IEVILKTI ČETRSTŪRI

Teorija un piemēri 10.-12. klasei, gatavojoties Novada matemātikas olimpiādei 2023./2024. m. g.

Leņķi riņķa līnijā

Definīcija. Par **centra leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas riņķa līnijas centrā, bet malas krusto riņķa līniju.

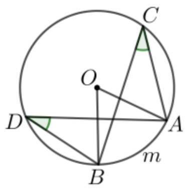
Centra leņķa lielums ir vienāds ar tā loka leņķisko lielumu, uz kuru tas balstās, tas ir, $\sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AmB}$ (skat. 1. att.).

Definīcija. Par riņķa līnijā **ievilktu leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas uz riņķa līnijas, bet malas krusto riņķa līniju.

Teorēma. Ievilktā leņķa lielums ir vienāds ar pusi no tā loka leņķiskā lieluma, uz kuru tas balstās, tas ir, $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AmB}$ (skat. 1. att.).

Secinājumi

- Visi ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, ir vienādi, piemēram, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ (skat. 1. att.).
- Ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru, ir $90°$, un otrādi – ja ievilkts leņķis ir taisns, tad tas balstās uz diametru.

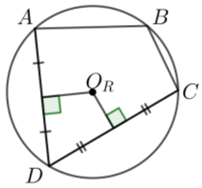


1. att.

Ievilkti četrstūri

Definīcija. Par riņķa līnijā **ievilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas virsotnes atrodas uz riņķa līnijas.

Attiecīgi riņķa līniju sauc par četrstūrim apvilktu riņķa līniju.
Apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra malu vidusperpendikulu krustpunktā (skat. 2. att.).



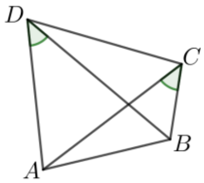
2. att.

Visbiežāk tiek lietota šāda teorēma par ievilktu četrstūri.

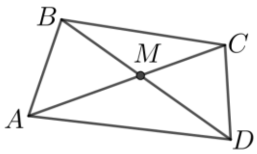
Teorēma. Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja četrstūra pretējo leņķu lielumu summa ir 180°.

Izmanto arī citas teorēmas, lai pamatotu, ka ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju.

Teorēma. Ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BDA$ (skat. 3. att.).



3. att.



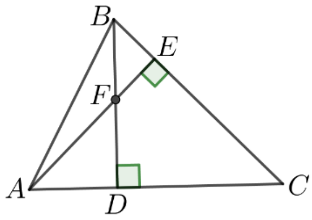
4. att.

Teorēma. Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja ir spēkā vienādība $AM \cdot MC = BM \cdot MD$, kur M ir nogriežņu AC un BD krustpunkts (skat. 4. att.).

Uzdevumu piemēri

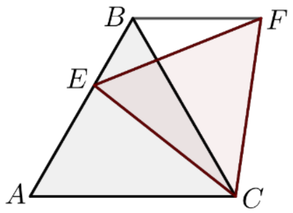
1. Šaurleņķu trijstūra ABC augstumi BD un AE krustojas punktā F. Pierādīt, ka punkti E, C, D, F atrodas uz vienas riņķa līnijas!

Atrisinājums. Tā kā BD un AE ir augstumi, tad $\sphericalangle BDC = \sphericalangle AEC = 90°$ (skat. 5. att.). Līdz ar to $\sphericalangle FDC + \sphericalangle FEC = 180°$ un ap četrstūri $EFDC$ var apvilkt riņķa līniju jeb punkti E, C, D, F atrodas uz vienas riņķa līnijas.



5. att.

2. Trijstūri ABC un CEF ir vienādmalu trijstūri (skat. 6. att.). Pierādīt, ka $BF||AC$!

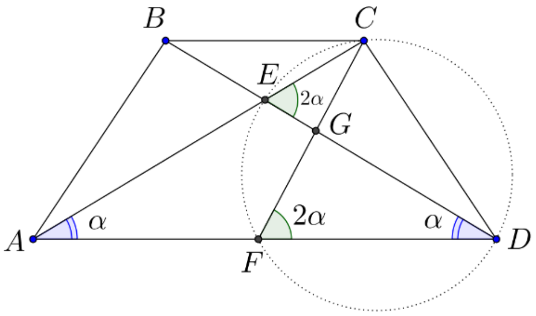


6. att.

