - d.$$

Abas vienādojuma puses dalot ar $c - a \neq 0$, jo taisnes ir krustiskas, iegūstam, ka $x = \frac{b-d}{c-a}$. Tā kā taišņu krustpunkts atrodas pirmajā kvadrantā, tad $x > 0$ un secinām, ka arī $\frac{b-d}{c-a} > 0$. Iegūtā nevienādība ir ekvivalenta nevienādībai $(b - d)(c - a) > 0$, kas arī bija jāpierāda.

Iegaumē!
Ja uzdevumā ir jautājums „Vai noteikti...?”, „Vai vienmēr...?” un atbilde ir
- „Nē”, tad jāparāda viens pretpiemērs, kurā uzdevuma prasības neizpildās;
- „Jā”, tad ar dažu atsevišķu piemēru apskatīšanu, kuros prasītais izpildās, nepietiek, bet ir vajadzīgs pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem, ka jebkurā gadījumā prasītais izpildīsies.

2. Vai var gadīties, ka 2. att. dotās taisnes ir funkciju $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + d$ un $y = dx + a$ grafiki?



2. att.

Atrisinājums. Nē, nevar. No vienas puses, a, b, c, d ir taišņu virziena koeficienti, tātad tieši vienam no tiem jābūt negatīvam, jo viena taisne (zilā) ir dilstoša. No otras puses, a, b, c, d ir taišņu krustpunktu ar y asi ordinātas vērtības, tātad tieši diviem no šiem skaitļiem jābūt negatīviem, jo divas taisnes (zilā un zaļā) krusto y asi punktos, kuru ordinātas vērtība ir negatīva. Iegūta pretruna, tātad attēlotie grafiki nevar būt doto funkciju grafiki.

Iegaumē!
Ja uzdevumā ir jautājums „Vai var...?”, „Vai iespējams...?” un atbilde ir
- „Jā”, tad risinājumā jāparāda piemērs, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas;
- „Nē”, tad ar dažu atsevišķu piemēru apskatīšanu, kuros neizdodas panākt vēlamo, nepietiek, bet ir vajadzīgs pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem, ka tiešām nekādā gadījumā prasīto nebūs iespējams iegūt.

3. Apskatām divas lineāras funkcijas y_1 un y_2, kas definētas visām reālām x vērtībām.
a) Vai var gadīties, ka $y_1 + y_2$ nav lineāra funkcija?
b) Vai var gadīties, ka $y_1 \cdot y_2$ ir lineāra funkcija?
Atrisinājums. a) Nē, nevar. Tā kā y_1 un y_2 ir lineāras funkcijas, tad to formulas ir $y_1 = ax + b$ un $y_2 = cx + d$. Apskatām šo funkciju summu $y_1 + y_2 = ax + b + cx + d = (a + c)x + (b + d)$, kas ir lineāra funkcija.
b) Jā, var, piemēram, $y_1 = x$ un $y_2 = 1$, tad $y_1 \cdot y_2 = x \cdot 1 = x$, kas ir lineāra funkcija.

4. Aplūkosim lineāras funkcijas $y = ax + b$, kur $2a + b = 2020$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir kopīgs punkts!
Atrisinājums. Aplūkojam funkcijas $y = ax + b$ vērtību, ja argumenta vērtība $x = 2$:

$$y = 2a + b = 2020.$$

Esam ieguvuši, ka argumenta vērtībai 2 jebkuras dotās funkcijas vērtība būs 2020. Tātad punkts (2; 2020) ir kopīgs visu funkciju grafikiem.

Atgādinām svarīgāko par kvadrātfunkciju.

Definīcija. Funkciju, kuru apraksta vienādojums $y = ax^2 + bx + c$, kur $a, b, c \in \mathbb{R}$ un $a \neq 0$, sauc par **kvadrātfunkciju.**

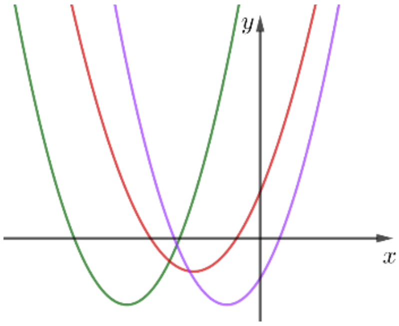
Kvadrātfunkcijas grafiku sauc par **parabolu**.