Atrisinājums. Tā kā $\sphericalangle EBC = \sphericalangle EFC = 60°$, tad ap četrstūri $EBFC$ var apvilkt riņķa līniju. Tāpēc $\sphericalangle FBC = \sphericalangle FEC = 60°$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku. Ievērojam, ka $\sphericalangle FBA + \sphericalangle BAC = 120° + 60° = 180°$, tātad $BF||AC$, jo iekšējo vienpusleņķu summa ir $180°$.

3. Vienādsānu trapeces $ABCD$ sānu malas ir AB un CD, bet diagonāles AC un BD krustojas punktā E. Ap trijstūri CDE apvilktā riņķa līnija krusto garāko pamatu AD iekšējā punktā F. Nogriežņu CF un BD krustpunkts ir G. Aprēķināt $\sphericalangle CGD$ lielumu, ja $\sphericalangle CAD = \alpha$.

Atrisinājums. Tā kā trapece $ABCD$ ir vienādsānu, tad arī $\sphericalangle ADE = \alpha$ (skat. 7. att.). No trijstūra AED iegūstam, ka $\sphericalangle AED = 180° - 2\alpha$. Pēc blakusleņķu īpašības $\sphericalangle CED = 2\alpha$. Punkti C, E, F, D atrodas uz vienas riņķa līnijas, tāpēc $\sphericalangle CED = \sphericalangle CFD = 2\alpha$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku CD. No trijstūra FGD iegūstam, ka $\sphericalangle CGD = 3\alpha$ kā ārējais leņķis.

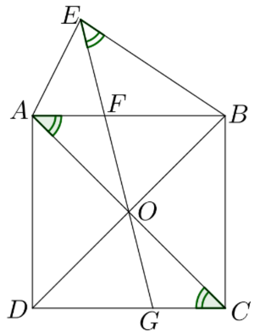


7. att.

4. Uz kvadrāta $ABCD$ malas AB kā pamata uz kvadrāta ārpusi konstruēts trijstūris AEB. Taisne, kas vilkta no E caur kvadrāta diagonāļu krustpunktu O, krusto kvadrāta malu AB punktā F un malu DC – punktā G. Zināms, ka $\sphericalangle OEB = \sphericalangle OCG$. Pierādīt, ka trijstūris AEB ir taisnleņķa trijstūris!

Atrisinājums. Kvadrāta pretējās malas AB un CD ir paralēlas, tāpēc $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$ kā iekšējie šķērsleņķi (skat. 8. att.).

Punkti A, E, B, O atrodas uz vienas riņķa līnijas ω, jo $\sphericalangle BAO = \sphericalangle OEB$. Tā kā kvadrāta diagonāles ir perpendikulāras, tad $\sphericalangle AOB = 90°$; no kā izriet, ka AB ir riņķa līnijas ω diametrs. Tātad $\sphericalangle AEB = 90°$ kā ievilktais leņķis, kas balstās uz diametru. Līdz ar to esam pierādījuši, ka trijstūris AEB ir taisnleņķa.

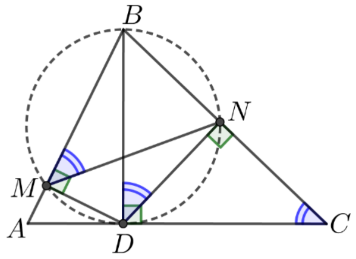


8. att.

5. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkts augstums BD. No punkta D novilkti perpendikuli pret malām AB un CB; to pamati ir attiecīgi M un N. Pierādīt, ka punkti A, M, N, C atrodas uz vienas riņķa līnijas!