Kvadrātfunkcijas $y = ax^2 + bx + c$ īpašības

- Parabolas zari vērsti uz augšu, ja $a > 0$, zari vērsti uz leju, ja $a < 0$.
- Parabolas virsotnes koordinātas ir $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$, kur $D = b^2 - 4ac$.
- Kvadrātfunkcijas grafiks krusto y asi punktā $(0; c)$.
- Parabolas novietojumu attiecībā pret x asi nosaka diskriminants:
  - ja $D > 0$, tad parabola krusto x asi divos punktos,
  - ja $D < 0$, tad parabola nekrusto x asi,
  - ja $D = 0$, tad parabola pieskaras x asij.

Uzdevumu piemēri

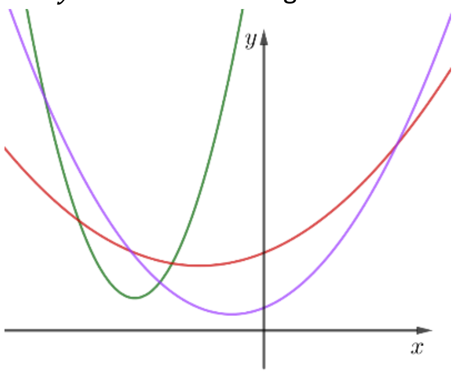
5. Vai var gadīties, ka 3. att. doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ un $y = cx^2 + ax + b$ grafiki? Grafiki nav doti mērogā.



3. att.

Atrisinājums. Nē, nevar. Tā kā visām parabolām zari vērsti uz augšu, tad $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, bet tādā gadījumā neviena no parabolām nevar krustot y asi punktā, kuram $y < 0$ (lillā grafiks).

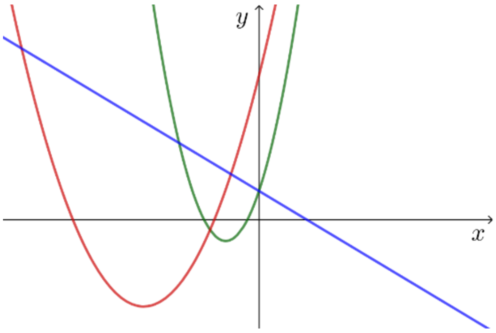
6. Pieņemsim, ka 4. att. dotās līknes ir kvadrātfunkciju grafiki, tie nav doti mērogā. Vai tie var būt funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ un $y = cx^2 + ax + b$ grafiki?



4. att.

Atrisinājums. Nē, nevar. Ievērojam, ka zīmējumā redzami visi seši iespējamie parabolu krustpunkti, tātad citu krustpunktu nav, taču visu doto funkciju vērtības sakrīt, ja $x = 1$. Tā kā dotie trīs grafiki neiet caur vienu punktu, tad tie nevar būt uzdevumā doto funkciju grafiki.

7. Vai var gadīties, ka 5. att. ir doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = cx^2 + bx + a$ un $y = bx + c$ grafiki? Funkciju grafiki nav zīmēti mērogā.



5. att.

1. atrisinājums. Nē, nevar. Tā kā parabolas, kas ir zaļā krāsā, un taisnes krustpunkts atrodas uz y ass, tad tā koordinātas ir $(0; c)$ un atbilstošās parabolas formula ir $y = ax^2 + bx + c$. Atradīsim grafiku $y = ax^2 + bx + c$ un $y = bx + c$ otra krustpunkta x koordinātu:

$$ax^2 + bx + c = bx + c,$$
$$ax^2 = 0,$$
$$x = 0.$$

Esam ieguvuši, ka abu funkciju grafiki krustojas tikai vienā punktā. Iegūta pretruna, jo parabola un taisne krustojas divos punktos.

2. atrisinājums. Nē, nevar. Ievērojam, ka funkcija $y = bx + c$ ir dilstoša funkcija un taisne krusto y asi punktā, kura ordinātas vērtība ir pozitīva, tātad $b < 0$.

Apskatām funkciju $y = ax^2 + bx + c$. Tā kā doto parabolu zari ir vērsti uz augšu un krustpunktu ar y asi ordinātas vērtība ir pozitīva, tad $a > 0$. Aprēķinām šīs parabolas virsotnes abscisas vērtību $x_v = -\frac{b}{2a}$. Tā kā virsotne atrodas trešajā kvadrantā, tad $x_v < 0$ un, ņemot vērā, ka $a > 0$, secinām, ka $b > 0$. Esam ieguvuši pretrunu ar to, ka $b < 0$ (lineārā funkcija dilstoša), tātad attēlā nevar būt doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = cx^2 + bx + a$ un $y = bx + c$ grafiki.

8. Aplūkosim funkcijas $y = x^2 + ax + b$, kur $a + 2b = 2020$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir kopīgs punkts!

Atrisinājums. Aplūkojam funkcijas $y = x^2 + ax + b$ vērtību, ja $x = \frac{1}{2}$:

$$y = \frac{1}{4} + \frac{a}{2} + b = \frac{1}{2}(a + 2b) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 2020 + \frac{1}{4} = 1010\frac{1}{4}.$$

Esam ieguvuši, ka argumenta vērtībai $x = \frac{1}{2}$ jebkuras dotās funkcijas vērtība būs $1010\frac{1}{4}$. Tātad punkts $\left(\frac{1}{2};\ 1010\frac{1}{4}\right)$ ir kopīgs visu doto funkciju grafikiem.

9. Apskata visas funkcijas $y = ax^2 + x + b$, kur koeficientus a un b saista sakarība $a + 2b = 2020$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti!

Atrisinājums. Ievērojam:

- ja $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tad $y = a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + b = \left(\frac{1}{2}a + b\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1010 + \frac{1}{\sqrt{2}}$,
- ja $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, tad $y = a \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} + b = \left(\frac{1}{2}a + b\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1010 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tātad punkti $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1010 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1010 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ir kopīgi visu doto funkciju grafikiem.

Piezīmes.

1. Ievērot to, ka apskatītie punkti pieder visām dotajām parabolām, var, pamanot, ka izteiksmes $\frac{1}{2}a + b$ vērtība ir 1010 neatkarīgi no a un b vērtībām. Tad, ņemot $x^2 = \frac{1}{2}$, funkcijas vērtība nebūs atkarīga no konkrētajām a un b vērtībām.
2. Kopīgos punktus $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1010 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1010 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ var iegūt arī no dotajām parabolām, paņemot divas patvaļīgas (piemēram, $a = 0,\ b = 1010$ un $a = 2,\ b = 1009$) un atrodot to krustpunktus (tas ir, atrisinot kvadrātvienādojumu).

Tālāk dotais materiāls vairāk paredzēti 11.-12. klases skolēniem.

Dažreiz svarīgi ir noskaidrot tikai to, vai funkcijas grafiks krusto x asi vai arī vienādojumam eksistē atrisinājums. Šādā gadījumā svarīgs ir funkcijas nepārtrauktības jēdziens un nākamā teorēma.

Bolcano teorēma
Ja funkcija f ir intervālā $[a; b]$ nepārtraukta funkcija un tās vērtības intervāla galapunktos ir dažādzīmju skaitļi (tas ir, $f(a) < 0$ un $f(b) > 0$ vai arī $f(a) > 0$ un $f(b) < 0$), tad intervālā $(a; b)$ eksistē tāds skaitlis k, ka $f(k) = 0$.

Piezīmes.

1. Apgalvojumam "$f(a) < 0$ un $f(b) > 0$ vai arī $f(a) > 0$ un $f(b) < 0$" ekvivalents apgalvojums ir "$f(a) \cdot f(b) < 0$".
2. Funkcija $y = f(x)$ krusto x asi ir ekvivalents apgalvojumam, ka vienādojumam $f(x) = 0$ ir sakne (atrisinājums).
3. Bolcano teorēma ir spēkā jebkurai intervālā nepārtrauktai funkcijai.
4. Lineāra funkcija un kvadrātfunkcija ir nepārtrauktas visā savā definīcijas kopā.

Uzdevumu piemēri

10. Dots, ka a, b, c ir dažādi reāli skaitļi. Pierādīt, ka vienādojumam

$$(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c)=0$$

ir divas dažādas saknes.

Atrisinājums. Nezaudējot vispārīgumu (simetrijas dēļ), varam pieņemt, ka $a > b > c$. Apskatām funkciju $f(x) = (x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c)$ un aprēķinām funkcijas vērtību dažos punktos:

- $f(a) = (a-b)(a-c) > 0$;
- $f(b) = (b-a)(b-c) < 0$;
- $f(c) = (c-a)(c-b) > 0$.