Atrisinājums. Tā kā $\sphericalangle BMD + \sphericalangle BND = 90° + 90° = 180°$, tad ap četrstūri $BNDM$ var apvilkt riņķa līniju (skat. 9. att.). Tāpēc $\sphericalangle BMN = \sphericalangle BDN$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku BN. No ΔCND iegūstam, ka $\sphericalangle NCD = 90° - \sphericalangle NDC = \sphericalangle BDN$, tātad $\sphericalangle NCD = \sphericalangle BMN$.

Tāpēc $\sphericalangle AMN + \sphericalangle ACN = \sphericalangle AMN + \sphericalangle BMN = 180°$ jeb punkti A, M, N, C atrodas uz vienas riņķa līnijas.



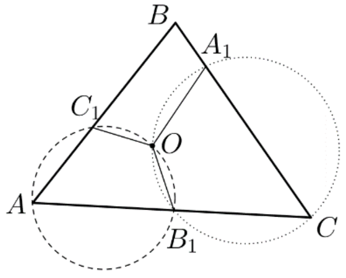
9. att.

6. Trijstūrī ABC punkts A_1 ir malas BC iekšējais punkts, B_1 ir malas AC iekšējais punkts, C_1 ir malas AB iekšējais punkts. Ap trijstūriem $AB_1C_1, CB_1A_1, BA_1C_1$ apvilktas riņķa līnijas. Pierādīt, ka tās visas krustojas vienā punktā!

Atrisinājums. To riņķa līniju krustpunktu, kuras apvilktas ap trijstūriem AC_1B_1 un CA_1B_1, apzīmējam ar O (skat. 10. att.). No teorēmas par ievilktā četrstūra leņķiem iegūstam:

$$\sphericalangle C_1OA_1 = 360° - \sphericalangle B_1OA_1 - \sphericalangle C_1OB_1 =$$
$$= 360° - (180° - \sphericalangle A_1CB_1) - (180° - \sphericalangle B_1AC_1) =$$
$$= \sphericalangle A_1CB_1 + \sphericalangle B_1AC_1 = 180° - \sphericalangle C_1BA_1.$$

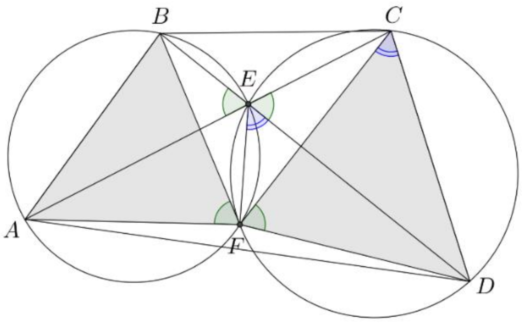
Tātad ap četrstūri C_1BA_1O var apvilkt riņķa līniju. Tas nozīmē, ka visas trīs dotās riņķa līnijas krustojas punktā O.



10. att.

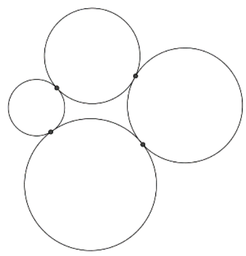
7. Izliekta četrstūra $ABCD$ diagonāles krustojas punktā E. Ap trijstūriem ABE un CDE apvilktās riņķa līnijas arī krustojas punktā F. Pierādīt, ka trijstūri ABF un CDF ir līdzīgi!

Atrisinājums. Ievērojam, ka $\sphericalangle DEC = \sphericalangle AEB$ kā krustleņķi (skat. 11. att.) un $\sphericalangle CFD = \sphericalangle DEC$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku CD, un $\sphericalangle AFB = \sphericalangle AEB$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz loku AB. Tātad $\sphericalangle CFD = \sphericalangle AFB$. Ievilktie leņķi $\sphericalangle DCF$ un $\sphericalangle DEF$ ir vienādi, jo balstās uz vienu loku un to pašu loku FD. No blakusleņķu īpašības izriet, ka $\sphericalangle BEF = 180° - \sphericalangle DEF$. Tā kā ap četrstūri $ABEF$ ir apvilkta riņķa līnija, tad tā pretējo leņķu summa ir $180°$, tāpēc $\sphericalangle BAF = 180° - \sphericalangle BEF = 180° - (180° - \sphericalangle DEF) = \sphericalangle DEF$. Esam ieguvuši, ka $\Delta CDF \sim \Delta ABF$ pēc pazīmes $\ell\ell$.



11. att.

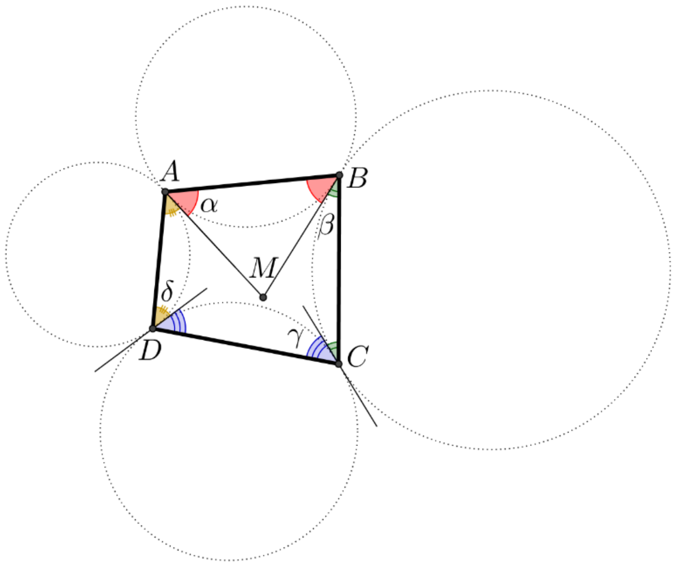
8. Četras riņķa līnijas ārēji pieskaras tā, kā parādīts 12. att. Pierādīt, ka četrstūrim, ko veido riņķa līniju pieskaršanās punkti, var apvilkt riņķa līniju!



12. att.

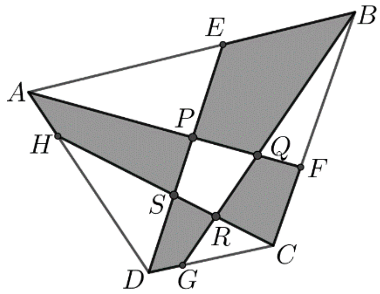
Atrisinājums. Riņķa līniju pieskaršanās punktus apzīmējam ar A, B, C un D (skat. 13. att.). Novelkam doto riņķa līniju kopīgās pieskares AM un BM. Trijstūris AMB ir vienādsānu, jo $AM = MB$ kā riņķa līnijas pieskaru nogriežņi, kas novilkti no punkta ārpus tās. Līdz ar to $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = \alpha$ kā leņķi pie pamata vienādsānu trijstūrī. Līdzīgi iegūstam atlikušo leņķu pāru vienādības.

Ievērojam, ka $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360°$, no kā iegūstam, ka $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$. Tā kā $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$, tad četrstūrim $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju.



13. att.

9. Izliektā četrstūrī $ABCD$ virsotnes savienotas ar patvaļīgiem malu iekšējiem punktiem (skat. 14. att.). Vai iespējams ap katru iekrāsoto četrstūri apvilkt riņķa līniju?



14. att.

Atrisinājums. Nē, nav iespējams. Pieņemsim pretējo, ka ap katru iekrāsoto četrstūri var apvilkt riņķa līniju. Izmantojot, ka ievilkta četrstūra pretējo leņķu summa ir $180°$, iegūstam:

- $\sphericalangle PAH = 180° - \sphericalangle PSH = \sphericalangle PSR$ (no četrstūra $APSH$);
- $\sphericalangle EBQ = 180° - \sphericalangle EPQ = \sphericalangle QPS$ (no četrstūra $EBQP$);
- $\sphericalangle FCR = 180° - \sphericalangle FQR = \sphericalangle PQR$ (no četrstūra $CRQF$);
- $\sphericalangle GDS = 180° - \sphericalangle GRS = \sphericalangle QRS$ (no četrstūra $DSRG$).