Tā funkcija f ir kvadrātfunkcija, tad tā ir nepārtraukta, līdz ar to tā krusto x asi intervālā $(b; a)$ un arī intervālā $(c; b)$. Tātad dotajam vienādojumam ir divas dažādas saknes.

11. Dots, ka a, b, c ir kāda trijstūra malu garumi. Pierādīt, ka vienādojumam $ax^2 + bx - c = 0$ intervālā $(0; 1)$ ir tieši viena sakne.

Atrisinājums. Tā kā a, b, c ir trijstūra malu garumi, tad $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
Apskatām kvadrātfunkciju $f(x) = ax^2 + bx - c$ un tās vērtību divos punktos:

- $f(0) = -c < 0$;
- $f(1) = a + b - c > 0$ (trijstūra nevienādība $a + b > c$).

Tā kā $f(0) \cdot f(1) < 0$, tad intervālā $(0; 1)$ eksistē tāda x vērtība, ka $f(x) = 0$ jeb kvadrātvienādojumam $ax^2 + bx - c = 0$ intervālā $(0; 1)$ ir vismaz viena sakne.
Pamatosim, ka kvadrātvienādojuma otra sakne ir negatīva, tātad tā nebūs intervālā $(0; 1)$. Pēc Vjeta teorēmas dotā kvadrātvienādojuma sakņu reizinājums ir $-\frac{c}{a} < 0$, jo a un c ir pozitīvi skaitļi.

12. Dots, ka x_1 ir vienādojuma $x^2 + px + q = 0$ sakne, bet x_2 ir vienādojuma $-x^2 + px + q = 0$ sakne. Pierādīt, ka vienādojumam $\frac{1}{3}x^2 + px + q = 0$ noteikti ir sakne x_3, kas atrodas starp x_1 un x_2 (tas ir, $x_1 \le x_3 \le x_2$ vai $x_2 \le x_3 \le x_1$).

Atrisinājums. Aplūkojam kvadrātfunkciju $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + px + q$ un tās vērtību punktā x_1 un x_2:

$$f(x_1) = \frac{1}{3}x_1^2 + px_1 + q = x_1^2 + px_1 + q - \frac{2}{3}x_1^2 = -\frac{2}{3}x_1^2 \le 0;$$

$$f(x_2) = \frac{1}{3}x_2^2 + px_2 + q = -x_2^2 + px_2 + q + \frac{4}{3}x_2^2 = \frac{4}{3}x_2^2 \ge 0.$$

Tā kā vienā no šiem punktiem funkcijas vērtība ir negatīva vai vienāda ar 0, bet otrā – nenegatīva, turklāt kvadrātfunkcija ir nepārtraukta, tad starp šiem punktiem ir tāds punkts x_3, kurā funkcija $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + px + q$ pieņem vērtību 0. Šis punkts x_3 ir vienādojuma $\frac{1}{3}x^2 + px + q = 0$ sakne, kas atrodas starp x_1 un x_2.

13. Dots, ka $a \neq 0$, $a + b + c < 0$ un $4a + 2b + c > 0$. Pierādīt, ka $b^2 - 4ac > 0$.
Atrisinājums. Apskatām kvadrātfunkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ievērojam, ka pēc dotā:

- $f(1) = a + b + c < 0$,
- $f(2) = 4a + 2b + c > 0$.

Tā kā kvadrātfunkcija ir nepārtraukta funkcija, tad intervālā $(1; 2)$ tā krusto x asi, tātad diskriminants ir pozitīvs, tas ir, $D > 0$ jeb $b^2 - 4ac > 0$.

14. Dots, ka $a^2 + ab + ac < 0$. Pierādīt, ka $b^2 > 4ac$.
Atrisinājums. Aplūkojam kvadrātfunkciju $f(x) = cx^2 + bx + a$. Ievērojam, ka

$$a^2 + ab + ac = a(a + b + c) = f(0) \cdot f(1).$$

No dotā izriet, ka $f(0) \cdot f(1) < 0$, tātad kvadrātfunkcija krusto x asi. Līdz ar to kvadrātfunkcijai ir divas saknes un tās diskriminants ir pozitīvs, tas ir, $D = b^2 - 4ac > 0$ jeb $b^2 > 4ac$.