Saskaitot iegūtās vienādības, iegūstam

$$\sphericalangle PAH + \sphericalangle EBQ + \sphericalangle FCR + \sphericalangle GDS = \sphericalangle PSR + \sphericalangle QPS + \sphericalangle PQR + \sphericalangle QRS.$$

Tā kā četrstūra iekšējo leņķu summa ir $360°$, tad

$$\sphericalangle PSR + \sphericalangle QPS + \sphericalangle PQR + \sphericalangle QRS = 360°;$$

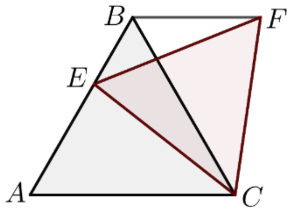
bet $\sphericalangle PAH + \sphericalangle EBQ + \sphericalangle FCR + \sphericalangle GDS < \sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 360°$.

Esam ieguvuši pretrunu, tātad pieņēmums ir bijis aplams un ap katru iekrāsoto četrstūri nav iespējams apvilkt riņķa līniju.

Uzdevumi

1. Šaurleņķu trijstūra ABC augstumi BD un AE krustojas punktā F. Pierādīt, ka punkti E, C, D, F atrodas uz vienas riņķa līnijas!

2. Trijstūri ABC un CEF ir vienādmalu trijstūri (skat. 15. att.). Pierādīt, ka $BF||AC$!



15. att.

3. Vienādsānu trapeces $ABCD$ sānu malas ir AB un CD, bet diagonāles AC un BD krustojas punktā E. Ap trijstūri CDE apvilktā riņķa līnija krusto garāko pamatu AD iekšējā punktā F. Nogriežņu CF un BD krustpunkts ir G. Aprēķināt $\sphericalangle CGD$ lielumu, ja $\sphericalangle CAD = \alpha$.

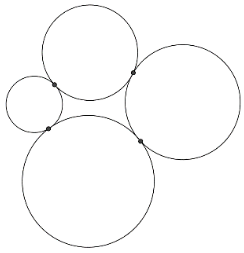
4. Uz kvadrāta $ABCD$ malas AB kā pamata uz kvadrāta ārpusi konstruēts trijstūris AEB. Taisne, kas vilkta no E caur kvadrāta diagonāļu krustpunktu O, krusto kvadrāta malu AB punktā F un malu DC – punktā G. Zināms, ka $\sphericalangle OEB = \sphericalangle OCG$. Pierādīt, ka trijstūris AEB ir taisnleņķa trijstūris!

5. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkts augstums BD. No punkta D novilkti perpendikuli pret malām AB un CB; to pamati ir attiecīgi M un N. Pierādīt, ka punkti A, M, N, C atrodas uz vienas riņķa līnijas!

6. Trijstūrī ABC punkts A_1 ir malas BC iekšējais punkts, B_1 ir malas AC iekšējais punkts, C_1 ir malas AB iekšējais punkts. Ap trijstūriem $AB_1C_1, CB_1A_1, BA_1C_1$ apvilktas riņķa līnijas. Pierādīt, ka tās visas krustojas vienā punktā!

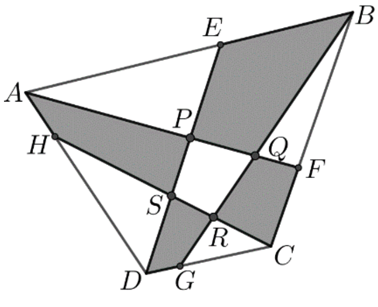
7. Izliekta četrstūra $ABCD$ diagonāles krustojas punktā E. Ap trijstūriem ABE un CDE apvilktās riņķa līnijas arī krustojas punktā F. Pierādīt, ka trijstūri ABF un CDF ir līdzīgi!

8. Četras riņķa līnijas ārēji pieskaras tā, kā parādīts 16. att. Pierādīt, ka četrstūrim, ko veido riņķa līniju pieskaršanās punkti, var apvilkt riņķa līniju!



16. att.

9. Izliektā četrstūrī $ABCD$ virsotnes savienotas ar patvaļīgiem malu iekšējiem punktiem (skat. 17. att.). Vai iespējams ap katru iekrāsoto četrstūri apvilkt riņķa līniju?



17. att.